

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В МГД-КАНАЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЭФФЕКТА ХОЛЛА

В. Х. Кириллов

(Одесса)

Изучается пространственное распределение электростатического потенциала в канале с двумя электродами при наличии эффекта Холла. Профиль скорости неоднороден и соответствует убыванию скорости до нуля на стенках канала. Нахождение электрического поля в канале сводится к решению краевой задачи со смешанными граничными условиями для уравнения эллиптического типа. При решении используется один из вариантов метода Винера — Хопфа.

Трехмерное распределение электрического поля в МГД-канале из-за больших математических трудностей исследовалось только для простейших случаев изотропно проводящих сред, а именно, если стенки канала обладают однородными электропроводящими свойствами или если в канале имеется электродная зона [1-7]. При наличии же анизотропии проводимости среды рассматривались лишь плоские задачи [8, 9].

1. **Случай полубесконечных электродов.** 1°. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой анизотропно проводящей среды в магнитогидродинамическом канале прямоугольного сечения $|x| < \infty$, $|y| < b$, $|z| < 1$ во внешнем однородном магнитном поле $H_0(0, H_0, 0)$, $H_0 = \text{const}$. При $y = \pm b$ стенки канала — изоляторы, а две другие ($z = \pm 1$) — изоляторы при $x < 0$ и идеально проводящие электроды при $x > 0$. Скорость среды

$$v = (v_x, 0, 0), \quad v_x(y, z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(z) \cos \lambda_k y$$

$$\lambda_k = k\pi / b, \quad Z_k(\pm 1) = 0, \quad Z_k(z) = Z_k(-z)$$

Распределение электростатического потенциала $\varphi = \varphi(x, y, z)$ и плотности тока $J = J(x, y, z)$ (в предположении, что $\text{Re}_m \ll 1$) определяются из системы [10]

$$\text{div } j = 0$$

$$J = \sigma [-\nabla\varphi + v \times H_0] - \frac{\beta}{H_0} [j \times H_0] \quad (1.1)$$

(β — параметр Холла) при следующих граничных условиях: $j_n = 0$ на изоляторах, $\varphi = \text{const}$ на электродах.

Таким образом, электростатический потенциал $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет краевой задаче

$$\Delta\varphi = H_0 \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad y^* = \frac{y}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad b^* = \frac{b}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y^*} = 0, \quad y^* = \pm b^* \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \beta \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad z = \pm 1, \quad x < 0$$

$$\varphi = \pm \varphi_e, \quad z = \pm 1, \quad x > 0$$

Здесь $2\varphi_e$ — разность потенциалов между электродами.

Для однозначного решения задачи (1.2) необходимо задать условия на ребре $x = 0, z = \pm 1$. Пусть [8]

$$\begin{aligned} \varphi^+ &\sim |x|^{1/2+\varepsilon}, \quad x \rightarrow -0, \quad z = +1, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^+ \sim |x|^{-1/2-\varepsilon}, \quad x \rightarrow +0, \quad z = +1 \\ \varphi^- &\sim |x|^{1/2-\varepsilon}, \quad x \rightarrow -0, \quad z = -1, \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^- \sim |x|^{-1/2+\varepsilon}, \quad x \rightarrow +0, \quad z = -1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$(0 \leq \varepsilon < 1/2)$

Искомый потенциал φ представим в виде

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, z) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x, z) \cos \lambda_k y^*, \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{b^*} \quad (1.4)$$

$$\varphi_0(x, z) = u_0(x, z) + H_0 \int_0^z Z_0(z) dz$$

$$\varphi_k(x, z) = u_k(x, z) - H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{v_n^2 + \lambda_k^2} \sin v_n z$$

$$a_{nk} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 Z_k'(z) \sin v_n z dz \quad v_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

Функции $u_k(x, z)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), таким образом, являются решениями граничных задач со смешанными условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} - \lambda_k^2 u_k &= 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial z} &= \beta \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad z = \pm 1, \quad x < 0 \\ u_k &= \mp u_k^e, \quad z = \pm 1, \quad x > 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$u_0^e = -\varphi_e + H_0 \int_0^1 Z_0(z) dz$$

$$u_k^e = H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_{nk}}{v_n^2 + \lambda_k^2} \quad (k \neq 0)$$

Предположим, что вспомогательный потенциал $u_k(x, z)$ удовлетворяет условиям на ребре типа (1.3), а также условиям

$$\begin{aligned} |u_k| &< c_1 e^{\tau_+ x}, \quad \tau_+ \geq 0, \quad x \rightarrow -\infty \\ |u_k| &< c_2 e^{\tau_- x}, \quad \tau_- = 0, \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.6)$$

2°. Применим к (1.5) преобразование Фурье

$$\Phi(\alpha, z) = \Phi_+(\alpha, z) + \Phi_-(\alpha, z), \quad u_k(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} \Phi(\alpha, z) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

$$\Phi_-(\alpha, z) = \int_{-\infty}^0 u_k(x, z) e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi_+(\alpha, z) = \int_0^{\infty} u_k(x, z) e^{i\alpha x} dx \quad (\alpha = \sigma + i\tau)$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, индекс плюс означает, что данная функция регулярна в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$, а минус означает, что функция регулярна в нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$.

Тогда для функции $\Phi(\alpha, z)$ получаем следующую задачу (штрих — производная по z):

$$\begin{aligned} \Phi''(\alpha, z) - \gamma^2 \Phi(\alpha, z) &= 0, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + \lambda_k^2 & (1.7) \\ \Phi'_-(\alpha, \pm 1) &= \beta [u_k(-0, \pm 1) - i\alpha \Phi_-(\alpha, \pm 1)] \\ \Phi_+(\alpha, \pm 1) &= \pm u_k^e / i\alpha \end{aligned}$$

Если исключить неизвестные $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ из соотношения

$$\Phi(\alpha, z) = A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma z + B(\alpha) \operatorname{sh} \gamma z$$

используя граничные условия (1.7), получим исходную систему функциональных уравнений

$$\psi_+(\alpha) - i\alpha\beta\Delta_-(\alpha) - K(\alpha)\Lambda_-(\alpha) = \frac{u_k^e K(\alpha)}{i\alpha} \quad (1.8)$$

$$(\gamma^2 + \alpha^2\beta^2)\Delta_-(\alpha) + i\alpha\beta\Psi_+(\alpha) - K(\alpha)\Omega_+(\alpha) = \beta u_k^e K(\alpha)$$

Здесь

$$K(\alpha) = \gamma \operatorname{cth} \gamma$$

$$\psi_+(\alpha) = 1/2[\Phi'_+(\alpha, 1) + \Phi'_+(\alpha, -1)] + \beta^{-2} [u_k(-0, 1) + u_k(-0, -1)]$$

$$\Delta_-(\alpha) = 1/2[\Phi(\alpha, 1) + \Phi(\alpha, -1)], \quad \Lambda_-(\alpha) = 1/2[\Phi_-(\alpha, 1) - \Phi_-(\alpha, -1)]$$

$$\Omega_+(\alpha) = 1/2[\Phi'_+(\alpha, 1) - \Phi'_+(\alpha, -1)] + \beta^{-2} [u_k(-0, 1) - u_k(-0, -1)]$$

Система (1.8) справедлива в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, а неизвестными функциями здесь служат $\Delta_-(\alpha)$, $\psi_+(\alpha)$, $\Lambda_-(\alpha)$, $\Omega_+(\alpha)$.

3°. Перейдем к решению системы (1.8) методом Винера — Хопфа. Факторизация функции $K(\alpha)$ известна [11]

$$K(\alpha) = K_k^+(\alpha) K_k^-(\alpha) \quad (1.9)$$

$$K_k^+(\alpha) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1 + \lambda_k^2 / \nu_m^2} - i\alpha / \nu_m}{\sqrt{1 + \lambda_k^2 / \mu_m^2} - i\alpha / \mu_m}, \quad K_k^-(\alpha) = K_k^+(-\alpha), \quad \mu_n = n\pi$$

Отметим, что при $k = 0$ факторизация функции $K(\alpha)$ представляется через гамма-функции

$$K_0^+(\alpha) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1 - i\alpha/\pi)}{\Gamma(1/2 - i\alpha/\pi)}, \quad K_0^-(\alpha) = K_0^+(-\alpha)$$

Функции $K_k^+(\alpha)$ регулярны и не имеют нулей при $\operatorname{Im} \alpha > -\pi/2$, причем $K_k^+(\alpha) \sim |\alpha|^{1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости.

Умножим первое уравнение (1.8) на $1 / K_k^+(\alpha)$, а второе — на $1 / K_k^-(\alpha)$ и, производя затем обычную группировку членов по методу Винера — Хопфа, получим

$$\frac{\psi_+(\alpha)}{K_k^+(\alpha)} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iy_{nk} K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} + \alpha} - \frac{u_k^e K_k^-(0)}{i\alpha} = K_k^-(\alpha) \Lambda_-(\alpha) +$$

$$\begin{aligned}
& + i\alpha\beta \frac{\Delta_-(\alpha)}{K_k^+(\alpha)} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iy_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} + \alpha} + u_k e \frac{K_k^-(\alpha) - K_k^-(0)}{i\alpha} \\
\Omega_+(\alpha) K_k^+(\alpha) + i\alpha\beta \frac{\psi_+(\alpha)}{K_k^-(\alpha)} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ix_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} - \alpha} + \beta K_k^+(\alpha) u_k e = \\
& = (\gamma^2 + \alpha^2\beta^2) \frac{\Delta_-(\alpha)}{K_k^-(\alpha)} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ix_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} - \alpha} \\
x_{nk} = \psi_+(is_{nk}), \quad y_{nk} = \Delta_-(-is_{nk}), \quad t_{nk}^2 = \mu_n^2 + \lambda_k^2, \quad s_{nk}^2 = \nu_n^2 + \lambda_k^2
\end{aligned}$$

В левой части этих соотношений стоят функции, регулярные в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$, а в правой — регулярные в полуплоскости, частью перекрывающей первую $\tau < \tau_+$ ($\tau_- < \tau_+$). Тогда каждая из них в отдельности служит аналитическим продолжением другой и обе они представляют собой одну и ту же целую функцию. Согласно обобщенной теореме Лиувилля

$$\begin{aligned}
\frac{\psi_+(\alpha)}{K_k^+(\alpha)} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iy_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} + \alpha} - \frac{u_k e K_k^-(0)}{i\alpha} &= P_m(\alpha) \quad (1.10) \\
(\gamma^2 + \alpha^2\beta^2) \frac{\Delta_-(\alpha)}{K_k^-(\alpha)} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ix_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} - \alpha} &= P_n(\alpha)
\end{aligned}$$

Степени полиномов $P_m(\alpha)$ и $P_n(\alpha)$ определяются асимптотическим поведением каждой из функций в (1.8). Используя условия на ребре (1.3), можно показать, что $P_m(\alpha) \equiv 0$, $P_n(\alpha) = p (= \text{const})$. Постоянную p определим следующим образом:

$$p = -\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{nk}K_k^+(is_{nk})}{s_{nk} + \alpha_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_k}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$

ибо функция $\Delta_-(\alpha)$, определяемая в (1.10), регулярна в нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$. Следовательно

$$\begin{aligned}
\psi_+(\alpha) &= K_k^+(\alpha) \left[\frac{u_k e K_k^-(0)}{i\alpha} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{iy_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} + \alpha} \right] \quad (1.11) \\
\Delta_-(\alpha) &= \frac{K_k^-(\alpha)}{\gamma^2 + \alpha^2\beta^2} \left[p + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ix_{nk}K_k^+(is_{nk})}{is_{nk} - \alpha} \right]
\end{aligned}$$

Положим далее в первом соотношении (1.11) $\alpha = is_{mk}$, во втором — $\alpha = -is_{mk}$, тогда для определения величин x_{nk} и y_{nk} получим систему бесконечных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{x_{mk}}{K_k^+(is_{mk})} - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{nk}K_k^+(is_{nk})}{s_{nk} + s_{mk}} &= -\frac{u_k e K_k^-(0)}{s_{mk}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.12) \\
(\beta^2 s_{mk}^2 + \nu_m^2) \frac{y_{mk}}{K_k^+(is_{mk})} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk}K_k^+(is_{nk}) \left(\frac{1}{s_{nk} + s_{mk}} - \frac{1}{s_{nk} + \alpha_1} \right) &= 0
\end{aligned}$$

Найденные функции $\psi_+(\alpha)$ и $\Delta_-(\alpha)$ дают возможность определить трансформанту $\Phi(\alpha, z)$

$$\Phi(\alpha, z) = -u_k e \left[\frac{K_k^-(\alpha) S_k(\alpha)}{\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2} \left(\frac{\text{ch } \gamma z}{\text{ch } \gamma} - i\alpha\beta \frac{\text{sh } \gamma z}{\gamma \text{ch } \gamma} \right) + K_k^+(\alpha) R_k(\alpha) \frac{\text{sh } \gamma z}{\gamma \text{ch } \gamma} \right]$$

$$R_k(\alpha) = -\frac{K_k^-(0)}{i\alpha} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i y_{nk} K_k^+(i s_{nk})}{i s_{nk} + \alpha}$$

$$S_k(\alpha) = \beta \sum_{n=1}^{\infty} x_{nk} K_k^+(i s_{nk}) \left(\frac{1}{s_{nk} + i\alpha} - \frac{1}{s_{nk} + \alpha_1} \right)$$

Совершим обратное преобразование Фурье, тогда искомое распределение электростатического потенциала (1.4) имеет вид:

для области $x < 0$

$$\varphi_0(x, z) = H_0 \int_0^z Z_0(z) dz - \frac{u_0 e}{1 + \beta^2} \left[\beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n0} K_0^+(i v_n)}{v_n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{S_0(i \mu_n) e^{\mu_n x}}{\mu_n K_0^+(i \mu_n)} (\cos \mu_n z + \beta \sin \mu_n z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_{n0}}{v_n} e^{v_n x} (\beta \cos v_n z - \sin v_n z) \right] \quad (1.13)$$

$$\varphi_k(x, z) = -H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{v_n^2 + \lambda_k^2} - \frac{u_k e}{1 + \beta^2} \left[\frac{\beta S_k(i \alpha_1) e^{\alpha_1 x}}{2 \text{sh } \beta \alpha_1 K_k^+(i \alpha_1)} (\text{ch } \beta \alpha_1 z + \text{sh } \beta \alpha_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n S_k(i t_{nk}) e^{t_{nk} x}}{t_{nk} K_k^+(i t_{nk}) (t_{nk}^2 - \alpha_1^2)} (\mu_n \cos \mu_n z + \beta t_{nk} \sin \mu_n z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{v_n x_{nk} e^{s_{nk} x}}{s_{nk} (s_{nk}^2 - \alpha_1^2)} (\beta s_{nk} \cos v_n z - v_n \sin v_n z) \right]$$

для области $x > 0$

$$\varphi_0(x, z) = H_0 \int_0^z Z_0(z) dz - u_0 e \left[z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_{n0} e^{-v_n x} \cos v_n z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{R_0(-i \mu_n)}{K_0^+(i \mu_n)} e^{-\mu_n x} \sin \mu_n z \right]$$

$$\varphi_k(x, z) = -H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{v_n^2 - \lambda_k^2} \sin v_n z - u_k e \left[\frac{\text{sh } \lambda_k z}{\text{sh } \lambda_k} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y_{nk} v_n}{s_{nk}} e^{-s_{nk} x} \cos v_n z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mu_n R_k(-i t_{nk}) e^{-t_{nk} x}}{t_{nk} K_k^+(i t_{nk})} \sin \mu_n z \right] \quad (1.14)$$

4°. Перейдем к исследованию полученных бесконечных систем (1.12). Вместо x_{nk} и y_{nk} введем новые неизвестные

$$x'_{nk} = -\frac{x_{nk}}{u_k e K_k^-(0)}, \quad y'_{nk} = -\frac{y_{nk} (s_{nk} + \alpha_1)}{u_k e K_k^-(0)}$$

Для последних из (1.10) получим систему, разрешая которую относительно каждой неизвестной, имеем две системы бесконечных уравнений следующего вида:

$$x_m = \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} x_n + b_m \quad (1.15)$$

Здесь

$$c_{mn} = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \frac{K_k^+(is_{mk}) K_k^+(is_{nk})}{(s_{nk} + \alpha_1)(s_{nk} + s_{mk})} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{K_k^+(istk)}{(s_{tk} + \alpha_1)(s_{tk} + s_{nk})}$$

Системы (1.15) для любого $0 \leq \beta < \infty$ вполне регулярны. Это вытекает из оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \leq \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} K_k^+(is_{mk}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_k^+(is_{nk})}{s_{nk}(s_{nk} + s_{mk})} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{K_k^+(istk)}{s_{tk}(s_{tk} + s_{nk})} = \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} < 1.$$

При доказательстве оценки использовалось равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_k^+(is_{nk})}{s_{nk}(s_{nk} + s_{mk})} = \frac{1}{K_k^+(is_{mk})}$$

которое получается при вычислении с помощью теории вычетов контурного интеграла [11]

$$f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_-(\zeta) d\zeta}{\zeta - \alpha}, \quad \tau < 0$$

где

$$f_-(\alpha) = 1 / K_k^-(\alpha), \quad \alpha = -is_{nk}$$

Свободные члены b_m ограничены в совокупности, поэтому решение системы (1.15) может быть найдено методом редукции или методом последовательных приближений [12]. Кроме того, можно показать, что справедливы неравенства $x'_{n,k-1} > x'_{n,k}$, $y'_{n,k-1} > y'_{n,k}$.

2. Случай конечных электродов. Рассмотрим, как и прежде, прямоугольный канал $|x| < \infty$, $|y| < b$, $|z| < 1$, стенки которого всюду не проводящие, за исключением двух симметрично расположенных электродов $z = \pm 1$, $|x| < a$. Краевая задача записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} - \lambda_k^2 u_k &= 0 \\ \frac{\partial u_k}{\partial z} &= \beta \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad z = \pm 1, \quad |x| > a \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$u_k = \mp 1, \quad z = \pm 1, \quad |x| < a$$

Применяя преобразование Фурье по x , получаем систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} (\alpha^2 \beta^2 + \gamma^2) \Delta_+(\alpha) e^{i\alpha a} + i\alpha \beta R_0(\alpha) - K(\alpha) S_0(\alpha) + \\ + (\alpha^2 \beta^2 + \gamma^2) \Delta_-(\alpha) e^{-i\alpha a} &= -2i\beta K(\alpha) \sin \alpha a \\ (\alpha^2 \beta^2 + \gamma^2) \Delta_+(\alpha) e^{i\alpha a} + i\alpha \beta S_0(\alpha) - \gamma^2 R_0(\alpha) / K(\alpha) + \\ + (\alpha^2 \beta^2 + \gamma^2) \Delta_-(\alpha) e^{-i\alpha a} &= \gamma^2 \alpha^{-1} \sin a \end{aligned} \quad (2.2)$$

относительно неизвестных функций

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm}(\alpha) &= 1/2[\Phi_{\pm}(\alpha, 1) + \Phi_{\pm}(\alpha, -1)] \\ \Lambda_{\pm}(\alpha) &= 1/2[\Phi_{\pm}(\alpha, 1) - \Phi_{\pm}(\alpha, -1)] \\ R_0(\alpha) &= 1/2[\Phi'_0(\alpha, 1) + \Phi'_0(\alpha, -1)] - 1/2\beta e^{i\alpha a}[u_k(a+0, 1) + \\ &+ u_k(a+0, -1) + 1/2\beta e^{-i\alpha a}[u_k(-a-0, +1) + u_k(-a-0, -1)], \\ S_0(\alpha) &= 1/2[\Phi'_0(\alpha, 1) - \Phi'_0(\alpha, -1) - 1/2\beta e^{-i\alpha a}[u_k(a+0, 1) - \\ &- u_k(a+0, -1) + 1/2\beta e^{-i\alpha a}[u_k(-a-0, 1) - u_k(-a-0, -1)] \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{-}(\alpha, z) &= \int_{-\infty}^{-a} u_k(x, z) e^{i\alpha(x+a)} dx, \quad \Phi_0(\alpha, z) = \int_{-a}^a u_k(x, z) e^{i\alpha x} dx \\ \Phi_{+}(\alpha, z) &= \int_a^{\infty} u_k(x, z) e^{i\alpha(x-a)} dx \end{aligned}$$

Уравнения (2.2) справедливы в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, причем функции $\Delta_+(\alpha)$ и $\Lambda_+(\alpha)$ регулярны при $\tau > \tau_-$, $\Delta_-(\alpha)$ и $\Lambda_-(\alpha)$ регулярны при $\tau < \tau_+$, а $S_0(\alpha)$ и $R_0(\alpha)$ — целые функции. Функция $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ определяется соотношением (1.9).

Уравнения (2.2) решаются методом [13], обобщенным на случай систем функциональных уравнений. Ввиду громоздкости выкладок решение здесь не приводится. Ограничимся лишь замечанием, что оно с точностью до членов порядка $O(e^{-2\pi a})$ совпадает с приближенным решением, которое можно получить следующим образом.

Решение (1.13), (1.14) для входной зоны легко преобразовать в решение, соответствующее выходной зоне. Для этого достаточно в указанном решении заменить знак на противоположный у параметра Холла и переменной x . Поэтому приближенное решение задачи для канала с конечными электродами длиной $2a$:

для области $|x| > a$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, z) &= H_0 \int_0^z Z_0(z) dz - \frac{u_0^e}{1 + \beta^2} \left[\pm \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n0} K_0^+(i\nu_n)}{\nu_n^2} + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n S_0(i\mu_n) e^{\mu_n(a-|x|)}}{\mu_n K_0^+(i\mu_n)} (\beta \sin \mu_n z \pm \cos \mu_n z) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x_{n0}}{\nu_n} e^{\nu_n(a-|x|)} (\sin \nu_n z \mp \beta \cos \nu_n z) \left. \right] \\ \varphi_k(x, z) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk} \sin \nu_n z}{\nu_n^2 + \lambda_k^2} - \frac{u_k^e}{1 + \beta^2} \left[\frac{\beta S_k(i\alpha_1) e^{\alpha_1(a-|x|)}}{2 \operatorname{sh} \beta \alpha_1 K_k^+(i\alpha_1)} (\operatorname{sh} \beta \alpha_1 z \pm \right. \\ &\pm \operatorname{ch} \beta \alpha_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mu_n S_k(it_{nk}) e^{t_{nk}(a-|x|)}}{t_{nk} K_k^+(it_{nk}) (t_{nk}^2 - \alpha_1^2)} (\beta t_{nk} \sin \mu_n z \pm \cos \mu_n z) - \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu_n x_{nk} e^{s_{nk}(a-|x|)}}{s_{nk} (s_{nk}^2 - \alpha_1^2)} (\nu_n \sin \nu_n z \mp \beta s_{nk} \cos \nu_n z) \left. \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

(здесь верхний знак соответствует области $x < -a$)
для области $|x| < a$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, z) = H_0 \int_0^z Z_0(z) dz - u_0 e \left[z + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2y_{n0} e^{-v_n a} \operatorname{sh} v_n x \cos v_n z - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2R_0(-i\mu_n)}{K_0^+(i\mu_n)} e^{-\mu_n a} \sin \mu_n z \operatorname{ch} \mu_n x \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x, z) = -H_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nk} \sin v_n z}{v_n^2 + \lambda_k^2} - u_k e \left[\frac{\operatorname{sh} \lambda_k z}{\operatorname{sh} \lambda_k} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2y_{nk} v_n}{s_{nk}} e^{-s_{nk} a} \operatorname{sh} s_{nk} x \cos v_n z - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\mu_n R_k(-it_{nk})}{t_{nk} K_k^+(it_{nk})} e^{-t_{nk} a} \operatorname{ch} t_{nk} x \sin \mu_n z \right] \end{aligned}$$

3. Влияние анизотропии проводимости среды на интегральные характеристики трехмерного канала. При вычислении интегральных характеристик канала для определенности ограничимся рассмотрением следующего профиля скорости:

$$v(v_x, 0, 0), \quad v_x(y, z) = \frac{3}{2} \delta u_0 \frac{\operatorname{ch} \delta - \operatorname{ch} \delta y / b}{\delta \operatorname{ch} \delta - \operatorname{sh} \delta} (1 - z^2)$$

Здесь $\delta > 0$ — параметр наполнения профиля, u_0 — средняя по сечению скорость. Положим также, что магнитогидродинамический канал работает в режиме генератора, а протяженность электродной зоны не меньше, чем расстояние между электродами. Таким образом, распределение электростатического потенциала с точностью до членов порядка $O(e^{-2\pi a})$ определяется соотношениями (2.3), (2.4).

Искомые интегральные характеристики: потенциал на электродах φ_e , полный ток и мощность на внешней нагрузке R , а также джоулева диссипация и эффективность (к.п.д.) канала генератора.

Потенциал на электродах выразим через коэффициент нагрузки k следующим образом: $\varphi_e = k u_0 H_0$, а полный ток I , протекающий через электроды во внешнюю цепь, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} I = \int_{-a}^a \int_{-b}^b j_z(x, y, 1) dx dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b j_z(x, y, -1) dx dy = \\ = \frac{4b\sigma u_0 H_0}{1 + \beta^2} (1 - k) \left(a + 0.441 + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{n0}}{v_n} \right) \end{aligned}$$

Здесь плотность тока $j_z(x, y, z)$ определяется из (1.1).

Тогда выражение для мощности N и джоулевой диссипации Q в канале представим в виде

$$N = 2\varphi_e I = \frac{8b\sigma H_0^2 u_0^2}{1 + \beta^2} k (1 - k) \left(a + 0.441 + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{n0}}{v_n} \right)$$

$$Q = \int_D \sigma^{-1} j^2 dD = -N - \int_D [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] \mathbf{v} dD = Q_* + \Delta Q$$

$$\frac{Q_*}{4\sigma^* b H_0^2 u_0^2} = -2 \frac{k^2}{\omega} + 2(1 - k) \left[a - 0.054 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n0}}{v_n^3} (1 - e^{-v_n(L-a)}) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{n0}}{v_n^3} P_2(v_n) \right]$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 + \beta^2}, \quad \omega = 2b\sigma^*R, \quad P_2(v_n) = 0.208v_n^2 - 1.323v_n - 3$$

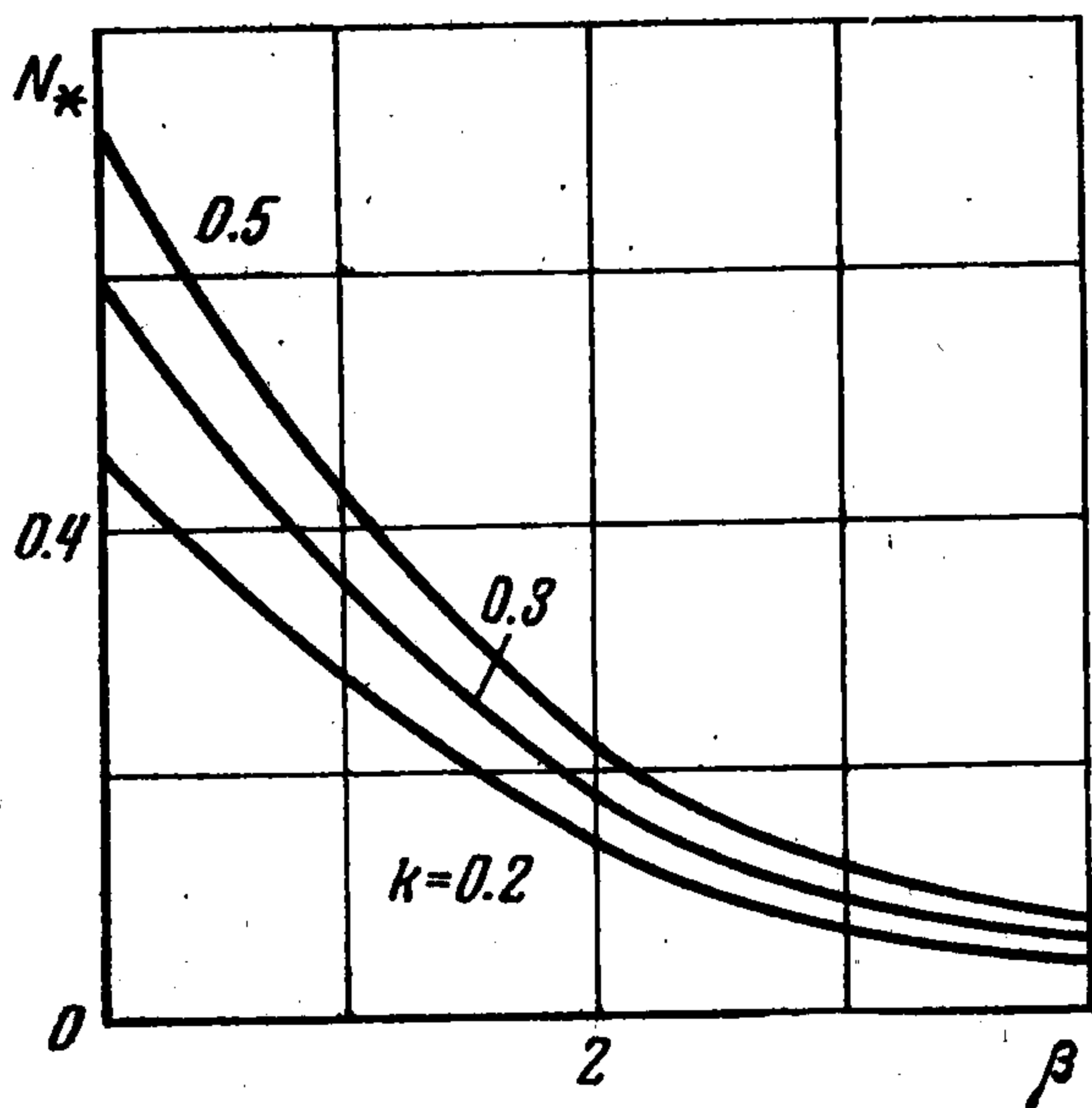
$$\Delta Q = \frac{4\sigma b}{1 + \beta^2} \left\{ \frac{6L}{5\delta} H_0^2 u_0^2 + o(\delta^{-2}) + H_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k^5} (\lambda_k \operatorname{cth} \lambda_k + \operatorname{th} \lambda_k - 2\lambda_k) - \right.$$

$$- H_0^2 L \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{\operatorname{th} \lambda_k - \lambda_k}{\lambda_k^5} \right] + H_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{\lambda_k^2} \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda_k}{\lambda_k \operatorname{ch} \lambda_k} - 1 \right) \times$$

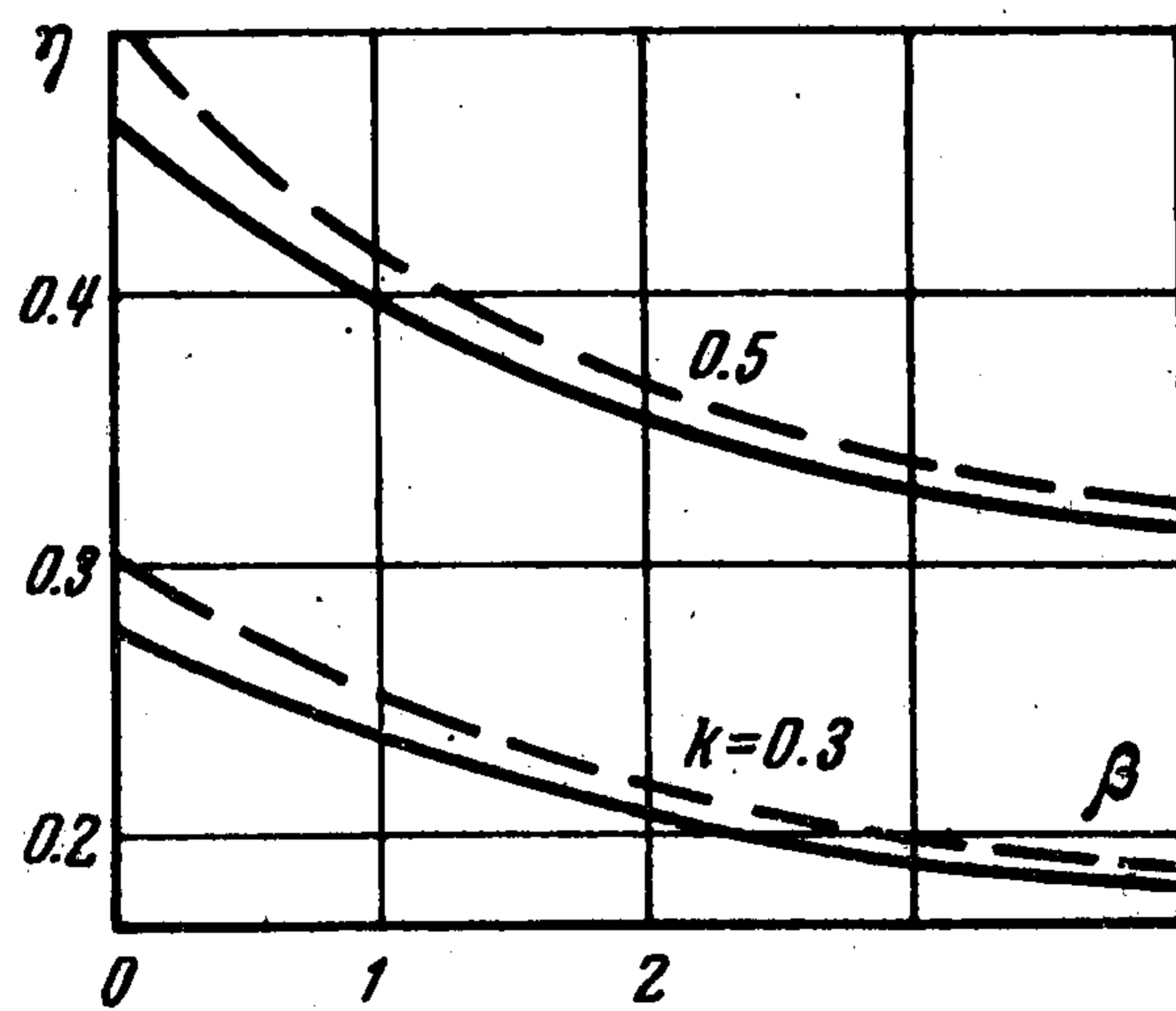
$$\times \left[\frac{i}{\lambda_k^2} \frac{dK_k^-}{d\alpha}(0) K_k^-(0) + \frac{K_k^+(i\lambda_k) - K_k^-(i\lambda_k)}{2\lambda_k^3} K_k^-(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{nk}}{s_{nk}^2 v_n^2} (1 - e^{-(L-a)s_{nk}}) - \right.$$

$$\left. - \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{nk}}{s_{nk} v_n^2} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{nk} K_k^+(is_{nk})}{2\lambda_k^2} \left(\frac{K_k^+(i\lambda_k)}{s_{nk} + \lambda_k} + \frac{K_k^-(i\lambda_k)}{s_{nk} - \lambda_k} - \frac{2K_k^-(0)}{s_{nk}} \right) \right\}$$

Здесь Q_* — джоулевы потери плоского канала ($\delta \rightarrow \infty$), связанные только с продольными краевыми эффектами, $2L$ — длина канала генератора ($L > a$), ΔQ — приращение диссипации за счет как продольных, так и поперечных токов.



Фиг. 1



Фиг. 2

Эффективность (к.п.д.) генератора рассчитывается по формуле

$$\eta = N / (N + Q)$$

На фиг. 1 и 2 представлены зависимости мощности ($N_* = N / (48\sigma H_0^2 U_0^2)$) и к.п.д. канала от параметра Холла для некоторых значений коэффициента нагрузки

n	x_{n0}				n	y_{n0}			
	β					β			
	0.1	1	3	5		0.1	1	3	5
1	1.005	1.367	2.131	2.359	1	0.063	0.467	0.469	0.448
2	0.504	0.831	1.528	1.737	2	0.052	0.400	0.413	0.344
3	0.379	0.683	1.338	1.534	3	0.046	0.362	0.381	0.302
4	0.316	0.605	1.227	1.414	4	0.042	0.336	0.357	0.277
5	0.277	0.553	1.150	1.329	5	0.039	0.316	0.339	0.260
6	0.249	0.515	1.091	1.264	6	0.037	0.300	0.325	0.246
7	0.229	0.485	1.043	1.211	7	0.035	0.287	0.313	0.236
8	0.199	0.461	1.003	1.166	8	0.034	0.276	0.302	0.227
9	0.196	0.440	0.968	1.127	9	0.032	0.267	0.293	0.219
10	0.188	0.423	0.938	1.093	10	0.031	0.258	0.285	0.212

k , причем сплошные линии соответствуют трехмерному каналу при $L = 4a$ и $\delta = 100$, а пунктирные — плоскому.

Решение системы бесконечных уравнений (1.15) приведено в таблице ($k = 0$).

Таким образом, наличие анизотропии проводимости среды отрицательно сказывается на интегральных характеристиках МГД-канала. Как и для плоского канала [10], краевые потери при сплошных электродах значительно увеличиваются при возрастании параметра Холла β .

В заключение автор благодарит Л. П. Чегирина, любезно решившую на ЭВМ бесконечную систему алгебраических уравнений (1.15), и А. А. Каспарьянца за постоянное внимание к работе.

Поступила 10 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff J. A. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, vol. 49, No 1.
2. Уфлянд Я. С. Установившееся течение электропроводной жидкости в прямоугольном канале при наличии поперечного магнитного поля. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 10.
3. Гринберг Г. А. Об установившемся течении проводящей жидкости, находящейся во внешнем магнитном поле прямоугольной трубы с двумя проводящими и двумя непроводящими стенками. Докл. АН СССР, 1961, т. 141, № 2.
4. Регирер С. А. Электрическое поле в магнитогидродинамическом канале прямоугольного сечения с непроводящими стенками. ПМТФ, 1964, № 3.
5. Игнатенко М. М. Электрическое поле в МГД-канале прямоугольного сечения с полубесконечными электродами. Магнитная гидродинамика, 1968, № 1.
6. Кириллов В. Х. Электрическое поле в МГД-канале прямоугольного сечения с конечными электродами. Матер. VI Рижск. совещ. по МГД, ч. 3. Рига. «Зинатне» 1968.
7. Немкова Н. Г. Исследование поперечного и продольного краевых эффектов в магнитогидродинамическом канале прямоугольного сечения. ПМТФ, 1969, № 4.
8. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2.
9. Толмач И. М., Ясницкая Н. Н. Эффект Холла в канале с секционированными электродами. Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт, 1965, № 5.
10. Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М., «Наука», 1970.
11. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
12. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М. — Л., Физматгиз, 1962.
13. Игнатенко М. М., Кириллов В. Х. О решении некоторых задач математической физики. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 7.