Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫМ СОСТОЯНИЕМ

А. С. Братусь

(Москва)

Рассматривается задача оптимального управления конечным состоянием линейной системы, содержащей случайные возмущения в виде гауссовского белого шума. Предлагается способ приближенного решения уравнения Беллмана для одного класса таких задач в том случае, когда решение детерминированного уравнения Беллмана имеет разрывы первого рода своих значений, либо значений своих производных. В качестве приложения полученных результатов дается приближенное решение уравнения Беллмана, соответствующее одной модельной задаче, возникающей при управлении входом в атмосферу (см. [1,2]), и приводится сравнение полученного решения с результатами численного расчета в [2]. Ранее, например в [3–6], изучались некоторые методы приближенного решения уравнения Беллмана. В случае, когда детерминированное уравнение Беллмана, соответствующее системе без случайных возмущений, имеет гладкое решение, в [4–6] построены асимптотические разложения по малому параметру, представляющему собой интенсивность шума. В некоторых случаях, когда размерность системы равна единице, в [3] получены точные решения уравнения Беллмана.

1. Постановка задачи. Уравнение Беллмана. Пусть уравнение, описывающее движение системы, имеет вид

$$dx/dt = a(x, y, t) + b(x, y, t)u \tag{1.1}$$

Здесь $0 \leqslant t \leqslant T$, x — скаляр, u — управляющая функция, принимающая значения в выпуклом замкнутом множестве, $|u(t)| \leqslant p(t)$, $y = (y_1, \ldots \ldots y_n)$ — вектор-функция, удовлетворяющая уравнению

$$dy/dt = c(t) + d(t)y + \varepsilon e(x, y, t)\xi \tag{1.2}$$

Здесь $c(t)$, $d(t)$ — диагональные матрицы размерности n, $e(x, y, t)$ — заданная матрица, ξ — вектор случайных возмущений, ε — малый параметр, $0 < \varepsilon < 1$. Функции a, b, элементы матриц c, d, e считаем бесконечно гладкими функциями своих аргументов. Вектор случайных возмущений полагается гауссовским белым шумом единичной интенсивности. Известны начальные значения $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, требуется построить способ управления, минимизирующий (или максимизирующий) математическое ожидание скалярной функции $\psi[x(t)]$ от координаты x, в конечный момент времени $t = T$. Функция $\psi[x(t)]$ задает некоторую меру отклонения от заданного положения в конце процесса.

Если случайные возмущения отсутствуют, то можно найти решение $y(y_0, t)$ системы (1.2), и система (1.1), (1.2) сводится к скалярному уравнению

$$dx/dt = a(x, y(y_0, t), t) + b(x, y(y_0, t), t)u \tag{1.3}$$

Задача (1.1), (1.2) моделирует движение управляемого объекта, зависящего от изменения n параметров $y_k(t)$, отклоняемых случайными возмущениями от некоторых заданных значений. К задачам такого рода относится, например, задача управления движением в случайной среде.

Уравнение Беллмана для задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$S_\tau = \min_{|u|\leqslant p(\tau)} \{b(x, y, \tau)\ u S_x\} + a(x, y, \tau) S_x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (c_k(\tau) + d_k(\tau) y_k) S_{y_k} + \frac{\varepsilon^2}{2} \operatorname{Sp}(ee' S_{yy}) \tag{1.4}$$

с начальным условием

$$S(x, y, 0) = \psi(x) \tag{1.5}$$

Здесь $S(x, y, \tau)$ — функция Беллмана, $T - t = \tau$ — обратное время. Индексы внизу у функции S означают взятие соответствующих частных производных, c_k и d_k — диагональные элементы матриц c и d. Далее будем пользоваться записью

$$\operatorname{Sp}(ee' S_{yy}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x, y, \tau) S_{y_i y_j}$$

считая, что для любых вещественных векторов $\xi = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}\xi_i\xi_j > 0, \qquad \xi \neq 0 \tag{1.6}$$

Введем новую переменную

$$z_k = y_k \exp\left[\int_{\tau_0}^{\tau} d_k(\lambda)\, d\lambda\right] - \int_{\tau_0}^{\tau} c_k(\lambda) \exp\left[\int_{\tau_0}^{\lambda} d_k(\lambda_1)\, d\lambda_1\right] d\lambda \tag{1.7}$$

$$\tau_0 = T - t_0, \quad k = 1, \ldots, n$$

Вычисляя в (1.4) операцию взятия минимума, получим

$$\min_{|u|\leqslant p(\tau)} \{b(x, y, \tau) u S_x\} = -p(\tau) |b(x, y, \tau) S_x| = F(x, y, \tau, S_x)$$

$$u = \begin{cases} p(\tau), & \operatorname{sign}(bS_x) < 0 \\ -p(\tau), & \operatorname{sign}(bS_x) \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

С учетом (1.7), (1.8) краевая задача (1.4), (1.5) примет вид

$$S_\tau = -p(\tau) |b^1 S_x| + a^1 S_x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{i,j=1}^{n} f^1_{i,j} S_{z_i z_j}$$

$$S(x, z, 0) = \psi(x) \tag{1.9}$$

Здесь S — функция Беллмана от переменных (x, z, τ), определенная в области $\Omega = \{x, \tau, z : -\infty \leqslant x \leqslant +\infty, \ -\infty \leqslant z_k \leqslant +\infty, k = 1, \ldots, n, \ 0 \leqslant \tau \leqslant T\}$. Через a^1, b^1, f_{ij}^1 обозначены функции, полученные из функций a, b, f_{ij} соответственно при замене переменных (1.7).

Замечание 1. Дальнейшие рассуждения остаются справедливыми и в том случае, когда уравнение (1.1) аддитивно содержит случайное возмущение в виде гауссовского белого шума единичной интенсивности с малым параметром ε, т. е.

$$dx/dt = a(x, y, t) + b(x, y, t)u + \varepsilon e_1(x, y, t)\xi_1$$

Здесь ξ_1 — гауссовский белый шум, независимый от ξ, $e_1(x, y, t)$ — некоторая бесконечно гладкая функция своих аргументов.

Замечание 2. Для задачи (1.1), (1.2) в [7] доказана теорема существования и единственности решения.

2. Решение детерминированной задачи. Определение характеристик детерминированного уравнения. Предположим, что известна функция Беллмана S°, соответствующая детерминированной задаче (1.3). Причем

$$S^\circ(x, z, \tau) = \begin{cases} S^{\circ 1}(x, z, \tau), & A^\circ(x, z, \tau) \leqslant 0 \\ S^{\circ 2}(x, z, \tau), & A^\circ(x, z, \tau) > 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $A^\circ(x, z, \tau)$ — некоторая непрерывная функция своих аргументов. Функции $S^{\circ k}$, $k = 1, 2$, непрерывные вне множества $A^\circ = 0$, устроены таким образом, что функция S° терпит разрыв первого рода своих значений или значений своих производных на поверхности $A^\circ = 0$. Ясно, что такой случай соответствует разрывной функции начальных значений $\psi(x)$. Далее считаем, что функция S°, ограниченная при всех значениях x.

Уравнение Беллмана, соответствующее детерминированной задаче, имеет вид

$$S_\tau{}^\circ = -p(\tau)\,|b^1 S_x{}^\circ| + a^1 S_x{}^\circ \tag{2.2}$$

$$S^\circ(x, z, 0) = \psi(x) \tag{2.3}$$

Из теории уравнений в частных производных известно, что в уравнениях гиперболического типа разрывы функции начальных значений и ее производных распространяются по характеристикам, поэтому естественно ожидать, что, несмотря на нелинейность, поверхность $A^0 = 0$ — характеристическая для уравнения (2.2). Однако само понятие характеристической поверхности в случае уравнения (2.2) нуждается в определении. Действительно, в этом случае уравнение характеристической поверхности зависит от знака выражения $(bS_x{}^\circ)$ и тем самым от решения самого уравнения (2.2), а так как функция S° может быть ступенчатой (см. [1,2]), принимающей значение нуль там, где $A^\circ \leqslant 0$ и единицу там, где $A^\circ > 0$, то не ясно, что в этом случае означает sign $(bS_x{}^\circ)$. Поэтому проведем следующие дополнительные построения.

Рассмотрим фундаментальное решение уравнения $p_\tau{}^\mu = {}^1/_2\, \mu^2\, p_{xx}{}^\mu$, $\mu > 0$, имеющего вид

$$p^\mu(x, \tau) = [2\mu\sqrt{\pi\tau}\,]^{-1} \exp[-x^2/4\mu^2\tau] \tag{2.4}$$

и построим функцию

$$S^\mu(x, z, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S^\circ(\lambda, z, \tau)\, p^\mu(x - \lambda, \tau)\, d\lambda$$

Здесь $S^\circ(\lambda, z, \tau)$ — функция, определенная равенством (2.1), является решением детерминированного уравнения (2.2). Из свойств фундаментального решения следует [8], что а) S^μ бесконечно дифференцируема по x в Ω;

б) $S^\mu \to S^\circ$, $S_x^\mu \to S_x^\circ$ при $\mu \to 0$ в смысле сходимости в пространстве суммируемых функций;

в) $S^\mu(x, z, 0) = S^\circ(x, z, 0) = \psi(x)$

Рассмотрим функцию $F(x, z, \tau, S_x^\mu)$, определенную равенством (1.8). Для всякого фиксированного $\mu > 0$ функция bS_x^μ принимает неотрицательные значения на некотором множестве и строго отрицательные на дополнении этого множества в Ω. Таким образом, при каждом μ область Ω разбивается на области $\Omega_\mu^+ = \{x, z, \tau\colon b^1 S_x^\mu \geqslant 0\}$ и $\Omega_\mu^- = \{x, z, \tau : b^1 S_x^\mu < 0\}$. Будем полагать, что уравнение (2.2) в Ω_μ^+ имеет вид

$$S_\tau^\circ = -p(\tau) b^1 S_x^\circ + a^1 S_x^\circ$$

а в области Ω_μ^- — вид

$$S_\tau^\circ = p(\tau) b^1 S_x^\circ + a^1 S_x^\circ$$

В каждом из областей Ω_μ^+ и Ω_μ^- эти уравнения имеют семейства характеристических поверхностей, которые задаются уравнениями $\eta = A_\mu^+(x, z, \tau)$, $\eta = A_\mu^-(x, z, \tau)$, $\eta = \mathrm{const}$, A_μ^+ и A_μ^- —некоторые гладкие функции своих аргументов. Из соображений непрерывности ясно, что характеристические поверхности, соответствующие областям Ω_μ^+ и Ω_μ^-, при каждом соответствующем значении η склеиваются непрерывным образом на границе области Ω_μ^+. Для каждого μ образуется семейство поверхностей $A_\mu(x, z, \tau) = \eta$, $\eta = \mathrm{const}$, которое будем называть μ-характеристическим семейством поверхностей уравнения (2.2).

Предположение 1. Существует такое значение μ^*, что при $0 < \mu < \mu^*$ μ-характеристические семейства уравнения (2.2) тождественно совпадают, т. е. $A_\mu(x, z, \tau) = A(x, z, \tau)$, $0 < \mu < \mu^*$.

Определение 1. Семейство поверхностей $\eta = A(x, z, \tau)$, $\eta = \mathrm{const}$ назовем характеристическим для уравнения (2.2).

Предположение 2. Поверхность $A^\circ(x, z, \tau) = 0$, фигурирующая в определении решения (2.1) детерминированной задачи (1.4), является характеристической в смысле определения 1.

Не умаляя общности, можно считать, что поверхность $A^\circ(x, z, \tau) = 0$ соответствует значению постоянной $\eta = 0$, т. е. $0 = \eta = A(x, z, \tau) = A^\circ(x, z, \tau)$, и что значения постоянной η, определяющей характеристические поверхности уравнения (2.2), изменяются в пределах $-\infty \leqslant \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2 \leqslant +\infty$. Из (2.1) следует, что решение детерминированной задачи (1.3) можно записать в виде

$$S^\circ(x, z, \tau) = S^\circ(\eta) = \begin{cases} S^{\circ 1}(\eta), & \eta \leqslant 0 \\ S^{\circ 2}(\eta), & \eta > 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Отсюда следует запись

$$S^\circ(x, z, 0) = S^\circ(\eta)|_{\tau=0} = \psi(x)$$

Предположение 3. Функции S^{ok}, $k = 1, 2$ таковы, что

а) $S_\eta°(\eta) > 0, \qquad \eta \neq 0$

б) $S_\eta°(+0) - S_\eta°(-0) \geqslant 0$.

Здесь индекс η означает взятие производной у функции $S°$, $S_\eta°(\pm 0) = \lim S_\eta°$ при $\eta \to \pm 0$ соответственно.

Замечание 3. Если в исходной постановке задачи (1.1), (1.2) разыскивается не минимум, а максимум функции $\psi[x(T)]$, то условия а) и б) предположения 3 примут вид

а′) $S_\eta°(\eta) \leqslant 0, \qquad \eta \neq 0$

б′) $S_\eta°(+0) - S_\eta°(-0) \leqslant 0$.

Из определения характеристических поверхностей уравнения (2.2) видно, что у них могут быть конические точки, когда (x, z, τ) таково, что $b(x, z, \tau)\ S_x^\mu = 0$, $0 < \mu < \mu^*$. Это множество по построению является предельным для множества Ω_μ^-.

Определение 2. Производной от функции $\eta = A(x, z, \tau)$, являющейся характеристической поверхностью уравнения (2.2) в конической точке (x^*, z^*, τ^*), назовем предел значений производных от соответствующих переменных при стремлении точки (x, z, τ), принадлежащей области Ω^+ к точке (x^*, z^*, τ^*).

Предположение 4. Для всех $(x, z, \tau) \in \Omega$ справедливо условие

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial A(x, z, \tau)}{\partial x_1} \neq 0 \tag{2.6}$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий введенные предположения и определения. Пусть $dx / dt = u + \xi$, x — скаляр, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\xi(t)$ — гауссовский белый шум, $|u(t)| \leqslant p_0 = \text{const}$. Функция $\psi[x(T)]$ задается равенством

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant l_0 \\ 1, & |x| > l_0 \end{cases}$$

Уравнение Беллмана имеет вид

$$S_\tau = -p_0 |S_x| + {}^1/_2 S_{xx}, \qquad S(x, 0) = \psi(x)$$

Функция $S°$, являющаяся решением детерминированной задачи, имеет вид (см. [3])

$$S°(x, \tau) = \begin{cases} 0, & |x| \leqslant l_0 + p_0\tau \\ 1, & |x| > l_0 + p_0\tau \end{cases}$$

Уравнение Беллмана, соответствующее детерминированной задаче, запишется так:

$$S_\tau° = -p_0 |S_x°|, \qquad S°(x, 0) = \psi(x) \tag{2.7}$$

Построив функцию S^μ, фигурирующую в построении μ-характеристических поверхностей детерминированного уравнения, имеем

$$S^\mu = 1 - \int\limits_{|\lambda| \leqslant l_0 + p_0\tau} p^\mu(x - \lambda, \tau)\, d\lambda$$

Здесь $p^\mu(x, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения $S_\tau^\mu = {}^1/_2 \mu^2 S_{xx}^\mu$, определенное формулой (2.4).

Рассмотрим области $\Omega_\mu^+ = \{x, \tau : S_x^\mu \geqslant 0\}$ и $\Omega_\mu^- = \{x, \tau$: $S_x^\mu < 0\}$. Дифференцируя S^μ по x, получим

$$S_x{}^\mu = [\mu\sqrt{2\pi\tau}]^{-1} \exp\left\{-\frac{[x-(l_0+p_0\tau)]^2}{4\mu^2\tau}\right\}\left\{1-\exp\left[\frac{-4x(l_0+p_0\tau)}{4\mu^2\tau}\right]\right\}$$

Отсюда видно, что при всех $\mu > 0$ множества Ω_μ^+ совпадают с полуплоскостью $x \geqslant 0$ и множество Ω_μ^- — с полуплоскостью $x < 0$. Следовательно, выполняются условия предположения 1 и μ-характеристики уравнения (2.7) при всех $\mu \geqslant 0$ тождественно совпадают и задаются выражениями $\eta = x - p_0\tau$, когда $x \geqslant 0$ и $\eta = -(x + p_0\tau)$, когда $x < 0$, $\eta = \mathrm{const}$. Эти прямые, в силу определения 1, являются характеристиками уравнения (2.7). Прямые $l_0 = x - p_0\tau$ и $l_0 = -(x + p_0\tau)$, определяющие линию разрыва значений функции S°, представляют собой характеристики детерминированного уравнения Беллмана (2.7), выходящие из точек ($x = l_0, \tau = 0$) и ($x = -l_0, \tau = 0$), и, таким образом, выполняется предположение 2. Легко проверяется, что выполнены условия предположения 3. Из определения 2 следует, что $\partial\eta / \partial x = 1$, когда $x \geqslant 0$ и $\partial\eta / \partial x = -1$, когда $x < 0$, т. е. выполняется предположение 4.

3. Построение приближенного решения. Для любой точки (x, z, τ) будем искать решение краевой задачи (1.9), (1.10) как функцию от значения постоянной η такой, что $\eta = A(x, z, \tau)$ и значений z, τ.

В силу предположения 4 и по теореме о неявной функции следует, что $x = s(\eta, z, \tau)$; поэтому решение задачи (1.9) можно рассматривать как функцию переменных (η, z, τ). Обозначим эту функцию через $S^\varepsilon(\eta, z, \tau)$. Положим $\eta_1 = \eta / \varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$S_x{}^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial x}, \quad S^\varepsilon_{z_i} = \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial z_i} + S^\varepsilon_{z_i}, \qquad i = 1, \dots, n$$

$$S_\tau{}^\varepsilon = S_\tau{}^\varepsilon| + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial\tau}, \quad S^\varepsilon_{z_i z_j} = \frac{1}{\varepsilon^2} S^\varepsilon_{\eta_1\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial z_i}\frac{\partial\eta}{\partial z_j} +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1} \frac{\partial^2\eta}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{z_i\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial z_j} + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1 z_j} \frac{\partial\eta}{\partial z_i} + S^\varepsilon_{z_i z_j}$$

$$i, j = 1, \dots n$$

Учитывая равенство (2.5), определяющее решение детерминированной задачи, можно предположить, что

$$S^\varepsilon_{\eta_1}(\eta_1, z, \tau) \geqslant 0, \qquad (x, z, \tau) \in \Omega \tag{3.1}$$

Поэтому для того чтобы искомая функция S удовлетворяла уравнению (1.9) необходимо, чтобы

$$S_\tau{}^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1}\left[\frac{\partial\eta}{\partial\tau} + p(\tau)\left|b^1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right| - a^1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right] + \frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i, j=1}^{n} f_{ij}{}^1 \times$$

$$\times \left[\frac{1}{\varepsilon^2} S^\varepsilon_{\eta_1\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial z_j}\frac{\partial\eta}{\partial z_i} + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1} \frac{\partial^2\eta}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{z_i\eta_1} \frac{\partial\eta}{\partial z_j} + \frac{1}{\varepsilon} S^\varepsilon_{\eta_1 z_j} \frac{\partial\eta}{\partial z_i} + S^\varepsilon_{z_i z_j}\right]$$

Здесь теми же буквами обозначены функции, получающиеся при замене переменных $x = s(\eta, z, \tau)$.

Так как $\eta = A(x, z, \tau)$ — характеристики детерминированного уравнения Беллмана (2.2), то

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = -p(\tau)\left|b^1 \frac{\partial\eta}{\partial x}\right| + a^1 \frac{\partial\eta}{\partial x}$$

В результате получим, что функция S^ε должна удовлетворять краевой задаче

$$S_\tau^\varepsilon = \frac{1}{2} E_1 S^\varepsilon_{\eta_1\eta_1} + \frac{\varepsilon}{2} E_2 S^\varepsilon_{\eta_1} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^1 \frac{\partial\eta}{\partial z_j} S^\varepsilon_{\eta_1 z_i} + \tag{3.2}$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^1 S^\varepsilon_{z_i z_j}, \qquad S^\varepsilon(\eta_1, z, \tau)|_{\tau=0} = \psi(x)$$

Здесь

$$E_1 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^1 \frac{\partial\eta}{\partial z_i \partial z_j}, \qquad E_2 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^1 \frac{\partial^2\eta}{\partial z_i \partial z_j}$$

Будем искать решение задачи (3.2) в виде асимптотического ряда по степеням

$$S^\varepsilon(\eta_1, z, \tau) = S^1(\eta_1, z, \tau) + \varepsilon S^2(\eta_1, z, \tau) + O(\varepsilon^2) \tag{3.3}$$

Подставляя функцию S^ε, представленную в виде (3.3), в уравнение (3.2), получим, что функция S^1 должна удовлетворять краевой задаче

$$S_\tau^1 = \frac{1}{2} E_1 S^1_{\eta_1\eta_1}, \qquad S^1(\eta_1, z, \tau)|_{\tau=0} = \psi(x) \tag{3.4}$$

и условию

$$S^1_{\eta_1} \geqslant 0 \tag{3.5}$$

Функция S^2 должна быть выбрана так, что

$$S_\tau^2 = \frac{1}{2} E_1 S^2_{\eta_1\eta_1} + G(\eta_1, z, \tau, S^1), \qquad S^2(\eta_1, z, \tau)|_{\tau=0} = 0$$

$$G(\eta_1, z, \tau, S^1) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^1 S^1_{\eta_1 z_i} + E_2 S^1_{\eta_1} \tag{3.6}$$

Предположим, что функции S^1 и S^2, удовлетворяющие краевым задачам (3.4) и (3.6), соответственно, найдены. Рассмотрим функцию $W = S^1 + \varepsilon S^2$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть выполняется условие (1.6) и функция S^ε есть решение задачи (3.2), удовлетворяющее условию (3.1). Тогда

$$|S^\varepsilon - W| = O(\varepsilon^2)$$

Доказательство опирается на следующую лемму, непосредственно вытекающую (после замены $T - t = \tau$) из теоремы 10 (см. [9], стр. 16).

Лемма. Пусть непрерывная и ограниченная функция является решеним следующей задачи Коши:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(\tau, x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\tau, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \gamma(\tau, x) = \delta(\tau, x) + \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

причем для всех $\tau \in [0, T]$, $x \in R^n$ матрица α_{ij} положительно определена. Имеем $|v_0(x)| \leqslant K_1$, $|\delta(\tau, x)| \leqslant K_2$, $|\gamma(\tau; x)| \leqslant K_3$, а коэффициенты α_{ij}, β_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям

$$|\alpha_{ij}(\tau, x)| \leqslant K_4(\|x\|^2 + 1), \quad |\beta_i(\tau, x)| \leqslant K_5(\|x\| + 1)^{1/2}$$

Здесь $K_1, \ldots, K_5$ — неотрицательные постоянные. При этих предположениях

$$|v(\tau, x)| \leqslant (K_1 + K_2\tau) \exp[K_3\tau], \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \; x \in R^n$$

Действительно, подставляя функцию $S^\varepsilon - W$ в уравнение (3.2) и используя тот факт, что

$$(S^\varepsilon - W)|_{\tau=0} = 0$$

непосредственно из леммы получим требуемую оценку.

Рассмотрим некоторые возможные случаи реализации краевых задач (3.4) и (3.6)

1°. Функции E_1 и E_2 — функции переменных z и τ, значения $\eta \in (-\infty, +\infty)$. Краевая задача (3.4) примет в этом случае вид

$$S_\tau^1 = \frac{1}{2} E_1(z, \tau) S_{\eta_1\eta_1}, \quad S^1(\eta_1, z, \tau)|_{\tau=0} = \psi(x) \tag{3.7}$$

Фундаментальное решение задачи определяется выражением

$$p(\eta_1, z, \tau) = [2\sqrt{\pi E_1'(z, \tau)}]^{-1} \exp\left[-\frac{\eta_1^2}{4E_1'(z, \tau)}\right]$$

$$E_1'(z, \tau) = \int_0^\tau E_1(z, \lambda)\, d\lambda$$

Пусть $S^\circ(\eta)$ — решение соответствующего детерминированного уравнения Беллмана. Тогда решение краевой задачи (3.7) дается формулой

$$S^1(\eta_1, z, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^\circ(\lambda) p(\eta_1 - \lambda, z, \tau)\, d\lambda \tag{3.8}$$

Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что функция S^1, построенная по формуле (3.8), — решение уравнения (3.7). Из свойств фундаментального решения следует, что выполняется краевое условие (3.7). Проверим выполнение условия (3.5)

$$S_{\eta_1}^1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} p(\eta_1 - \lambda, z, \tau)\right] S^\circ(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial\lambda} S^\circ(\lambda)\right] p(\eta_1 - \lambda, z, \tau)\, d\lambda$$

Здесь производная от функции S° понимается в обобщенном смысле В силу условий предположения 3 получим, что $S_{\eta_1}^1 \geqslant 0$.

Краевая задача (3.6) примет вид

$$S_\tau^2 = {}^1/_2 E_1(z, \tau) S^2_{\eta_1\eta_1} + G(z, \tau, S^1), \quad S^2(\eta_1, z, \tau)|_{\tau=0} = 0$$

Решение этой задачи дается формулой (см., например, [10])

$$S^2(\eta_1, z, \tau) = \int_0^\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda, z, \lambda_1, S^1(\lambda, z, \lambda_1))\, p(\eta_1 - \lambda, z, \tau - \lambda_1)\, d\lambda\, d\lambda_1$$

В случае, если значения постоянной η, определяющей семейства характеристик уравнения (2.2), меняется в следующих интервалах:

$$-\infty < \eta_1 < \eta \leqslant +\infty, \quad -\infty < \eta \leqslant \eta_2 < +\infty, \quad -\infty < \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \leqslant \eta_2 < +\infty$$

то в каждом из этих случаев необходимо задавать краевые условия на концах $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ и $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ соответственно. При этом могут возникать первая, вторая или третья краевая задача для параболического уравнения (3.4). Методы решения таких задач хорошо разработаны и изложены, например, в монографиях [8, 10].

2°. Функции E_1 и E_2 зависят от переменной η_1. В этом случае для решения краевых задач (3.4) и (3.6) применяется метод построения фундаментального решения, предложенный Леви (см. [10], стр. 27). В результате краевая задача сводится к решению интегрального уравнения второго рода, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Замечание 4. Если в исходной постановке задачи (1.1), (1.2) разыскивается максимум функции $\psi\,[x\,(T)]$, то в дополнение к условиям а′), б′) предположения 3 условие (3.1) принимает вид

$$S_{\eta_1}{}^{\varepsilon}(\eta_1, z, \tau) \leqslant 0, \qquad (x, z, \tau) \in \Omega$$

4. Приближенное решение уравнения Беллмана одной модельной задачи оптимального управления входом в атмосферу. Пусть уравнение движения материальной точки имеет вид

$$d^2x \,/\, dt^2 = u\,(t)\,\xi\,(t) \tag{4.1}$$

Здесь $0 \leqslant t \leqslant T$, $u\,(t)$ — управляющая функция, x — скаляр, $|\,u\,(t)\,| \leqslant u_0$, $\xi\,(t)$ — случайная функция, представляющая стационарный гауссовский процесс с математическим ожиданием, равным единице, и корреляционной функцией

$$M\,\{[\xi(t) - 1]\,[\xi(t+\tau) - 1]\} = \sigma^2 e^{-k\tau}, \qquad \tau > 0$$

характеризующей поведение случайной среды, в которой происходит движение. Известны начальные значения $x\,(0)$ и $x^{\boldsymbol\cdot}\,(0)$, требуется построить способ управления, который максимизировал бы вероятность попадания в конечный момент времени T в область $[-\delta, +\delta]$, $\delta > 0$ на оси x. Предполагается, что процесс $\xi\,(t)$ — марковский.

Тогда оптимальное в указанном смысле управление зависит от x, x' и ξ. Положим $x_1 = x + x^{\boldsymbol\cdot}\,(T - t)$, $y = \xi$. Уравнение (4.1) запишется в виде

$$x_1^{\boldsymbol\cdot} = (T - t)\,yu, \qquad y^{\boldsymbol\cdot} = -k\,(y - 1) + \sigma\sqrt{2k}\;\xi_1$$

Здесь ξ_1 — гауссовский белый шум. Последнее уравнение необходимо понимать в смысле Ито. Уравнение Беллмана и начальное условие в этом случае имеют вид ([1, 2])

$$S_\tau = \max_{|u| \leqslant u_0} \{\tau y u S_{x_1}\} - k\,(y - 1)\,S_y + \frac{k\sigma^2}{2} S_{yy} \tag{4.2}$$

$$S\,(x_1, y, 0) = \psi\,(x_1) = \begin{cases} 1, & |x_1| \leqslant \delta \\ 0, & |x_1| > \delta \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь $T - t = \tau$ — обратное время.

Вычисляя в (4.2) максимум, получим

$$u = u_0 \operatorname{sign}(yS_{x_1}), \quad \max_{|u|\leqslant u_0} \{\tau y u S_{x_1}\} = u_0\tau\,|\,yS_{x_1}|$$

Введем новую переменную $y_1 = (y-1)e^{k\tau}$.

Краевая задача (4.2), (4.3) в области $\Omega = \{x_1,\ y_1,\ \tau\colon -\infty < x_1 < +\infty,\ -\infty < y_1 < +\infty,\ 0 < \tau \leqslant T\}$ примет вид

$$S_\tau = u_0\tau\,|(1+y_1e^{-k\tau})S_{x_1}| + \frac{\sigma^2 k}{2}e^{2k\tau}S_{y_1y_1}$$

$$S(x_1,\ y_1,\ 0) = \psi(x) \tag{4.4}$$

В детерминированном случае величина y, моделирующая флуктуации атмосферы, постоянна, и уравнение Беллмана запишется в виде

$$S_\tau{}^\circ = u_0\tau\,|\,yS_{x_1}{}^\circ|, \qquad S^\circ(x_1, y, 0) = \psi(x_1) \tag{4.5}$$

Здесь S° — функция Беллмана, соответствующая детерминированной задаче (4.1). Решение детерминированной задачи дается формулой

$$S^\circ = \begin{cases} 1, & |x_1| \leqslant \delta + {}^1/_2u_0\tau^2\,|\,y\,| \\ 0, & |x_1| > \delta + {}^1/_2u_0\tau^2\,|\,y\,| \end{cases} \tag{4.6}$$

Формула (4.6) отражает тот факт, что область, из которой к моменту времени $t = T$ можно попасть в интервал $[-\delta,\ \delta]$ с увеличением времени $t \leqslant T$ (т. е. с уменьшением значения $\tau = T - t$), сужается до самого интервала $[-\delta,\ \delta]$, причем граница этой области при каждом фиксированном значении y задается уравнением $|x_1| = \delta + {}^1/_2u_0\tau^2\,|\,y\,|$, являющимся, как будет показано далее, уравнением характеристик, выходящих из точек $(x_1 = \delta,\ \tau = 0)$, $(x_1 = -\delta,\ \tau = 0)$.

Согласно п. 2, рассмотрим фундаментальное решение краевой задачи

$$p_\tau{}^\mu = {}^1/_2\mu^2 p^\mu_{x_1x_1}$$

и построим функцию

$$S^\mu(x_1, y, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S^\circ(\lambda, y, \tau)\, p^\mu(x_1-\lambda, \tau)\, d\lambda \tag{4.7}$$

Здесь $p^\mu(x_1, \tau)$ определена формулой (2.4).

Используя (4.6), последний интеграл можно записать в виде

$$S^\mu = [2\mu\sqrt{\pi\tau}]^{-1}\int_a^b \exp\left[-\frac{(x_1-\lambda)^2}{4\mu^2\tau}\right]d\lambda,\ a = \delta + \frac{1}{2}u_0\tau^2\,|\,y\,|,\ b = -\delta - \frac{1}{2}u_0\tau^2\,|\,y|$$

Поэтому

$$S_{x_1}{}^\mu = [2\mu\sqrt{\pi\tau}]^{-1}\exp\left[-\frac{(x_1+a)^2}{4\mu^2\tau}\right]\left[1-\exp\frac{4x_1a}{4\mu^2\tau}\right],$$

Отсюда видно, что при всех $\mu > 0$, $S^\mu_{x_1} \leqslant 0$, когда $x_1 \geqslant 0$, и $S^\mu_{x_1} > 0$, когда $x_1 > 0$. Следовательно, справедливы требования предположения 1 и в силу определения 1 характеристики уравнения (4.5) задаются уравнениями $\eta = |\,x_1\,| - {}^1/_2\,u_0\tau^2\,|\,y\,|$,

$\eta = \text{const}$. Решение уравнения (4.5), определённое равенством (4.6), запишется в следующем виде:

$$S^\circ(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \leqslant \delta \\ 0 & \eta > \delta \end{cases}$$

и, таким образом, выполняются условия предположения 2. Далее легко проверяется, что выполняются условия а′), б′) предположения 3 и условия (2.6) предположения 4.

Согласно п. 3, будем искать решение задачи (4.4) как функцию S^σ (η, y_1, τ) значений η таких, что $\eta = |x_1| - {}^1/{}_2 u_0 \tau^2 |y|$ величины y_1, τ. Здесь $y = 1 + y_1 e^{-k\tau}$ — переменная величина; полагаем, что фиксированная величина σ достаточно мала. Положим $\eta_1 = \eta / \sigma$ и будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням σ

$$S^\sigma = S^1(\eta_1, y_1, \tau) + \sigma S^2(\eta_1, y_1, \tau) + O(\sigma^2)$$

В силу определения 2

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \begin{cases} 1, & x_1 \geqslant 0 \\ -1, & x_1 < 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y_1} = \frac{1}{2} u_0 \tau^2 e^{-k\tau} \operatorname{sign}(1 + y_1 e^{-k\tau})$$

Из (3.4) следует, что функция S^1 должна удовлетворять краевой задаче

$$S_\tau^1 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2} u_0 \tau^2\right)^2 S^1_{\eta_1\eta_1}, \qquad S^1(\eta_1, y_1, \tau)|_{\tau=0} = \psi(\eta_1)|_{\tau=0} \tag{4.8}$$

В силу замечания 4 должно выполняться условие

$$S_{\eta_1}^1(\eta_1, y_1, \tau) \leqslant 0 \tag{4.9}$$

Краевая задача (4.8) решается в явном виде. Для этого необходимо выписать фундаментальное решение задачи (4.8) и рассмотреть свертку этого решения с решением детерминированного уравнения Беллмана так же, как это сделано в случае 1 п. 3. В итоге получим

$$S^1(\eta_1, \tau) = \left[2\sqrt{\frac{\pi u_0^2 k}{20} \tau^5}\right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} S^\circ(\lambda) \exp\left[-\frac{(\eta_1 - \lambda)^2 20}{4u_0^2 k \tau^5}\right] d\lambda =$$

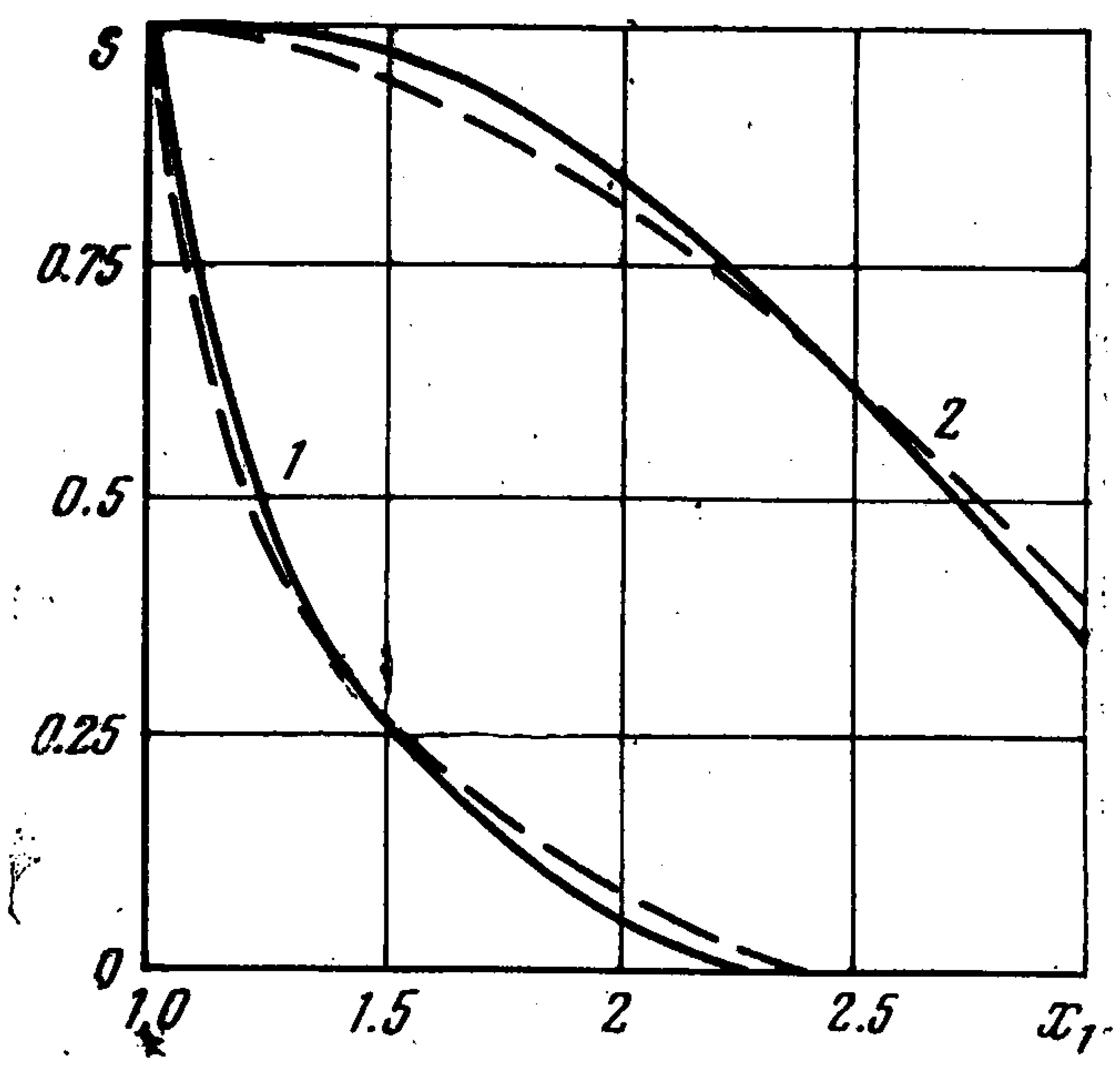
$$= [2\sqrt{\pi M}]^{-1} \int_{-\infty}^{\delta} \exp\left[-\frac{(\eta_1 - \lambda)^2}{4M}\right] d\lambda, \quad M = \frac{u_0^2 k}{20} \tau^5$$

Введя новую переменную z, получим

$$S^1(\eta_1, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{z_1} e^{-z^2/2} dz, \quad z_1 = \frac{\eta_1 - \delta}{2\sqrt{M}} \tag{4.10}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция S^1 — решение краевой задачи (4.8) и удовлетворяет условию (4.9). Функция S^2 должна быть выбрана таким образом, чтобы

$$S_\tau^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{1}{2} u_0 \tau^2\right)^2 S^2_{\eta_1\eta_1}, \qquad S^2_{(\eta_1, y_1, \tau)}|_{\tau=0} = 0$$



Из единственности решения задачи Коши для уравнения теплопроводности следует, что $S^2 = 0$. Формула (4.10) в силу теоремы п. 3 дает приближенное решение задачи (4.4), (4.5), отличающееся от точного на величину порядка $O(\sigma^2)$.

На фигуре проведено сравнение решения, полученного по приближенной формуле (4.10), с результатами численного расчета [2]. Сплошной линией обозначены кривые, полученные численным расчетом. Кривые 1 и 2 соответствуют значениям $y=0.15$ и 1.8 при $\tau = 1.4$, $\sigma = 0.25$, $\delta = 1$, $k = 1$, $u_0 = 1$. Пунктирные линии получены в результате использования приближенной формулы (4.10) и соответствуют тем же значениям параметров y, τ, σ, k, u_0, что и кривые, полученные численно.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за полезные беседы и постоянное внимание и Г. К. Пожарицкого за обсуждение работы.

Поступила 8 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Рясин В. А. Модель управления движением в случайной среде. Космич. исследования, 1970, т. 8, вып. 1.
2. Братусь А. С. О численном решении одной модельной задачи управления движением в случайной среде. Космич. исследования, 1971, т. 9, вып. 4.
3. Мошков Е. М. О точности оптимального управления конечным состоянием. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л. Задачи оптимального управления при неполной информации. Тр. IV Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам, вып. 1. М., 1971.
5. Fleming W. H. Stochastic control for small noise intensities. SIAM J. Control, 1971 vol. 9, № 3.
6. Солянник А. И., Черноусько Ф. Л. Приближенный метод синтеза оптимального управления системой, подтвержденной случайным возмущением. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
7. Fleming W. H. Some Markovian optimisation problems. J. Math. Mech., 1963, vol. 12, No. 1.
8. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., «Наука», 1964.
9. Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 3.
10. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.