Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 534

ОТКЛОНЕНИЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ОТ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ОБЛАСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

У. К. Нигул

(Таллин)

Рассматриваются одномерные переходные волновые процессы, которые при нулевых начальных условиях возбуждены краевым воздействием и описаны квазилинейным волновым уравнением общего вида. На краевое воздействие наложены такие условия, что в начальном этапе процесса существует область непрерывных первых производных. Для последовательного приближения решения квазилинейного уравнения в этой области предлагается процедура, при которой нулевым приближением служит решение линейного однородного волнового уравнения, а следующие приближения вычисляются интегрированием неоднородных волновых уравнений, полученных из исходного квазилинейного уравнения путем аппроксимации нелинейных членов при помощи предыдущего приближения. Рассматривается применение этой процедуры для построения асимптотических приближений и анализируется отклонение нелинейного решения от линейного решения (нулевого приближения) в зависимости от коэффициентов квазилинейного уравнения и характера краевого воздействия.

В качестве иллюстрации рассматриваются геометрически и физически нелинейные одномерные переходные волновые процессы деформации упругого полупространства. Показано, что в частном случае внезапно приложенного воздействия, изменяющегося далее во времени по синусоидальному закону, нелинейные эффекты приводят не только к изменению амплитуды линейного решения, а также к появлению качественно иных высокочастотных компонентов решения.

Процедура приближения, которая в данной работе на примере квазилинейного уравнения второго порядка предложена для построения решения типа бегущей волны, по своей идее в некоторой степени родственна методам возмущений [1]. Отметим, что для построения решения квазилинейного уравнения второго порядка в форме разложения по стоячим волнам процедура последовательного приближения нашла применение в работе [2].

В некоторой степени к данной работе примыкают также исследования [3–5], в которых динамический процесс, моделированный квазилинейной системой уравнений, приближенно описывается в виде суммы двух компонентов, из которых один определяется как решение линейного волнового уравнения, а другой строится в неволновой форме при помощи метода возмущения.

1. Постановка задачи. Пусть ξ — безразмерная координата, τ — безразмерное время, $u(\xi, \tau)$ — искомая функция, ε — малое положительное число, $H(\tau)$ — функция Хевисайда. Пусть штрих обозначает производную по ξ, а точка — производную по τ.

Рассмотрим в области $\xi \geqslant 0$, $\tau \geqslant 0$ интегрирование квазилинейного уравнения

$$u^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) p(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) - u''(\xi, \tau) q(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) = R(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) \qquad (1.1)$$

с коэффициентами

$$p(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) = 1 + P(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau)$$
$$q(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) = 1 + Q(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) \tag{1.2}$$

$$P(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) = a_2 u^{\cdot} + a_1 u' + a_0 u + a_{22}(u^{\cdot})^2 + \\ + a_{21}u^{\cdot}u' + a_{11}(u')^2 + a_{20}u^{\cdot}u + a_{10}u'u + a_{00}u^2 + \ldots \tag{1.3}$$

$$Q(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) = b_2 u^{\cdot} + b_1 u' + b_0 u + b_{22}(u^{\cdot})^2 + b_{21}u^{\cdot}u' + \\ + b_{11}(u')^2 + b_{20}u^{\cdot}u + b_{10}u'u + b_{00}u^2 + \ldots \tag{1.4}$$

$$R(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) = c_{22}(u^{\cdot})^2 + c_{21}u^{\cdot}u' + c_{11}(u')^2 + c_{20}u^{\cdot}u + \\ + c_{10}u'u + c_{00}u^2 + c_{222}(u^{\cdot})^3 + c_{221}(u^{\cdot})^2u' + c_{211}u^{\cdot}(u')^2 + \\ + c_{111}(u')^3 + c_{220}(u^{\cdot})^2u + c_{200}u^{\cdot}u^2 + c_{110}(u')^2u + \\ + c_{100}u'u^2 + c_{210}u^{\cdot}u'u + c_{000}u^3 + \ldots \tag{1.5}$$

Здесь $a_i, a_{ij}, \ldots, b_i, b_{ij}, \ldots, c_{ij}, c_{ijh}, \ldots$ — непрерывные функции от ξ и τ, которые приобретают конечные значения. При этом число индексов 0 показывает степень $u(\xi, \tau)$, число индексов 1 — степень $u'(\xi, \tau)$ и число индексов 2 — степень $u^{\cdot}(\xi, \tau)$ в члене за данным коэффициентом.

Задаем начальные условия

$$u(\xi, 0) = 0, \qquad u^{\cdot}(\xi, 0) = 0 \tag{1.6}$$

одно из следующих краевых условий:

$$u'(0, \tau) = \varepsilon\Psi(\tau)H(\tau), \qquad \text{(задача } A) \tag{1.7}$$

$$u^{\cdot}(0, \tau) = -\varepsilon\Psi(\tau)H(\tau) \qquad \text{(задача } Б) \tag{1.8}$$

и условие затухания в бесконечности

$$u(\infty, \tau) = 0 \tag{1.9}$$

Если при $\xi = 0$ была бы заданной функция $u(0, \tau)$, то дифференцированием $u(0, \tau)$ по τ задача может быть сведена к случаю (1.8).

Потребуем, чтобы задаваемая функция $\Psi(\tau)$ имела при $\tau \geqslant 0$ конечные непрерывные производные всех порядков, встречающихся в дальнейших рассуждениях, и удовлетворяла условиям

$$\Psi(0) = 0, \qquad \max|\Psi(\tau)| \leqslant 1 \quad \text{при } \tau > 0 \tag{1.10}$$

Легко убедиться в том, что при принятой постановке задачи в зависимости от коэффициентов представлений (1.3) — (1.5) и от свойств функции $\Psi(\tau)$ либо при любых $\xi \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$, либо в некотором конечном интервале времени $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 = \text{const}$, $0 \leqslant \xi \leqslant \tau$, выполняются условия

$$p(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) > 0, \qquad q(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau) > 0 \tag{1.11}$$

и уравнение (1.1), будучи гиперболическим, имеет решение типа бегущей волны. При этом либо при любых $\xi \geqslant 0$ и $\tau \geqslant 0$, либо на некотором начальном этапе $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 = \text{const}$ волнового процесса $u^{\cdot}(\xi, \tau)$, $u'(\xi, \tau)$ и $u(\xi, \tau)$ — непрерывные функции. Отметим, что $u^{\cdot}(\xi, \tau)$ и $u'(\xi, \tau)$ становятся разрывными при конечном значении времени $\tau = \tau_0$ в том случае, если коэффициенты представлений (1.3) — (1.5) и функция $\Psi(\tau)$ таковы, что при $\tau = \tau_0$ возникает ударная волна [6–9].

К интегрированию частных видов уравнения (1.1) с коэффициентами типа (1.2) — (1.5) приводит ряд нелинейных задач механики и акустики. Например, к частному случаю $P = 0$, $R = 0$ и $Q = Q(u')$ с постоянными коэффициентами b_i, b_{ij}, . . . приводит нелинейная постановка задач об одномерных переходных волновых процессах деформации упругого полупространства [6–9] и упругих стержней [10, 11]. Этот частный случай рассмотрен в п. 5 и 6.

2. Процедура последовательного приближения. Рассмотрим последовательное приближение волнового решения уравнения (1.1) при малых значениях τ в области непрерывных $u^{\cdot}(\xi, \tau)$, $u'(\xi, \tau)$ и $u(\xi, \tau)$ с помощью процедуры, по которой нулевое приближение ($j = 0$) определяется интегрированием линейного однородного уравнения

$$u_0^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) - u_0''(\xi, \tau) = 0 \tag{2.1}$$

а следующие приближения ($j = 1, 2, \ldots$) — интегрированием линейных неоднородных уравнений

$$u_j^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) - u_j''(\xi, \tau) = G_j(\xi, \tau) \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

где

$$G_j(\xi, \tau) = -\ddot{u}_{j-1}(\xi, \tau) P(\dot{u}_{j-1}, u'_{j-1}, u_{j-1}; \xi, \tau) +$$
$$+ u''_{j-1}(\xi, \tau) Q(\dot{u}_{j-1}, u'_{j-1}, u_{j-1}; \xi, \tau) + R(\dot{u}_{j-1}, u'_{j-1}, u_{j-1}; \xi, \tau) \tag{2.3}$$

Нулевое приближение решения задачи A, т. е. решение линейного волнового уравнения (2.1) при граничных условиях (1.6), (1.7), (1.9), и нулевое приближение решения задачи $Б$, т. е. решение линейного волнового уравнения (2.1) при граничных условиях (1.6), (1.8), (1.9), одинаковы и могут быть представлены в следующем виде:

$$u_0(\xi, \tau) = \int_0^\tau u_0^{\cdot}(\xi, t)\, dt = -\varepsilon \Psi_1(\tau - \xi) H(\tau - \xi) \tag{2.4}$$

$$u_0'(\xi, \tau) = -u_0^{\cdot}(\xi, \tau) = \varepsilon \Psi(\tau - \xi) H(\tau - \xi) \tag{2.5}$$

$$u_0''(\xi, \tau) = u_0^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) = -\varepsilon \Psi^{\cdot}(\tau - \xi) H(\tau - \xi) \tag{2.6}$$

Здесь и далее

$$\Psi_1(\tau - \xi) = \int_0^{\tau - \xi} \Psi(z)\, dz \tag{2.7}$$

Можно убедиться в том, что в области непрерывных $u^{\cdot}(\xi, \tau)$, $u'(\xi, \tau)$ и $u(\xi, \tau)$ при вычислении следующих приближений $j = 1, 2, 3, \ldots$ правые части уравнений (2.2) имеют структуру

$$G_j(\xi, \tau) = g_j(\xi, \tau) H(\tau - \xi) \tag{2.8}$$

где $g_j(\xi, \tau)$ — непрерывные функции при $\tau \geqslant \xi$.

Итак, вычисление приближений $j = 1, 2, 3, \ldots$ сводится к интегрированию неоднородных линейных волновых уравнений

$$u_j^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) - u_j''(\xi, \tau) = g_j(\xi, \tau)\, H(\tau - \xi) \tag{2.9}$$

При помощи преобразования Лапласа с применением методики работы [12] можно показать, что точное решение уравнения (2.9) в случае задач A и $Б$ может быть представлено в виде

$$u_j(\xi, \tau) = \int_0^\tau u_j^{\cdot}(\xi, t)\, dt \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} u_j'(\xi, \tau) &= \varepsilon\Psi(\tau - \xi)\, H(\tau - \xi) - {}^1/_2 TF_{1j}(\xi, \tau) - {}^1/_2 F_{2j}(\xi, \tau) + {}^1/_2 F_{3j}(\xi, \tau) \\ u_j^{\cdot}(\xi, \tau) &= -\varepsilon\Psi(\tau - \xi)\, H(\tau - \xi) + {}^1/_2 TF_{1j}(\xi, \tau) + {}^1/_2 F_{2j}(\xi, \tau) + {}^1/_2 F_{3j}(\xi, \tau) \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} u_j''(\xi, \tau) = &\left\{-\varepsilon\Psi^{\cdot}(\tau - \xi) - g_j(\xi, \tau) + \frac{1}{4} Tg_j\left(\frac{\tau-\xi}{2}, \frac{\tau-\xi}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} g_j\left(\frac{\tau+\xi}{2}, \frac{\tau+\xi}{2}\right)\right\} H(\tau - \xi) + \\ &+ \frac{1}{2} TF_{1j}^*(\xi, \tau) + \frac{1}{2} F_{2j}^*(\xi, \tau) + \frac{1}{2} F_{3j}^*(\xi, \tau) \\ u_j^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) = &\; u_j''(\xi, \tau) + g_j(\xi, \tau)\, H(\tau - \xi) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Здесь $T = 1$ в случае задачи A и $T = -1$ в случае задачи $Б$.

В (2.11) и (2.12) использованы обозначения (2.13) и (2.14) соответственно

$$\begin{aligned} F_{1j}(\xi, \tau) &= H(\tau - \xi) \int_0^{(\tau-\xi)/2} g_j(x, y_1)\, dx, \quad y_1 = \tau - \xi - x \\ F_{2j}(\xi, \tau) &= H(\tau - \xi) \int_0^{\xi} g_j(x, y_2)\, dx, \quad y_2 = \tau - \xi + x \\ F_{3j}(\xi, \tau) &= H(\tau - \xi) \int_\xi^{(\tau+\xi)/2} g_j(x, y_3)\, dx, \quad y_3 = \tau + \xi - x \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} F_{1j}^*(\xi, \tau) &= H(\tau - \xi) \int_0^{(\tau-\xi)/2} g_j^{\cdot}(x, y_1)\, dx, \quad y_1 = \tau - \xi - x \\ F_{2j}^*(\xi, \tau) &= H(\tau - \xi) \int_0^{\xi} g_j^{\cdot}(x, y_2)\, dx, \quad y_2 = \tau - \xi + x \\ F_{3j}^*(\xi, \tau) &= H(\tau - \xi) \int_\xi^{(\tau+\xi)/2} g_j^{\cdot}(x, y_3)\, dx, \quad y_3 = \tau + \xi - x \end{aligned} \tag{2.14}$$

При конкретно заданной функции $\Psi(\tau)$ и коэффициентах $a_i, a_{ij}, \ldots$ $\ldots, b_i, b_{ij}, \ldots, c_{ij}, c_{ijh}, \ldots$ путем аналитического или численного вычисления интегралов, входящих в формулы (2.13) и (2.14), может быть найдено нескольких первых приближений ($j = 1, 2, \ldots$) волнового решения квазилинейного уравнения (1.1) при граничных условиях задач A и $Б$.

По этим приближениям можно установить, как по мере роста времени решение уравнения (1.1) отклоняется от решения линейного уравнения (2.1).

Сформулированная процедура приближения может найти применение также в случае функций $P(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau)$, $Q(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau)$ и $R(u^{\cdot}, u', u; \xi, \tau)$, которые отличаются от (1.3) — (1.5), но при достаточно малых значениях τ удовлетворяют условиям

$$|P| < 1, \qquad |Q| < 1$$
$$|R| < |u^{\cdot\cdot}(\xi, \tau)|, \qquad |R| < |u''(\xi, \tau)|$$

3. Реализация процедуры в форме асимптотического приближения. Описанная процедура приближения может быть использована для построения асимптотических при $\varepsilon \to 0$ приближений. Для этого следует вычислить $g_1(\xi, \tau)$ с точностью до членов с множителем ε^2, $g_2(\xi, \tau)$ — с точностью до членов с множителями ε^2, ε^3 и т. д. При такой точности вычисления функции $g_j(\xi, \tau)$ имеют структуру

$$g_j(\xi, \tau) = \varepsilon \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i g_i^*(\xi, \tau) \tag{3.1}$$

причем $g_i^*(\xi, \tau)$ не зависят от ε.

Асимптотические приближения искомых функций $u_j(\xi, \tau)$ и их производных подлежат вычислению по общим формулам (2.10) — (2.14). При такой реализации процедуры j-е приближение имеет структуру

$$u_j(\xi, \tau) = \varepsilon H(\tau - \xi) \sum_{i=0}^{j} \varepsilon^i v_i(\xi, \tau) \tag{3.2}$$

где $v_i(\xi, \tau)$ не зависит от ε.

Ввиду того, что функции (1.3) — (1.5) представляют собой полиномы от $u^{\cdot}(\xi, \tau)$, $u'(\xi, \tau)$ и $u(\xi, \tau)$, реализация предложенной процедуры приближения в форме построения асимптотических при $\varepsilon \to 0$ приближений дает решение в виде суммы (3.2), которая по структуре аналогична исходному предположению, используемому при применении метода возмущения [1]. Однако, насколько известно автору, переходные волновые процессы, рассматриваемые в данной работе, методом возмущения не исследованы.

Отметим, что с точностью представления (3.1) функция $g_1(\xi, \tau)$ и соответственно также первое асимптотическое приближение $u_1(\xi, \tau)$ определены функцией $\Psi(\tau)$ и коэффициентами a_i, b_i, c_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$ представлений (1.3) — (1.5). Второе асимптотическое приближение $u_2(\xi, \tau)$ зависит от $\Psi(\tau)$ и от коэффициентов a_i, a_{ij}, b_i, b_{ij}, c_{ij}, c_{ijh} $(i, j, h = 0, 1, 2)$ представлений (1.3) — (1.5). По аналогии можно указать, от каких коэффициентов представлений (1.3) — (1.5) зависят следующие асимптотические приближения.

Рассмотрим далее случай постоянных коэффициентов представлений (1.3) — (1.5) и дадим для этого случая развернутые формулы двух первых асимптотических приближений.

Из излагаемого ниже видно, что в указанном случае функции $v_i(\xi, \tau)$ в (3.2) имеют структуру

$$v_i(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{i} \xi^k \eta_{ik}(\tau - \xi) \tag{3.3}$$

и в j-м приближении асимптотические при $\varepsilon \to 0$ решения задач A и $Б$ могут быть представлены в форме

$$
\begin{aligned}
u_j(\xi, \tau) &= u_0(\tau-\xi) + H(\tau-\xi)\,\varepsilon \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \xi^k \eta_{ik}(\tau-\xi) \\
u_j'(\xi, \tau) &= u_0'(\tau-\xi) + H(\tau-\xi)\,\varepsilon \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \xi^k \eta_{\xi ik}(\tau-\xi) \\
u_j^{\cdot}(\xi, \tau) &= u_0^{\cdot}(\tau-\xi) + H(\tau-\xi)\,\varepsilon \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \xi^k \eta_{\tau ik}(\tau-\xi) \\
u_j''(\xi, \tau) &= u_0''(\tau-\xi) + H(\tau-\xi)\,\varepsilon \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \xi^k \eta_{\xi\xi ik}(\tau-\xi) \qquad (3.4)\\
u_j^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) &= u_0^{\cdot\cdot}(\tau-\xi) + H(\tau-\xi)\,\varepsilon \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \sum_{k=0}^{i} \xi^k \eta_{\tau\tau ik}(\tau-\xi)
\end{aligned}
$$

Здесь η_{ik}, $\eta_{\xi ik}$, $\eta_{\tau ik}$, $\eta_{\xi\xi ik}$ и $\eta_{\tau\tau ik}$ — функции, которые зависят от ξ и τ только через разность $\tau - \xi$. Однако вид этих функций для задач A и $Б$ различен и определяется функцией $\Psi(\tau)$ и коэффициентами представлений (1.3)—(1.5).

Первое асимптотическое приближение в случае постоянных коэффициентов представлений (1.3)—(1.5). Выполняя расчет при $j = 1$ на основании формул (1.3)—(1.5) и (2.3)—(2.8), имеем асимптотическое приближение

$$
g_1(\xi, \tau) = g_{10}(\tau - \xi), \qquad g_{10}(\tau - \xi) = \varepsilon^2 w_1(\tau - \xi) \qquad (3.5)
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
w_1(\tau-\xi) = {} & (A_1 - A_2)\,\Psi^{\cdot}(\tau-\xi)\,\Psi(\tau-\xi) - A_0\Psi^{\cdot}(\tau-\xi)\Psi_1(\tau-\xi) + \\
& + C_2\Psi^2(\tau-\xi) + C_1\Psi(\tau-\xi)\Psi_1(\tau-\xi) + C_0\Psi_1^2(\tau-\xi) \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 &= a_2 - b_2, \quad A_1 = a_1 - b_1, \quad A_0 = a_0 - b_0 \\
C_2 &= c_{22} - c_{21} + c_{11}, \quad C_1 = c_{20} - c_{10}, \quad C_0 = c_{00} \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

и использовано определение (2.7)

Благодаря тому, что в рассматриваемом случае $g_1(\xi, \tau) = g_{10}(\tau - \xi)$ и $g_{10}(0) = 0$, общие формулы (2.11) и (2.12) упрощаются в формулы (3.8) и (3.9) соответственно

$$
u_1'(\xi, \tau) = \left\{\varepsilon\Psi(\tau-\xi) + \frac{1}{4}(1 - T)\int_0^{\tau-\xi} g_{10}(z)\,dz - \frac{1}{2}\xi g_{10}(\tau-\xi)\right\} H(\tau-\xi)
$$

$$
\begin{aligned}
u_1^{\cdot}(\xi, \tau) = {} & \left\{-\varepsilon\Psi(\tau-\xi) + \frac{1}{4}(1 + T)\int_0^{\tau-\xi} g_{10}(z)\,dz + \right. \qquad (3.8)\\
& \left. + \frac{1}{2}\xi g_{10}(\tau-\xi)\right\} H(\tau-\xi)
\end{aligned}
$$

$$u_1''(\xi, \tau) = \{-\varepsilon\Psi^{\cdot}(\tau-\xi) + {}^1/_4\,(T-3)\,g_{10}(\tau-\xi) + \\ + {}^1/_2\,\xi\,g_{10}^{\cdot}(\tau-\xi)\}\,H(\tau-\xi) \tag{3.9}$$
$$u_1^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) = u_1''(\xi, \tau) + g_{10}(\tau-\xi)\,H(\tau-\xi)$$

Подставляя (3.5), (3.6) в (3.8) и (3.9), получим формулы вида (3.4), где в данном случае $j = 1$ и в правых частях первые члены представляют собой линейное решение (2.4) — (2.6), а вторые члены определены через функции

$$\eta_{10}(\tau-\xi) = \frac{1}{4}(1+T)\int_0^{\tau-\xi} dz \int_0^z w_1(l)\,dl, \qquad \eta_{11}(\tau-\xi) = \frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi} w_1(z)\,dz$$

$$\eta_{\xi 10}(\tau-\xi) = \frac{1}{4}(1-T)\int_0^{\tau-\xi} w_1(z)\,dz, \qquad \eta_{\xi 11}(\tau-\xi) = -\frac{1}{2}w_1(\tau-\xi)$$

$$\eta_{\tau 10}(\tau-\xi) = \frac{1}{4}(1+T)\int_0^{\tau-\xi} w_1(z)\,dz, \qquad \eta_{\tau 11}(\tau-\xi) = \frac{1}{2}w_1(\tau-\xi)$$

$$\eta_{\xi\xi 10}(\tau-\xi) = {}^1/_4\,(T-3)\,w_1(\tau-\xi), \qquad \eta_{\xi\xi 11}(\tau-\xi) = {}^1/_2\,w_1^{\cdot}(\tau-\xi)$$
$$\eta_{\tau\tau 10}(\tau-\xi) = {}^1/_4\,(T+1)\,w_1(\tau-\xi), \qquad \eta_{\tau\tau 11}(\tau-\xi) = {}^1/_2\,w_1^{\cdot}(\tau-\xi) \tag{3.10}$$

Итак, если задана функция $\Psi(\tau)$ и численные значения коэффициентов a_i, b_i, c_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$, то задача вычисления первого асимптотического приближения состоит в последовательном применении формул (3.4), (2.4)—(2.6) и (3.10).

Второе асимптотическое приближение при постоянных коэффициентах представлений (1.3)—(1.5). Подставляя первое асимптотическое приближение в (1.3)—(1.5) и используя (2.3) и (2.8), имеем асимптотическое приближение

$$g_2(\xi, \tau) = g_{20}(\tau-\xi) + \xi g_{21}(\tau-\xi) \tag{3.11}$$

Здесь

$$g_{20}(\tau-\xi) = \varepsilon^2 w_1(\tau-\xi) + \varepsilon^3 w_2(\tau-\xi), \quad g_{21}(\tau-\xi) = \varepsilon^2 f_2(\tau-\xi) \tag{3.12}$$

В (3.11) функция $w_1(\tau-\xi)$ определена формулой (3.6), а функции $w_2(\tau-\xi)$ и $f_2(\tau-\xi)$ имеют следующие значения:

$$w_2(\tau-\xi) = \Psi^{\cdot}(\tau-\xi)\Big\{B_2\int_0^{\tau-\xi} w_1(z)\,dz + B_0\int_0^{\tau-\xi} dz\int_0^z w_1(l)\,dl +$$
$$+ A_{12}\Psi^2(\tau-\xi) + A_{11}\Psi(\tau-\xi)\Psi_1(\tau-\xi) + A_{10}\Psi_1^2(\tau-\xi)\Big\} + w_1(\tau -$$
$$-\xi)\{B_1\Psi(\tau-\xi) + (B_0+b_0)\Psi_1(\tau-\xi)\} - \Big[C_2{}^*\Psi(\tau -$$
$$-\xi) + C_1{}^*\Psi_1(\tau-\xi)\Big]\int_0^{\tau-\xi} w_1(z)\,dz - \frac{1}{2}(1+T)\Big[\frac{1}{2}\,C_1\Psi(\tau-\xi) + C_2\Psi_1(\tau -$$

$$-\xi)\Big]\int_0^{\tau-\xi}dz\int_0^z w_1(l)\,dl - C_{13}\Psi^3(\tau-\xi) - C_{12}\Psi^2(\tau-\xi)\Psi_1(\tau-\xi) - C_{11}\Psi(\tau-\xi)\times$$

$$\times\Psi_1^2(\tau-\xi) - C_{10}\Psi_1^3(\tau-\xi) \qquad (3.13)$$

$$f_2(\tau-\xi) = \frac{1}{2}\Psi^{\bullet}(\tau-\xi)\Big\{(A_2-A_1)w_1(\tau-\xi) + A_0\int_0^{\tau-\xi}w_1(z)\,dz\Big\} +$$

$$+\frac{1}{2}w_1^{\bullet}(\tau-\xi)\{(A_2-A_1)\Psi(\tau-\xi) + A_0\Psi_1(\tau-\xi)\} -$$

$$-w_1(\tau-\xi)\Big\{C_2\Psi(\tau-\xi) + \frac{1}{2}C_1\Psi(\tau-\xi)\Big\} - \Big[\frac{1}{2}C_1\Psi(\tau-\xi) +$$

$$+C_0\Psi_1(\tau-\xi)\Big]\int_0^{\tau-\xi}w_1(z)\,dz$$

В (3.13) дополнительно к (3.7) использованы еще следующие краткие обозначения постоянных:

$$A_{12} = a_{22} - b_{22} - a_{21} + b_{21} + a_{11} - b_{11}$$

$$A_{11} = a_{20} - b_{20} - a_{10} + b_{10},\quad A_{10} = a_{00} - b_{00}$$

$$B_2 = {}^1/_4\,(1+T)A_2 + {}^1/_4\,(1-T)\,A_1$$

$$B_1 = {}^1/_4\,(1+T)\,(A_2-A_1) + b_2 - b_1,\quad B_0 = {}^1/_4\,(1+T)\,A_0$$

$$C_{13} = c_{222} - c_{221} + c_{211} - c_{111},\quad C_{12} = c_{220} - c_{210} + c_{110}$$

$$C_{11} = c_{200} - c_{100},\quad C_{10} = c_{00},\quad C_1^* = {}^1/_4\,(1+T)c_{20} + {}^1/_4\,(1-T)c_{10}$$

$$C_2^* = {}^1/_2\,(1+T)c_{22} - {}^1/_2\,Tc_{21} + {}^1/_2\,(T-1)c_{11}$$

В рассматриваемом частном случае функции $g_2(\xi,\tau)$ вида (3.11), обладающего свойством $g_{20}(0)=0$, $f_2(0)=0$, общие формулы (2.11) могут быть приведены к форме

$$u_2'(\xi,\tau) = \varepsilon\Psi(\tau-\varepsilon)H(\tau-\xi) + \frac{1}{4}(1-T)H(\tau-\xi)\Big\{\int_0^{\tau-\xi}g_{20}(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi}dz\int_0^z g_{21}(l)\,dl - \frac{1}{2}\xi H(\tau-\xi)\Big\{g_{20}(\tau-\xi) - \frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi}g_{21}(z)\,dz\Big\} -$$

$$-\frac{1}{4}\xi^2 g_{21}(\tau-\xi)H(\tau-\xi)$$

$$u_2^{\bullet}(\xi,\tau) = -\varepsilon\Psi(\tau-\xi)H(\tau-\xi) + \frac{1}{4}(1+T)H(\tau-\xi)\Big\{\int_0^{\tau-\xi}g_{20}(z)\,dz +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi}dz\int_0^z g_{21}(l)\,dl\Big\} + \frac{1}{2}\xi H(\tau-\xi)\Big\{g_{20}(\tau-\xi) + \frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi}g_{21}(z)\,dz\Big\} +$$

$$+\frac{1}{4}\xi^2 g_{21}(\tau-\xi)H(\tau-\xi)$$

Аналогичным образом могут быть модифицированы формулы (2.12). Подставлением (3.12) далее легко представить решение в форме (3.4), где в данном случае $j = 2$ и в правую часть входят функции (3.10), а также следующие функции:

$$\eta_{2k}(\tau - \xi) = \int_0^{\tau-\xi} \eta_{\tau 2k}(z)\,dz \qquad (k = 0, 1, 2)$$

$$\eta_{\xi 20}(\tau - \xi) = \frac{1}{4}(1 - T)\left\{\int_0^{\tau-\xi} w_2(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi} dz \int_0^z f_2(l)\,dl\right\}$$

$$\eta_{\xi 21}(\tau - \xi) = -\frac{1}{2} w_2(\tau - \xi) + \frac{1}{4}\int_0^{\tau-\xi} f_2(z)\,dz, \quad \eta_{\xi 22}(\tau - \xi) = -\frac{1}{4} f_2(\tau - \xi)$$

$$\eta_{\tau 20}(\tau - \xi) = \frac{1}{4}(1 + T)\left\{\int_0^{\tau-\xi} w_2(z)\,dz + \frac{1}{2}\int_0^{\tau-\xi} dz \int_0^z f_2(l)\,dl\right\}$$

$$\eta_{\tau 21}(\tau - \xi) = \frac{1}{2} w_2(\tau - \xi) + \frac{1}{4}\int_0^{\tau-\xi} f_2(z)\,dz, \quad \eta_{\tau 22}(\tau - \xi) = \frac{1}{4} f_2(\tau - \xi)$$

$$\eta_{\xi\xi 20}(\tau - \xi) = \frac{1}{4}(T - 3)\, w_2(\tau - \xi) + \frac{1}{8}(1 + T)\int_0^{\tau-\xi} f_2(z)\,dz$$

$$\eta_{\xi\xi 21}(\tau - \xi) = {}^1/_2 w_2^{\cdot}(\tau - \xi) - {}^3/_4 f_2(\tau - \xi), \quad \eta_{\xi\xi 22}(\tau - \xi) = {}^1/_4 f_2^{\cdot}(\tau - \xi)$$

$$\eta_{\tau\tau 20}(\tau - \xi) = \frac{1}{4}(1 + T)\, w_2(\tau - \xi) + \frac{1}{8}(1 + T)\int_0^{\tau-\xi} f_2(z)\,dz$$

$$\eta_{\tau\tau 21}(\tau - \xi) = {}^1/_2 w_2^{\cdot}(\tau - \xi) + {}^1/_4 f_2(\tau - \xi), \quad \eta_{\tau\tau 22}(\tau - \xi) = {}^1/_4 f_2^{\cdot}(\tau - \xi)$$

Второе асимптотическое приближение, как и первое, точно удовлетворяет граничным условиям (1.6), (1.7), (1.9) задачи A при $T = 1$ и граничным условиям (1.6), (1.8), (1.9) задачи $Б$ при $T = -1$.

С ростом τ растет возмущенная область $0 \leqslant \xi \leqslant \tau$. Изложенные формулы показывают, как при этом решение квазилинейного уравнения (1.1) отклоняется от решения линейного уравнения (2.1) в области непрерывных $u^{\cdot}(\xi, \tau)$, $u'(\xi, \tau)$ и $u(\xi, \tau)$.

4. Отклонение нелинейного решения от линейного в самом начале волнового процесса и в прифронтовой области. На основании предположений, принятых в п. 1, функция $\Psi(\tau)$ допускает при $\tau \to 0$ представление

$$\Psi(\tau) = \tau\Psi^{\cdot}(0) + {}^1/_2\tau^2\Psi^{\cdot\cdot}(0) + {}^1/_6\,\tau^3\Psi^{\cdot\cdot\cdot}(0) + \ldots \tag{4.1}$$

где $\Psi^{\cdot}(0)$, $\Psi^{\cdot\cdot}(0)$, ... — конечные числа.

Рассмотрим опять случай постоянных коэффициентов представлений (1.3)—(1.5). Используя (4.1) при малых τ, вычислим производные и интегралы от $\Psi(\tau - \xi)$, входящие в формулы п. 3, и построим j-е асимптотическое приближение в форме

$$u_j(\xi, \tau) = -\{{}^1/_2(\tau - \xi)^2\varepsilon\Psi^{\cdot}(0)\,[1 + \vartheta_{j1}(\xi, \tau)] +$$
$$+ {}^1/_6(\tau - \xi)^3\,\varepsilon\Psi^{\cdot\cdot}(0)\,[1 + \vartheta_{j2}(\xi, \tau)] + \ldots\}H(\tau - \xi) \tag{4.2}$$

В случае нулевого приближения $j = 0$

$$\vartheta_{0k} = 0 \quad (k = 1,2,3,\ldots) \tag{4.3}$$

и представление (4.2) превращается в разложение линейного решения (2.4), а с точностью следующих асимптотических приближений $j = 1, 2, 3, \ldots$

$$\vartheta_{jk}(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \sum_{l=0}^{i} (\tau - \xi)^{i-l} \xi^l M_{kil}(\tau - \xi) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.4}$$

Здесь $M_{kil}(\tau - \xi)$ — полиномы из $(\tau - \xi)^{k-1}$, $(\tau - \xi)^k$, $(\tau - \xi)^{k+1}, \ldots$, которые при $(\tau - \xi) \to 0$ стремятся к конечным пределам

$$\lim_{(\tau-\xi)\to 0} M_{kil}(\tau - \xi) = N_{kil}, \qquad N_{kil} = \begin{cases} \text{const} & \text{при } k = 1 \\ 0 & \text{при } k \geqslant 2 \end{cases} \tag{4.5}$$

Численные значения коэффициентов полиномов $M_{kil}(\tau - \xi)$, в том числе и значения N_{1il}, определены значениями коэффициентов представлений (1.3)—(1.5) и величин

$$\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \Psi^{\cdot}(\tau)\big|_{\tau=0}, \quad n = k,\ n = k + 1,\ n = k + 2, \ldots$$

Отметим, что

$$N_{110} = -{}^1/_{12}\,(1 + T)\,(A_1 - A_2)\Psi^{\cdot}(0), \quad N_{111} = -{}^1/_2\,(A_1 - A_2)\Psi^{\cdot}(0) \tag{4.6}$$

При $\tau \to 0$, т. е. в самом начале волнового процесса, в возмущенной области $0 \leqslant \xi \leqslant \tau$ также $\xi \to 0$ и при любых j и k величины $\vartheta_{jk}(\xi, \tau)$ стремятся к нулю.

Следовательно, в случае рассматриваемых задач при достаточно малых значениях времени τ решение квазилинейного волнового уравнения (1.1) является сколь угодно близким к решению линейного волнового уравнения (2.1).

Рассмотрим теперь отклонение решения уравнения (1.1) от решения уравнения (2.1) в прифронтовой области, где разница $\tau - \xi$ — малая величина.

На основе (4.2)—(4.5) при $(\tau - \xi) \to 0$ имеем

$$u_j(\xi, \tau) \sim -{}^1/_2\,(\tau - \xi)^2 \varepsilon \Psi^{\cdot}(0)[1 + \vartheta_j(\xi) + O(\tau - \xi)]\,H(\tau - \xi) \tag{4.7}$$

При этом

$$\vartheta_0(\xi) = 0 \quad \text{и} \quad \vartheta_j = \sum_{i=1}^{j} \varepsilon^i \xi^i N_{1ii} \quad \text{при } j = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.8}$$

В прифронтовой области ξ растет с ростом τ. Следовательно, при достаточно больших τ величины $\vartheta_j(\xi)$ могут приобрести сколь угодно большие значения. Значит, при достаточно больших значениях времени погрешность нулевого (линейного) приближения может стать в прифронтовой области сколь угодно большой.

На основе (3.7) и (4.6) имеем

$$N_{111} = {}^1/_2\,(a_2 - a_1 - b_2 + b_1)\Psi^{\cdot}(0)$$

Допустим, что N_{111} не равна нулю и $|N_{1ii}| \leqslant (|N_{111}|)^i$. Тогда при достаточно малых τ, при которых в возмущенной области выполняется условие

$${}^1/_2\,|(a_2 - a_1 - b_2 + b_1)\,\varepsilon\xi\,\Psi^{\cdot}(0)| < 1$$

нулевое (линейное) приближение имеет в прифронтовой области асимптотическую погрешность порядка

$$\vartheta_1 \sim {}^1/_2\,\varepsilon\xi\,(a_2 - a_1 - b_2 + b_1)\,\Psi^{\cdot}(0) \qquad (4.9)$$

Из коэффициентов представлений (1.3)—(1.5) в оценку (4.9) входят только a_1, b_1, a_2 и b_2. Следовательно, в рассматриваемом случае в прифронтовой области решение уравнения (1.1) с коэффициентами (1.2)—(1.5) может быть аппроксимировано при помощи решения уравнения

$$u^{\cdot\cdot}(\xi,\tau)\,[1 + a_2 u^{\cdot} + a_1 u'] - u''(\xi,\tau)\,[1 + b_2 u^{\cdot} + b_1 u'] = 0.$$

5. Отклонение нелинейного решения от линейного при одномерных переходных волновых процессах деформации упругого полупространства. Рассмотрим применение изложенного выше метода в случае переходных волновых процессов деформации упругого полупространства, которые в декартовой системе лагранжевых координат зависят от одной координаты X и от времени t. Пусть W — плотность энергии деформации, отнесенная к единице объема в недеформированном состоянии, ρ_0 — плотность в недеформированном состоянии, $U(X, t)$ — перемещение, λ и μ — постоянные Ляме, h — постоянная с размерностью длины.

Примем обозначение

$$c = [(\lambda + 2\mu)\,/\,\rho_0]^{1/2}$$

и введем безразмерные величины по формулам

$$\xi = Xh^{-1}, \quad \tau = cth^{-1}, \quad u = Uh^{-1} \qquad (5.1)$$

Тогда геометрически и физически нелинейный одномерный переходный волновой процесс деформации упругого полупространства описывается уравнением [6–9]

$$u^{\cdot\cdot}(\xi,\tau) - u''(\xi,\tau)\,q(u') = 0 \qquad (5.2)$$

где

$$q(u') = \frac{\partial^2 W(e)}{\partial (u')^2}(\lambda + 2\mu)^{-1}, \qquad e = u' + \frac{1}{2}(u')^2 \qquad (5.3)$$

Обычно функция $W(e)$ строится в виде такого разложения [6–9], при котором $q(u')$ имеет структуру

$$q(u') = 1 + k_1 u'(\xi,\tau) + k_2\,[u'(\xi,\tau)]^2 + \ldots \qquad (5.4)$$

Отметим, что значение коэффициента k_1 определяется постоянными пятиконстантной теории упругости, а уже для вычисления k_2 необходимы более точные сведения о физических свойствах материала.

Уравнение (5.2) с коэффициентом (5.4) представляет собой частный случай уравнения (1.1) с коэффициентами (1.2)—(1.5).

Используя в этом частном случае формулы второго асимптотического приближения, построенные в п. 3, имеем

$$
\begin{aligned}
u_2(\xi, \tau) = \Big\{ & -\varepsilon \int_0^{\tau-\xi} \Psi^{\cdot}(z)\,dz - \varepsilon^2 \Big[\frac{1}{8}(1+T)k_1 \int_0^{\tau-\xi} \Psi^{\cdot 2}(z)\,dz + \\
& + \frac{1}{4}k_1 \xi \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^3 \Big[\frac{1}{12}(1+T)\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - \\
& - k_2\Big) \int_0^{\tau-\xi} \Psi^{\cdot 3}(z)\,dz + \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - k_2\Big)\xi \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) - \\
& - \frac{1}{24}k_1^2 \xi^2 \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2'(\xi, \tau) = \Big\{ & \varepsilon \Psi^{\cdot}(\tau-\xi) + \varepsilon^2 \Big[-\frac{1}{8}(1-T)k_1 \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi) + \\
& + \frac{1}{4}k_1 \xi \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^3 \Big[\frac{1}{12}(1-T)\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - \\
& - k_2\Big) \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) + \Big(\frac{1}{16}(T-3)k_1^2 + \frac{1}{6}k_2\Big)\xi \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) + \\
& + \frac{1}{24}k_1^2 \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2^{\cdot}(\xi, \tau) = \Big\{ & -\varepsilon \Psi^{\cdot}(\tau-\xi) - \varepsilon^2 \Big[\frac{1}{8}(1+T)k_1 \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi) + \\
& + \frac{1}{4}k_1 \xi \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^2 \Big[\frac{1}{12}(1+T)\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - \\
& - k_2\Big) \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) + \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - k_2\Big)\xi \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) - \\
& - \frac{1}{24}k_1^2 \xi^2 \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2''(\xi, \tau) = \Big\{ & -\varepsilon \Psi^{\cdot\cdot}(\tau-\xi) + \varepsilon^2 \Big[\frac{1}{8}(3-T)k_1 \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi) - \\
& - \frac{1}{4}k_1 \xi \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi)\Big] - \varepsilon^2 \Big[\frac{1}{12}(3-T)\Big(\frac{1}{8}(7-3T)k_1^2 - \\
& - k_2\Big) + \frac{1}{48}(1+T)k_1^2\Big] \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) + \varepsilon^2 \xi \Big[\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{8}(7-3T)k_1^2 - \\
& - k_2\Big) + \frac{1}{8}k_1^2\Big] \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) - \varepsilon^3 \xi^2 \Big[\frac{1}{24}k_1^2 \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] + \\
& + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2^{\cdot\cdot}(\xi, \tau) = \Big\{ & -\varepsilon \Psi^{\cdot\cdot}(\tau-\xi) - \varepsilon^3 \Big[\frac{1}{8}(1+T)k_1 \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi) + \\
& + \frac{1}{4}\xi k_1 \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^3 \Big[\frac{1}{12}(1+T)\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - k_2\Big) \frac{\partial}{\partial\tau} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] + \\
& + \varepsilon^3 \xi \Big[\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{8}(5-3T)k_1^2 - k_2\Big) \frac{\partial^2}{\partial\tau^2} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] - \\
& - \varepsilon^3 \xi^2 \Big[\frac{1}{24}k_1^2 \frac{\partial^3}{\partial\tau^3} \Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi)\Big] + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi) \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

Здесь, как и ранее, $T = 1$ в случае задачи A и $T = -1$ в случае задачи $Б$.

В фигурных скобках формул (5.5) члены с множителем ε соответствуют нулевому приближению (линейному решению), а члены с множителями ε^2 и ε^3 соответственно представляют собой поправки, найденные в результате вычисления первого и второго асимптотического приближения. При этом от физических постоянных материала члены с множителем ε^2 зависят через k_1, а члены с множителем ε^3 — через k_1 и k_2. Для вычисления k_1 нужны постоянные пятиконстантной теории упругости, а для вычисления k_2 — постоянные более точной модели материала.

Если выполняются условия

$$\varepsilon | k_1 | \ll 1, \qquad | k_2 | \lesssim k_1^2 \tag{5.6}$$

тогда с асимптотической погрешностью порядка εk_1 формулы (5.5) для вычисления производных могут быть упрощены в следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_2'(\xi,\tau) = -u_2^{\cdot}(\xi,\tau) = \Big\{ \varepsilon\Psi^{\cdot}(\tau-\xi) + \frac{1}{4}k_1\varepsilon^2\xi\frac{\partial}{\partial\tau}\Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi) + \\ + \frac{1}{24}k_1^2\varepsilon^3\xi^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi) \\ u_2''(\xi,\tau) = u_2^{\cdot\cdot}(\xi,\tau) = \Big\{ -\varepsilon\Psi^{\cdot\cdot}(\tau-\xi) - \frac{1}{4}k_1\xi\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\Psi^{\cdot 2}(\tau-\xi) - \\ - \frac{1}{24}k_1^2\varepsilon^3\xi^2\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\Psi^{\cdot 3}(\tau-\xi) + \varepsilon^4(0)\Big\} H(\tau-\xi) \end{aligned} \tag{5.7}$$

С точностью формул (5.7) решения задач A и $Б$ совпадают.

6. **Пример.** Пусть на поверхность $X = 0$ упругого полупространства приложено либо воздействие

$$\partial U(X, t)/\partial t = -\varepsilon c \sin\Omega t\, H(t) \quad \text{при } X = 0 \tag{6.1}$$

либо воздействие

$$\partial U(X, t)/\partial X = \varepsilon \sin\Omega t\, H(t) \quad \text{при } X = 0 \tag{6.2}$$

Если ввести безразмерные величины (5.1), тогда в случае (6.1) имеем задачу Б, а в случае (6.2) — задачу A относительно уравнения (5.2). При этом

$$\Psi(\tau) = \sin(\tau h\Omega c^{-1})$$

Предположим, что задаваемые значения коэффициентов k_1, k_2 и ε таковы, что выполняются условия (5.6), и используем упрощенные формулы (5.7) второго приближения, которые с погрешностью порядка εk_1 одинаковы для задач A и $Б$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2(X,t)}{\partial X} = -\frac{1}{c}\frac{\partial U_2(X,t)}{\partial t} = \Big\{ \sin[\Omega(t-Xc^{-1})] + \frac{1}{4}k_1\varepsilon c^{-1}X\frac{\partial}{\partial t}\sin^2[\Omega(t-Xc^{-1})] + \\ + \frac{1}{24}k_1^2\varepsilon^2c^{-2}X^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sin^3[\Omega(t-Xc^{-1})]\Big\}\varepsilon H(t-Xc^{-1}) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Формула (6.3) легко может быть приведена к форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2(X,t)}{\partial X} = -\frac{1}{c}\frac{\partial U_2(X,t)}{\partial t} = \Big\{\Big(1 - \frac{1}{32}k_1^2\varepsilon^2X^2\Omega^2c^{-2}\Big)\sin[\Omega(t-Xc^{-1})] + \\ + \frac{1}{4}k_1\varepsilon X\Omega c^{-1}\sin[2\Omega(t-Xc^{-1})] + \\ + \frac{3}{32}k_1^2\varepsilon^2X^2\Omega^2c^{-2}\sin[3\Omega(t-Xc^{-1})]\Big\}\varepsilon H(t-Xc^{-1}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

С точностью линейного (нулевого) приближения имеем решение

$$\frac{\partial U_0(X,t)}{\partial X} = -\frac{1}{c}\frac{\partial U_0(X,t)}{\partial t} = \sin\left[\Omega\left(t - Xc^{-1}\right)\right] \varepsilon H\left(t - Xc^{-1}\right) \qquad (6.5)$$

Из сопоставления (6.4) и (6.5) следует, что нелинейные эффекты возрастают с ростом $k_1 \varepsilon X \Omega c^{-1}$ и появляются в рассматриваемом случае в двух формах: а) в форме изменения амплитуды линейного решения, б) в форме появления более высокочастотных компонентов волнового процесса, которые отсутствуют в линейном решении.

При достаточно малых t нелинейное решение сколь угодно мало отличается от линейного, но по мере роста времени t растет возмущенная область $0 \leqslant X \leqslant tc$ и нелинейные эффекты наиболее сильно проявляются в той части возмущенной области, где X приобретает сравнительно большие значения.

При заданных значениях k_1, ε, Ω и c использованный метод приближения пригоден в той части возмущенной области, где $k_1 \varepsilon X \Omega c^{-1}$ меньше или порядка единицы.

Поступила 16 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы возмущения в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
2. Галиев Ш. У. Вынужденные продольные колебания нелинейно-упругого тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
4. Gryboś R. Asymptotic solution to the problem of impact buckling of a strut. Proc. of Vibration Problems, 1970, vol. 11, No. 2, S. 179—195.
5. Gryboś R. An approximate analysis of vibration of a curved bar caused by longitudinal impact. Proc. of Vibration Problems. 1971, vol. 12. No. 3, S. 327—345.
6. Рахматулин Х. А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации. Уч. зап. МГУ, 1951, вып. 152.
7. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжения от деформации. ПММ, 1953, т. 17, вып. 4.
8. Bland D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. Waltham, Massachusetts, Toronto, London, Blaisdell Publishing Co, 1969.
9. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термо-упругих и упругих тел. Таллин, АН ЭстССР, 1972.
10. Багдоев А. Г., Мовсисян Л. А. К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изд. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, вып. 3.
11. Бондарь Н. Г. Приближенное замкнутое решение нелинейного волнового уравнения. Прикл. механ., 1969, т. 5, вып. 7.
12. Нигул У. К. Аналитическое решение волнового уравнения, правая часть которого соответствует волне с переменной скоростью распространения. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, вып. 2.