Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

# О МИНИМАЛЬНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ В ОДНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

А. А. Меликян

(Москва)

Рассматривается дифференциальная игра сближения «изотропные ракеты» [1]. Ее решение при условии полной информированности игроков построено в [2]. Исследуется вопрос о минимальной информации, необходимой игрокам для осуществления седловой ситуации. Постановка подобных игровых задач с неполной информацией дана в [3].

1. Пусть движение игроков $X$ и $Y$ на фиксированном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$ задается соотношениями

$$X: x_1^{\bullet} = x_2, \quad x_2^{\bullet} = u, \quad |u| \leqslant 1, \qquad Y: y^{\bullet} = v, \quad |v| \leqslant 1$$
$$x_1(0) = x_1^{\circ}, \quad x_2(0) = x_2^{\circ}; \qquad y(0) = y^{\circ} \tag{1.1}$$

Здесь $x_1$, $x_2$, $u$, $y$, $v$ — векторы произвольной одинаковой размерности. Информированность игрока $X$ такова. В каждый момент времени $t \in [0, T]$ ему известно точное значение векторов собственных фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$. Фазовый вектор противника $y(t)$ игрок $X$ наблюдает в $N$ моментов времени $a_i$, $i = 1, \ldots, N$, $0 = a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_N = T$. Моменты наблюдения $a_i$ считаются фиксированными. Таким образом, в момент времени $t \in [0, T]$ игроку $X$ известен набор величин $\{t, x_1(t), x_2(t), y(t'(t))\}$, где $t'(t)$ — последний момент наблюдения, равный

$$t'(t) = a_i, \quad t \in [a_i, a_{i+1}), \qquad i = 1, \ldots, N-1 \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что игрок $X$ формирует вектор управления в момент $t$, пользуясь имеющейся информацией, т. е. применяет стратегии в виде функций $u[t] = u(t, x_1(t), x_2(t), y(t'(t)))$, $|u[t]| \leqslant 1$, $t \in [0, T]$. Целью игрока $X$ является минимизация функционала

$$J = |x_1(T) - y(T)| \tag{1.3}$$

Игрок $Y$ противодействует намерениям $X$ и реализует свое (допустимое) управление в виде интегрируемой функции времени $v(t)$, $|v(t)| \leqslant 1$, $t \in [0, T]$. Решением системы (1.1), соответствующим управлению $v$, стратегии $u$ и начальным векторам (1.1), будем называть абсолютно непрерывные функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$, $x_1(0) = x_1^{\circ}$, $x_2(0) = x_2^{\circ}$, $y(0) = y^{\circ}$, которые почти всюду на $[0, T]$ удовлетворяют уравнениям

$$y^{\bullet}(t) = v(t), \; x_1^{\bullet}(t) = x_2(t), \; x_2^{\bullet}(t) = u(t, x_1(t), x_2(t), y(t'(t)))$$

Допустимыми стратегиями игрока $X$ будем считать те стратегии, которые по заданным начальным векторам и допустимому управлению $v(t)$ определяют единственное решение системы (1.1).

*Задача* 1. Найти оптимальную минимаксную стратегию $u^*$ игрока $X$, т. е. стратегию, удовлетворяющую соотношению

$$J^* = \min_u \sup_v J[u, v] = \sup_v J[u^*, v] \tag{1.4}$$

Найти минимальное гарантированное для игрока $X$ значение $J^*$ функционала (1.3).

Здесь $J[u, v]$ — значение функционала (1.3) на решении системы (1.1), определяемом стратегией $u$ и управлением $v$. Зависимость $J[u, v]$ от начальных векторов явно не указана. Операции минимума и sup проводятся по множествам допустимых стратегий и управлений.

Отметим, что при более общих ограничениях на управляющие векторы $|u| \leqslant \mu$, $|v| \leqslant \nu$, $\mu, \nu > 0$ рассматриваемая игра может быть сведена к виду (1.1), (1.3) подстановкой

$$x_1 \to x_1\nu^2/\mu, \quad x_2 \to x_2\nu, \quad u \to u\mu, \quad y \to y\nu^2/\mu,$$
$$v \to v\nu, \quad t \to t\nu/\mu, \quad J \to J\nu^2/\mu.$$

2. Уравнение движения (1.1) с помощью переменной $x(t) = x_1(t) + (T - t)x_2(t)$ могут быть сведены к виду

$$X: \dot{x} = (T - t)u, \quad |u| \leqslant 1, \qquad Y: \dot{y} = v, \quad |v| \leqslant 1$$
$$x(0) = x^\circ = x_1^\circ + Tx_2^\circ, \qquad y(0) = y^\circ \tag{2.1}$$

Для того чтобы решать задачу 1 с помощью уравнений (2.1), будем считать, что игрок $X$, наблюдая в момент $t \in [0, T]$ величины $\{t, x(t), y(t'(t))\}$, реализует стратегии в виде функции $u[t] = u(t, x(t), y(t'(t)))$. Решение системы (2.1) и допустимые стратегии определим аналогично сделанному в п. 1. Класс допустимых стратегий будет, вообще говоря, более узким, чем класс, описанный в п. 1, так как зависимость стратегий от векторов $x_1(t)$, $x_2(t)$ заменена зависимостью от их линейной комбинации $x(t) = x_1(t) + (T - t)x_2(t)$. Из дальнейшего, однако, будет видно, что экстремум (1.4) достигается на стратегии $u^*$ из этого узкого класса.

Заметив, что $x(T) = x_1(T)$, перепишем функционал (1.3) в виде

$$J = |x(T) - y(T)| \tag{2.2}$$

Введем обозначения $x_k = x(a_k)$, $y_k = y(a_k)$, $k = 1, \ldots, N$. Выбор некоторой стратегии игроком $X$ эквивалентен выбору совокупности функций $u_k(x_k, y_k; t)$, $t \in [a_k, a_{k+1})$, $k = 1, \ldots, N - 1$, или, иными словами, эквивалентен тому, что игрок $X$ в момент $a_k$ в зависимости от реализовавшейся позиции $\{x_k, y_k\}$ задает вперед свое управление на отрезке $[a_k, a_{k+1})$ в виде интегрируемой функции времени. Упомянутую совокупность будем обозначать $\{u_k(x_k, y_k; t)\}$ и также называть стратегией.

Подразумевая в (2.1) некоторые допустимые управление и стратегию, проинтегрируем на интервалах $[a_k, a_{k+1}]$

$$\begin{gathered} x_{k+1} = x_k + (a_{k+1} - a_k)[T - a_k - {}^1/_2(a_{k+1} - a_k)]\, u_k, \quad |u_k| \leqslant 1 \\ y_{k+1} = y_k + (a_{k+1} - a_k)\, v_k, \quad |v_k| \leqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, N-1 \\ x_1 = x^\circ, \qquad y_1 = y^\circ \end{gathered} \tag{2.3}$$

Векторы $v_k$ и $u_k = u_k(x_k, y_k)$ определяются равенствами

$$v_k = (a_{k+1} - a_k)^{-1} \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} v(t)\,dt,$$

$$u_k(x_k, y_k) = (a_{k+1} - a_k)^{-1}\alpha_k^{-1} \int\limits_{a_k}^{a_{k+1}} (T - t)\,u_k(x_k, y_k;\, t)\,dt$$

$$\alpha_k = T - a_k - {}^1/_2(a_{k+1} - a_k), \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

С другой стороны, для всякой последовательности $v_k$, $u_k = u_k(x_k, y_k)$, $|v_k| \leqslant 1$, $|u_k| \leqslant 1$, найдутся управление игрока $Y$ и стратегия игрока $X$, реализующие в (2.1) те же значения векторов $x_k$, $y_k$, $k = 1, \ldots, N$, что и в (2.3). Приведем пример таких управления и стратегии

$$v(t) = v_k, \quad u_k(x_k, y_k;\, t) = u_k(x_k, y_k) \quad t \in [a_k, a_{k+1}) \tag{2.4}$$

Вместо дифференциальной игры с неполной информацией (2.1), (2.2) будем рассматривать многошаговую игру (2.3), в которой игрок $X$ применяет стратегии $u_k = u_k(x_k, y_k)$, $k = 1, \ldots, N-1$, и минимизирует функционал

$$J = |x_N - y_N| \tag{2.5}$$

Если $\{u_k^*(x_k, y_k)\}$ — оптимальная минимаксная стратегия в игре (2.3), (2.5), то соответствующая ей стратегия (2.4) — оптимальная минимаксная стратегия в игре (2.1), (2.2), т. е., в соответствии со сделанным замечанием, решение задачи 1.

Для решения игры (2.3), (2.5) определим функцию Беллмана соотношением

$$S_k(x_k, y_k) = \min\nolimits_{u_k} \max\nolimits_{v_k} \ldots \min\nolimits_{u_{N-1}} \max\nolimits_{v_{N-1}} J, \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

$$S_N(x_N, y_N) = |x_N - y_N| \tag{2.6}$$

Функция (2.6) равна минимальному значению функционала (2.5), которое можно гарантировать на траекториях системы (2.3) при условии, что на $k$-м шаге реализовалась позиция $\{x_k, y_k\}$. Из (2.6) следует рекуррентное соотношение

$$S_k(x_k, y_k) = \min\nolimits_{u_k} \max\nolimits_{v_k} S_{k+1}, (x_{k+1}, y_{k+1}) \tag{2.7}$$

$$|u_k| \leqslant 1, \quad |v_k| \leqslant 1, \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

с граничным условием

$$S_N(x_N, y_N) = |x_N - y_N| \tag{2.8}$$

Векторы $x_{k+1}$, $y_{k+1}$ в (2.7) должны быть взяты в виде (2.3). Отправляясь от граничных условий (2.8) и последовательными шагами вычисляя экстремумы в (2.7), можно найти единственную функцию, удовлетворяющую (2.7), (2.8)

$$S_k(x_k, y_k) = \max\left[\Phi_k(a_k, \ldots, a_N),\ |x_k - y_k| + (T - a_k)\left(1 - \frac{T - a_k}{2}\right)\right]$$

$$\Phi_k(a_k, \ldots, a_N) = \max_{k \leqslant i \leqslant N-1} [T - a_i - {}^1/_2(T - a_{i+1})^2], \qquad k = 1, \ldots, N-1$$

Оптимальная минимаксная стратегия, получающаяся при вычислении минимума в (2.7), такова:

$$u_k^*(x_k, y_k) = (y_k - x_k)/|x_k - y_k|, \quad |x_k - y_k| \geqslant (a_{k+1} - a_k)\alpha_k$$
$$u_k^*(x_k, y_k) = (y_k - x_k)/(a_{k+1} - a_k)\alpha_k, \quad |x_k - y_k| < (a_{k+1} - a_k)\alpha_k$$
$$\alpha_k = T - a_k - {}^1/_2(a_{k+1} - a_k), \qquad k = 1, \ldots, N-1 \tag{2.9}$$

Тогда решением задачи 1, вообще говоря, не единственным, будет стратегия $\{u_k^*\ (x_k,\ y_k;\ t)\}$, получающаяся подстановкой (2.9) в (2.4). Другое решение задачи 1 в исходных обозначениях имеет вид

$$u^* = (y(t') - x(t))/|x(t) - y(t')|, \qquad x(t) \neq y(t')$$
$$u^* = 0, \quad x(t) = y(t'), \quad x(t) = x_1(t) + (T - t)x_2(t) \tag{2.10}$$

Нетрудно проверить, что указанные два решения задачи 1 реализуют в (2.1) одну и ту же последовательность значений $x_k = x(a_k)$, $k = 1, \ldots, N$.

Минимальное гарантированное значение (1.4) функционала (1.3) (или, что то же самое, функционалов (2.2), (2.5)) равно

$$J^* = S_1(x^\circ, y^\circ) = \max\,[\Phi_1(a_1, \ldots, a_N),\ |x^\circ - y^\circ| + T(1 - T/2)]$$
$$\Phi_1(a_1, \ldots, a_N) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N-1}\,[T - a_i - {}^1/_2(T - a_{i+1})^2] \tag{2.11}$$

3. Точки наблюдения $a_i$ выше считались фиксированными. Поставим теперь задачу об оптимальном распределении моментов наблюдения, т. е. таком, при котором минимальное гарантированное для игрока $X$ значение функционала (2.11) будет минимальным. Из (2.11) видно, что оптимальное распределение $a_i^*$ следует искать из условия

$$\Phi_1^* = \min_{\{a_i\}} \Phi_1(a_1, \ldots, a_N) \tag{3.1}$$
$$0 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_N = T$$

Из леммы, сформулированной в п. 5, следует, что минимум (3.1) существует и достигается на наборе $a_i^*$, $i = 1, \ldots, N$, таком, что

$$T - a_i^* - {}^1/_2(T - a_{i+1}^*)^2 = 2h_N(T) = \Phi_1^*, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$
$$0 = a_1^* < a_2^* < \ldots < a_N^* = T \tag{3.2}$$

Здесь $h_N(T) > 0$ — неизвестная пока постоянная, зависящая от параметров задачи $N$ и $T$. Исключая из равенств (3.2) $a_i^*$, можно получить, что $h_N(T)$ равна единственному положительному корню уравнения

$$\beta_N(\xi) \equiv \xi(\xi(\xi \ldots (\xi(\xi + 1)^2 + 1)^2 + \ldots + 1)^2 + 1) = T/2, \quad \xi > 0, \quad (N\text{—2 скобки})$$
$$\beta_N(h_N(T)) = T/2 \tag{3.3}$$

Оптимальные моменты наблюдения вычисляются по формулам

$$a_i^* = T - 2\beta_{N-i+1}(h_N(T)), \qquad i = 1, \ldots, N \tag{3.4}$$

где $\beta_k(\xi)$ — многочлены степени $2^{k-2}$ $(k \neq 1)$

$$\beta_k(\xi) \equiv \xi(\xi(\xi\ldots(\xi(\xi+1)^2+1)^2+\ldots+1)^2+1), \qquad k=2,3,\ldots (k-2 \text{ скобки})$$
$$\beta_1(\xi)\equiv 0, \quad \beta_{k+1}(\xi)=\beta_k^2(\xi)+\xi, \quad k=1,2\ldots \tag{3.5}$$

Непосредственным следствием (3.5) являются соотношения

$$\beta_{k+1}(\xi)>\beta_k(\xi), \qquad \xi>0, \quad k=1,2,\ldots$$
$$\lim\beta_k(\xi)=\beta(\xi)={}^1/_2(1-\sqrt{1-4\xi}), \quad k\to\infty, \quad 0\leqslant\xi\leqslant{}^1/_4 \tag{3.6}$$
$$\lim\beta_k(\xi)=\infty, \quad k\to\infty, \quad \xi>{}^1/_4$$

Наблюдения в моменты (3.4) гарантируют игроку $X$ значение функционала

$$J^* = \max\,[2h_N(T),\ |x^\circ - y^\circ| + T(1 - T/2)] \tag{3.7}$$

Изучим асимптотическое поведение $h_N(T)$ при $N\to\infty$. Из монотонности по индексу $k$ (3.6) многочленов $\beta_k(\xi)$ следует монотонное убывание

$$h_{N+1}(T)<h_N(T), \quad h_N(T)>0, \quad T>0, \quad N=2,3,\ldots$$

и далее, существование конечного предела $\lim h_N(T)=h(T)$ при $N\to\infty$.

Функции $h_N(T)$, $T>0$ и $2\beta_N(\xi)$, $\xi>0$, $N=2,3,\ldots$, взаимно обратны, поэтому из (3.6) можно получить

$$h(T)={}^1/_2T(1-T/2), \qquad 0<T\leqslant 1 \tag{3.8}$$
$$h(T)={}^1/_4, \qquad T>1$$

Таким образом, выбором достаточно большого числа точек наблюдения игрок $X$ может гарантировать значение функционала, сколь угодно близкое к

$$J^* = \max\,[2h(T),\ |x^\circ - y^\circ| + T(1-T/2)], \qquad T>0$$
$$J^* = |x^\circ - y^\circ| + T(1-T/2), \qquad 0<T\leqslant 1 \tag{3.9}$$
$$J^* = \begin{cases} {}^1/_2, & |x^\circ-y^\circ|\leqslant{}^1/_2-T(1-T/2) \\ |x^\circ-y^\circ|+T(1-T/2), & |x^\circ-y^\circ|>{}^1/_2-T(1-T/2), \quad T>1 \end{cases}$$

Значение (3.9) — минимальное гарантированное значение функционала при непрерывном наблюдении (см. [2]). Из начальных позиций, для которых в (3.7) выбором $N$ удается получить значение $2h_N(T)$, не превосходящее правое выражение в скобках, можно гарантировать точное значение (3.9) наблюдением лишь в конечном числе точек. Этого можно достичь из позиций $\{x^\circ, y^\circ\}$

$$|x^\circ - y^\circ| > 2h(T) - T(1-T/2), \qquad T>0 \tag{3.10}$$

Минимальное число $N(x^\circ, y^\circ)$ точек наблюдения, достаточных для достижения результата (3.9) из позиций (3.10), равно минимальному целому $N$, удовлетворяющему неравенству

$$2h_N(T)\leqslant|x^\circ-y^\circ|+T(1-T/2)$$

Приведенные утверждения следуют из (3.7) и монотонного стремления $h_N(T)$ к $h(T)$. Из остальных позиций

$$|x^\circ - y^\circ| \leqslant 2h(T) - T(1-T/2) \tag{3.11}$$

гарантировать значение (3.9) наблюдением в конечном числе точек нельзя. Здесь необходимы наблюдения на счетном множестве точек, построением которого займемся ниже.

Определим предельное множество точек наблюдения $A_T \subset [0, T]$, $A_T = \{a_i^\circ\}$, $a_i^\circ = T - C_i^\circ$, соотношениями

$$c_i^\circ = \lim_{N\to\infty} 2\beta_{N-i+1}(h_N(T)) = 2(\ldots(T/2 - h(T))^{1/2}\ldots - h(T))^{1/2} \quad (i-1 \text{ скобка})$$
$$i = 1, 2, \ldots$$
$$c_{-i}^\circ = \lim_{N\to\infty} 2\beta_{i+1}(h_N(T)) = 2\beta_{i+1}(h(T)), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

Первое соотношение в (3.12) получается использованием свойств (3.5) многочленов $\beta_k(\xi)$. Как видно из (3.12), точка $a_i^\circ$, $i > 0$, представляет собой предел, к которому стремится $i$-я оптимальная точка наблюдения (3.4) при $N \to \infty$; точка $a_i^\circ$, $i < 0$, является пределом, к которому стремится $i$-я, отсчитываемая от последней точки наблюдения $a_0^\circ = T$, оптимальная точка наблюдения. Перейдя в равенствах (3.2) к пределу при $N \to \infty$, получим рекуррентные соотношения для точек $a_i^\circ$

$$a_1^\circ = 0, \quad a_0^\circ = T; \quad T - a_i^\circ - {}^1/_2 (T - a_{i+1}^\circ)^2 = 2h(T), \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.13}$$

Изучим точки сгущения множества $A_T$. Пусть сначала $0 < T \leqslant 1$. Из (3.12) и (3.8) следует, что $c_i^\circ = T$, т. е. $a_i^\circ = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. С помощью (3.12), (3.6), (3.8) находим $\lim c_{-i}^\circ = 2\beta(h(T)) = T$, $\quad 0 < T \leqslant 1, \quad i \to +\infty$,

т. е. множество $A_T$ имеет единственную точку сгущения $a_1^\circ = 0$. Предпоследней точкой наблюдения является точка $a_{-1}^\circ$

$$a_{-1}^\circ = T - c_{-1}^\circ = T - 2\beta_2(h(T)) = T - T(1 - T/2) = T^2/2 \tag{3.14}$$

Рассмотрим случай $T > 1$. Перейдя к пределу в (3.13) при $i \to \pm\infty$, получим $\lim a_i^\circ = \lim a_{-i}^\circ = \alpha$, $i \to +\infty$ и уравнение для $\alpha$

$$T - \alpha - {}^1/_2 (T - \alpha)^2 = {}^1/_2$$

из которого определяется единственное значение $\alpha = T - 1$. Следовательно, единственной точкой сгущения множества $A_T$, $T > 1$, является точка $T - 1$. Второй и предпоследний моменты наблюдений $a_2^\circ$ и $a_{-1}^\circ$ определяются из (3.12)

$$a_2^\circ = T - c_2^\circ = T - \sqrt{2T - 1}, \qquad a_{-1}^\circ = T - c_{-1}^\circ = T - {}^1/_2 \tag{3.15}$$

Можно показать, что стратегия вида (2.10), где

$$t'(t) = a_i^\circ, \quad t \in [a_i^\circ, a_{i+1}^\circ), \qquad i = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

определяет единственное решение системы (1.1) и гарантирует значение функционала (3.9) для любых начальных позиций и допустимых управлений $v(t)$.

Множество моментов времени $A \subset [0, T]$ будем называть достаточным множеством моментов наблюдения для позиции $\{x^\circ, y^\circ\}$, если наблюдения игрока $X$ на множестве $A$ гарантируют результат игры с непрерывным наблюдением, т. е. значение функционала (3.9). Выше было показано, что для позиций (3.10) существует минимальное достаточное множество $A = \{a_1^*, a_2^*, \ldots, a_N^*\}$, где число точек наблюдения $N$ определялось в зависимости от позиции. Для позиций (3.11) достаточным множеством является, например, множество $A_T$ (3.12). При этом множество $A_T$ — не единственное достаточное множество. Среди других достаточных множеств со счетным числом точек наблюдения множество $A_T$ выделено тем, что в нем каждые два следующие один за другим момента наблюдения взаимно удалены на максимальное расстояние. Отметим также, что в произвольном другом достаточном для любой позиции множестве моментов наблюдений точки $t = T - 1$, $T > 1$, $t = 0$, $0 < T \leqslant 1$, будут точками сгущения.

Из структуры множества $A_T$ следует, что наиболее важны при $0 < T \leqslant \leqslant 1$ наблюдения на начальном этапе движения, а на последнем участке движения длительностью $T\ (1 - {}^1/_2)$ наблюдения вовсе могут быть опущены (см. (3.14)). Вне любого произвольно малого интервала $[0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, остается конечное число точек наблюдения.

При $T > 1$ точкой сгущения множества $A_T$ служит точка $T - 1$, поэтому наиболее важны наблюдения, проводимые за единицу времени до конца движения. Вне любого произвольно малого интервала $[T - 1 - \varepsilon, T - 1 + \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, расположено конечное число точек наблюдения. Далее, наблюдения могут быть опущены на начальном участке движения длительностью $T - \sqrt{2T - 1}$ и последнем участке длительностью ${}^1/_2$ (см. (3.15)).

Чтобы выяснить, чем выделен момент $t = T - 1$ среди остальных, рассмотрим игру (1.1), (1.3) при более общих ограничениях: $|u| \leqslant \mu$, $|v| \leqslant \nu$. Из замечания в конце п. 1 следует, что тогда точкой сгущения множества $A_T$, $T > \nu / \mu$, будет точка $t = T - \nu / \mu$. Отношение $\nu / \mu$ определяет длину интервала на последнем участке движения, в течение которого активное сближение игрока $X$ к игроку $Y$ затруднено из-за безынерционного поведения последнего. Поэтому игроку $X$ важны наблюдения, проводимые перед началом слабо контролируемого участка движения.

4. Покажем, что наблюдением в не более чем три момента времени игрок $Y$ в игре (1.1), (1.3) может гарантировать максимальное значение функционала (1.3), равное (3.9). Это, в частности, оправдает сужение класса допустимых стратегий игрока $X$, проведенное в п. 2.

Пусть игрок $Y$ в (1.1) наблюдает позицию $\{t, x_1(t), x_2(t), y(t)\}$ в три момента времени $0 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 = T$ и стремится максимизировать функционал (1.3). Допустимые управление игрока $X$, стратегию игрока $Y$ и решение системы (1.1) определим аналогично проделанному в п. 1.

*Задача* 4. Найти оптимальную максиминную стратегию $v_*$ игрока $Y$, т. е. стратегию, удовлетворяющую соотношению

$$J_* = \max_v \inf_u J[u, v] = \inf_u J[u, v_*] \qquad (4.1)$$

Найти максимальное гарантированное для игрока $Y$ значение $J_*$ функционала (1.3).

Как и выше, задачу 4 можно свести к эквивалентной многошаговой игре вида (2.3). Функция Беллмана этой многошаговой игры будет удовлетворять соотношению типа (2.7), в котором изменен порядок операций минимума и максимума. Разрешив подобное соотношение, можно получить выражение для гарантированного максимума (4.1)

$$J_* = \max\left[0,\ (T - a_2)\left(1 - \frac{T - a_2}{2}\right),\quad |x^\circ - y^\circ| + T\left(1 - \frac{T}{2}\right)\right] \tag{4.2}$$

и стратегию, гарантирующую это значение (в терминах исходной задачи)

$$v_* = (x(t') - y(t)) \,/\, |x(t) - y(t)|, \qquad x(t') \neq y(t)$$
$$v_* = e,\ |e| = 1,\ x(t') = y(t),\ x(t) = x_1(t) + (T - t)x_2(t)$$

Момент $t'(t)$ определен в (1.2) при $N = 3$.

Видно, что, положив в (4.2) $a_2 = a_1 = 0$ при $0 < T \leqslant 1$ и $a_2 = T - 1$ при $T > 1$, получим для $J_*$ то же значение (3.9).

Таким образом, для того чтобы в игре (1.1), (1.3) имела место седловая ситуация, игроку $Y$ необходимо и достаточно наблюдений в двух ($0 < T \leqslant 1$) или трех ($T > 1$) точках; игроку $X$ достаточно наблюдений в конечном или счетном множестве точек, построенном в п. 3. В тех случаях, когда игроку $X$ достаточны наблюдения в конечном числе точек, можно говорить о минимальной информации, необходимой для осуществления седловой ситуации.

5. *Лемма.* Пусть функция $g(x, y)$ непрерывна в замкнутом квадрате $a \leqslant x,\ y \leqslant b$ и дифференцируема в открытом квадрате $a < x,\ y < b$, причем

$$\partial g / \partial x < 0, \quad \partial g / \partial y > 0, \quad a < x,\ y < b \tag{5.1}$$

Пусть $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — $n$-мерный вектор, $n > 2$ и $z \in G$ означает: $z_1 = a,\ z_n = b,\ a \leqslant z_i \leqslant b,\ i = 2, \ldots, n - 1$. Тогда минимум

$$h = \min_{z \in G} \Phi(z), \qquad \Phi(z) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n-1} g(z_i, z_{i+1})$$

достигается на единственной точке $z^* \in G$, такой что

$$h = g(z_i^*, z_{i+1}^*), \qquad i = 1, \ldots, n - 1, \qquad a = z_1^* < z_2^* < \ldots < z_n^* = b \tag{5.2}$$

Приведем схему доказательства. Искомый минимум достигается, так как множество $G$ замкнуто и функция $\Phi(z)$ непрерывна на нем. Если допустить, что равенство (5.2) не выполнено, то, используя (5.1), можно построить вариацию $\delta z$ вектора $z^*$, $z^* + \delta z \in G$, такую что $\Phi(z^* + \delta z) < \Phi(z^*)$. Наконец, единственность и строго монотонное возрастание координат вектора $z^*$ можно доказать, считая равенства (5.2) уравнениями для определения последующей координаты $z_{i+1}^*$ при известной предыдущей $z_i^*$.

Поступила 12 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Пашков А. Г. Об одной игре сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. Меликян А. А., Черноусько Ф. Л. О дифференциальных играх с переменными условиями информированности. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 1.