Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 534

ПРАКТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В. М. Старжинский

(Москва)

Приложения нормальных форм (историю и библиографию см. в [1]) к нелинейным колебаниям намечены в [2]. Как одну из прикладных задач, укажем исследование по задаче А. Ю. Ишлинского ([3], приложение 2) в статье [4]. Одной из нерешенных задач остался вывод рекуррентных формул для вычисления коэффициентов нормализующих преобразований и нормальных форм. Ниже эти формулы выведены для общего в теории колебаний случая (отсутствие непростых элементарных делителей у матрицы линейной части) на основании теоремы А. Д. Брюно [1].

1. Постановка задачи. Пусть колебательная система описывается автономной системой дифференциальных уравнений n-го порядка, в которой переменные могут быть и комплекснозначными. Предположим, что элементарные делители матрицы ее линейной части — простые. Для колебательных систем с эрмитовыми или унитарными матрицами линейной части последнее условие выполняется в силу теоремы Вейерштрасса (см., например, [5], п. I. 1.14). Будем предполагать, что исходная система уже приведена к диагональному виду и правая часть ее — аналитическая в некоторой окрестности нулевых значений с комплексными, вообще говоря, коэффициентами

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \lambda_\nu x_\nu + \sum_{\varkappa=2}^{\infty} \sum a^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} x_{j_1}\ldots x_{j_\varkappa} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Вектор $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ предполагается отличным от нуля, т. е. имеющим хотя бы одну ненулевую компоненту. Коэффициенты предполагаются симметризованными, т. е.

$$a^\nu_{j_2j_1} = a^\nu_{j_1j_2}, \quad a^\nu_{\{j_1\ldots j_\varkappa\}} = \text{idem} \qquad (\varkappa = 3, 4, \ldots; \ \nu = 1, \ldots, n)$$

и всюду $\{\alpha\beta\ldots\omega\}$ означает любую перестановку натуральных чисел α, β, ..., ω. В (1.1) и всюду, где не оговорено, суммирование происходит по два раза входящим индексам, принимающим значения $1, 2, \ldots, n$ независимо (в силу симметричности коэффициентов) одно от другого.

По теореме А. Д. Брюно ([1], § 0 п. II и гл. I, § 1, п. I) существует обратимое (но, вообще говоря, неоднозначное и в некоторых случаях расходящееся) нормализующее преобразование с комплексными, вообще говоря, коэффициентами (представим его опять-таки в симметризованной форме)

$$x_\nu = y_\nu + \sum_{\varkappa=2}^{\infty} \alpha^\nu_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1}\ldots y_{j_\varkappa} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

$$(\alpha^\nu_{j_2j_1} = \alpha^\nu_{j_1j_2}, \ \alpha^\nu_{\{j_1\ldots j_\varkappa\}} = \text{idem}; \ \varkappa = 3, 4, \ldots; \ \nu = 1, \ldots, n)$$

приводящее систему (1.1) к нормальной форме

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + y_\nu \sum_{(\Lambda\cdot Q)=0} g_{\nu Q} y_1^{q_1} \ldots y_n^{q_n} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Здесь $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ — вектор с целочисленными компонентами, причем

$$q_\nu \geqslant -1, \quad q_j \geqslant 0 \quad (j \neq \nu) \quad (\nu, j = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

а $g_{\nu Q}$ — несимметризованные коэффициенты нормальной формы. Суммирование в (1.3) происходит только по резонансным членам, удовлетворяющим резонансному уравнению

$$(\Lambda \cdot Q) \equiv \lambda_1 q_1 + \ldots + \lambda_n q_n = 0 \tag{1.5}$$

Симметризуем коэффициенты нормальной формы (1.3) и запишем ее в виде

$$\frac{dy_\nu}{dt} = \lambda_\nu y_\nu + \sum_{\varkappa=2}^{\infty} \sum \varphi^\nu_{j_1 \ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} \quad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

$$(\varphi^\nu_{j_2 j_1} = \varphi^\nu_{j_1 j_2}, \ \varphi^\nu_{\{j_1 \ldots j_\varkappa\}} = \text{idem};\ \varkappa = 3, 4, \ldots;\ \nu = 1, \ldots, n)$$

Разумеется, в представлении (1.6) отличные от нуля коэффициенты $\varphi^\nu_{j_1 \ldots j_\varkappa}$ определяются представлением (1.3).

2. Основные тождества. Подставляя (1.2) в (1.1), получим в силу (1.3) следующие формальные тождества:

$$\sum \varphi^\nu_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} + \ldots + \sum \varphi^\nu_{j_1 \ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots + \sum \alpha^\nu_{j_1 j_2} (\dot y_{j_1} y_{j_2} + y_{j_1} \dot y_{j_2}) + \ldots$$

$$\ldots + \sum \alpha^\nu_{j_1 \ldots j_\varkappa} (\dot y_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots + y_{j_1} \ldots y_{j_{\mu-1}} \dot y_{j_\mu} y_{j_{\mu+1}} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$

$$\ldots + y_{j_1} \ldots y_{j_{\varkappa-1}} \dot y_{j_\varkappa}) + \ldots = \lambda_\nu \sum \alpha^\nu_{j_1 j_2} y_{j_1} y_{j_2} + \ldots + \lambda_\nu \sum \alpha^\nu_{j_1 \ldots j_\varkappa} y_{j_1} \ldots y_{j_\varkappa} + \ldots$$

$$\ldots + \sum a^\nu_{j_1 j_2} \Big(\sum \alpha^{j_1}_{j_1^1} y_{j_1^1} + \ldots + \sum \alpha^{j_1}_{j_1^1 \ldots j_\vartheta^1} y_{j_1^1} \ldots y_{j_\vartheta^1} + \ldots +$$

$$+ \sum \alpha^{j_1}_{j_1^1 \ldots j_{k-1}^1} y_{j_1^1} \ldots y_{j_{k-1}^1} + \ldots \Big) \Big(\sum \alpha^{j_2}_{j_1^2} y_{j_1^2} + \ldots +$$

$$+ \sum \alpha^{j_2}_{j_1^2 \ldots j_\vartheta^2} y_{j_1^2} \ldots y_{j_\vartheta^2} + \ldots + \sum \alpha^{j_2}_{j_1^2 \ldots j_{k-1}^2} y_{j_1^2} \ldots y_{j_{k-1}^2} + \ldots) + \ldots +$$

$$+ \sum a^\nu_{j_1 \ldots j_\varkappa} \Big(\sum \alpha^{j_1}_{j_1^1} y_{j_1^1} + \ldots + \sum \alpha^{j_1}_{j_1^1 \ldots j_\vartheta^1} y_{j_1^1} \ldots y_{j_\vartheta^1} + \ldots +$$

$$+ \sum \alpha^{j_1}_{j_1^1 \ldots j_{k-\varkappa+1}^1} y_{j_1^1} \ldots y_{j_{k-\varkappa+1}^1} + \ldots \Big) \ldots \Big(\sum \alpha^{j_\varkappa}_{j_1^\varkappa} y_{j_1^\varkappa} + \ldots +$$

$$+ \sum \alpha^{j_\varkappa}_{j_1^\varkappa \ldots j_\vartheta^\varkappa} y_{j_1^\varkappa} \ldots y_{j_\vartheta^\varkappa} + \ldots + \sum \alpha^{j_\varkappa}_{j_1^\varkappa \ldots j_{k-\varkappa+1}^\varkappa} y_{j_1^\varkappa} \ldots y_{j_{k-\varkappa+1}^\varkappa} + \ldots \Big) + \ldots$$

$$(\nu = 1, \ldots, n)$$

Здесь и ниже в соответствии с (1.2) $\alpha^j{}_h = \delta_{jh}$ $(j, h = 1, \ldots, n)$ (δ_{jh} — символ Кронекера).

Выпишем в этих тождествах члены с k-й степенью переменных, учитывая (1.6)

$$\sum \varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1}\sum_{\mu=1}^{\varkappa}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa} \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa} y_{j_1}\ldots y_{j_{\mu-1}} y_{j_{\mu+1}}\ldots$$

$$\ldots y_{j_\varkappa} \sum_{j_1^\mu,\ldots,j^\mu_{k-\varkappa+1}} \varphi^{j_\mu}_{j_1^\mu\ldots j^\mu_{k-\varkappa+1}} y_{j_1^\mu}\ldots y_{j^\mu_{k-\varkappa+1}} +$$

$$+\sum(\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_k})\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} = \lambda_\nu \sum \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} +$$

$$+\sum_{\varkappa=2}^{k-1}\sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa} a^{\nu}_{i_1\ldots i_\varkappa} \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k}\sum_{j_1^1,\ldots,j^\varkappa_{\mu_\varkappa}} \alpha^{i_1}_{j_1^1\ldots j^1_{\mu_1}}\ldots \alpha^{i_\varkappa}_{j_1^\varkappa\ldots j^\varkappa_{\mu_\varkappa}} \times$$

$$\times y_{j_1^1}\ldots y_{j^1_{\mu_1}}\ldots y_{j_1^\varkappa}\ldots y_{j^\varkappa_{\mu_\varkappa}} + \sum a^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1}\ldots y_{j_k} \qquad (\nu=1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

Здесь $\mu_1, \ldots, \mu_{k-1}$ — натуральные числа. Перейдем к сравнению коэффициентов при $y_{j_1}\ldots y_{j_k}$, где $j_1, \ldots, j_k$ — любая фиксированная последовательность из натуральных чисел, не превышающих n. Образующиеся в ходе вычислений несимметричные коэффициенты должны быть симметризованы, ибо определяемые коэффициенты $\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ и $\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ подчинены этому условию.

В тождествах (2.1), во втором члене слева в каждом слагаемом суммы от $\mu=1$ до $\varkappa$ заменим индексы суммирования следующим образом: $j_1, \ldots, j_{\mu-1}, j_{\mu+1}, \ldots, j_\varkappa$ соответственно на $i_1, \ldots, i_{\varkappa-1}$; индекс j_μ заменим на i, индексы $j_1^\mu, \ldots, j^\mu_{k-\varkappa-1}$ заменим соответственно на $i_\varkappa, i_{\varkappa+1}, \ldots, i_k$. Очевидно, что все слагаемые суммы от $\mu=1$ до $\varkappa$ одинаковы, и поэтому представим ее как $\varkappa$ раз взятое одно из слагаемых. Для симметризации последнего рассмотрим все сочетания $p_1, \ldots, p_{\varkappa-1}$ по $\varkappa-1$ натуральных чисел из $1, \ldots, k$ (их число обозначим $C_k^{\varkappa-1}$). Наконец, индексы суммирования $i_{p_1}, \ldots, i_{p_{\varkappa-1}}$ обозначим через $j_{p_1}, \ldots, j_{p_{\varkappa-1}}$, а оставшиеся из индексов $i_1, \ldots, i_k$ обозначим $j_\varkappa', j_{\varkappa+1}', \ldots, j_k'$.

Итак, проделаны преобразования

$$\sum_{\mu=1}^{\varkappa}\sum_{j_1,\ldots,j_\varkappa,j_1^\mu,\ldots,j^\mu_{k-\varkappa+1}} \alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_\varkappa}\varphi^{j_\mu}_{j_1^\mu\ldots j^\mu_{k-\varkappa+1}} y_{j_1}\ldots y_{j_{\mu-1}} y_{j_{\mu+1}}\ldots y_{j_\varkappa} y_{j_1^\mu}\ldots y_{j^\mu_{k-\varkappa+1}} =$$

$$=\varkappa\sum_{i_1,\ldots,i_k,i} \alpha^{\nu}_{i_1\ldots i_{\varkappa-1}i}\,\varphi^{i}_{i_\varkappa\ldots i_k} y_{i_1}\ldots y_{i_k} = \varkappa\sum_{i=1}^{n}\sum_{j_1,\ldots,j_k}[C_k^{\varkappa-1}]^{-1}\times$$

$$\times S^{p_1,\ldots,p_{\varkappa-1}}_{1,\ldots,k}\,\alpha^{\nu}_{j_{p[1]}\ldots j_{p[\varkappa-1]}i}\,\varphi^{i}_{j_\varkappa'\ldots j_k'} y_{j_1}\ldots y_{j_k} \qquad (\nu=1,\ldots,n) \tag{2.2}$$

где $p[1]\equiv p_1, \ldots, p[\varkappa-1]\equiv p_{\varkappa-1}$.

Здесь $S^{p_1,\ldots,p_{\varkappa-1}}_{1,\ldots,k}$ означает суммирование по всем сочетаниям по $\varkappa-1$ натуральных чисел из $1, \ldots, k$. Заметим, что числа $j_{p_1}, \ldots, \ldots, j_{p_{\varkappa-1}}$ могут быть (и притом даже все) одинаковы, ибо они (впрочем как и $j_\varkappa', j_{\varkappa+1}', \ldots, j_k'$) пробегают при суммировании значения $1, \ldots, n$

независимо одно от другого. Что же касается индексов у i или j, то все они различны — вот почему типом соединений являются сочетания.

Перейдем к преобразованию второго члена справа в (2.1). Заменим индексы суммирования $j_1^1, \ldots, j_{\mu_1}^1, \ldots, j_1^\varkappa, \ldots, j_{\mu_\varkappa}^\varkappa$ $(\mu_1 + \ldots + \mu_\varkappa = k)$ на $j_1, \ldots, j_k$. Для симметризации коэффициента при $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$ рассмотрим все сочетания $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ по μ_1 натуральных чисел из $1, \ldots, k$ (их число обозначим $C_k^{\mu_1}$), затем все сочетания $p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}$ по μ_2 натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ (их число обозначим $C_{k-\mu_1}^{\mu_2}$) и т. д. вплоть до сочетаний $p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}+1}, \ldots, p_{k-\mu_\varkappa}$ по $\mu_{\varkappa-1}$ из оставшихся $\mu_{\varkappa-1} + \mu_\varkappa$ натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}, p_{\mu_1+1}, \ldots, \ldots, p_{k-\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa-1}}$ (их число обозначим $C_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}^{\mu_{\varkappa-1}}$). Итак

$$\sum_{j_1^1,\ldots,j_{\mu_\varkappa}^\varkappa} \alpha^{i_1}_{j_1^1\ldots j_{\mu_1}^1} \ldots \alpha^{i_\varkappa}_{j_1^\varkappa\ldots j_{\mu_\varkappa}^\varkappa} y_{j_1^1} \ldots y_{j_{\mu_1}^1} \ldots y_{j_1^\varkappa} \ldots y_{j_{\mu_\varkappa}^\varkappa} =$$

$$= \sum_{j_1,\ldots,j_k} [C_k^{\mu_1} C_{k-\mu_1}^{\mu_2} \ldots C_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}^{\mu_{\varkappa-1}}]^{-1} S_{1,\ldots,k\setminus p[1],\ldots,p[k-\mu(\varkappa)-\mu(\varkappa-1)]}^{p[k-\mu(\varkappa)-\mu(\varkappa-1)+1],\ldots,p[k-\mu(\varkappa)]} \ldots$$

$$\ldots S_{1,\ldots,k\setminus p[1],\ldots p[\mu(1)]}^{p[\mu(1)+1],\ldots,p[\mu(1)+\mu(2)]} S_{1,\ldots,k}^{p[1],\ldots,p[\mu(1)]} \alpha^{i_1}_{j_{p[1]}\ldots j_{p[\mu(1)]}} \alpha^{i_2}_{j_{p[\mu(1)+1]}\ldots j_{p[\mu(1)+\mu(2)]}} \ldots$$

$$\ldots \alpha^{i_{\varkappa-1}}_{j_{p[k-\mu(\varkappa)-\mu(\varkappa-1)+1]}\ldots j_{p[k-\mu(\varkappa)]}} \alpha^{i_\varkappa}_{j_{p[k-\mu(\varkappa)+1]}\ldots j_{p[k]}} y_{j_1} \ldots y_{j_k} \tag{2,3}$$

где здесь и ниже обозначено $\mu(\varkappa) \equiv \mu_\varkappa$, $p[m] \equiv p_m$.

Здесь $S_{1,\ldots,k}^{p[1],\ldots p[\mu(1)]}$ означает суммирование по всем сочетаниям по μ_1 натуральных чисел $p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ из $1, \ldots, k$; $S_{1,\ldots k\setminus p[1],\ldots p[\mu(1)]}^{p[\mu(1)+1],\ldots p[\mu(1)+\mu(2)]}$ — суммирование по всем сочетаниям по μ_2 натуральных чисел $p_{\mu_1+1}, \ldots, p_{\mu_1+\mu_2}$ из оставшихся $k - \mu_1$ натуральных чисел $1, \ldots, k \setminus p_1, \ldots, p_{\mu_1}$ и т. д.

Теперь, используя (2.2) и (2.3), запишем тождества (2.1) в симметризованном виде

$$\sum \varphi^\nu_{j_1\ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \sum (2.2) + \sum (\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu) \alpha^\nu_{j_1\ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} =$$

$$= \sum a^\nu_{j_1\ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa=1}^{n} a^\nu_{i_1\ldots i_\varkappa} \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k} \sum \tag{2.4}$$

Здесь для краткости через Σ (2.2) и Σ (2.3) обозначены вся правая часть последнего равенства (2.2) и вся правая часть (2.3) соответственно.

3. Вычислительная альтернатива. Введем символ

$$\Delta^\nu_{j_1\ldots j_k} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \lambda_\nu = \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} \\ 0, & \text{если} \quad \lambda_\nu \neq \lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} \end{cases} \tag{3.1}$$
$$(\nu, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n)$$

Имеет место следующая альтернатива.

1) Пусть значения $\nu, j_1, \ldots, j_k$ (и реальных параметров исходной колебательной системы, от которых зависят $\lambda_\nu, \lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}$) таковы, что

круглая скобка в последней сумме левой части тождеств (2.4) отлична от нуля, т. е. $\Delta^{\nu}_{j_1,\ldots,j_k} = 0$. Сравнивая члены с $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$ в левой и правой частях тождеств (2.4), заметим, что при сделанном допущении таковой член из первой суммы слева заведомо отсутствует. Действительно, обращаясь к представлению (1.3), запишем этот член в виде

$$y_\nu \varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} y_{j_1} \ldots y_{j_k} y_\nu^{-1}$$

Для этого члена $(\Lambda \cdot Q) = \lambda_j \cdot 1 + \ldots + \lambda_{j_k} \cdot 1 + \lambda_\nu \cdot (-1) \neq 0$, а согласно представлению (1.3), в первую сумму слева в (2.4) входят только те члены, для которых $(\Lambda \cdot Q) = 0$. Приравнивая в тождествах (2.4) коэффициенты при $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$, получим формулу для коэффициентов нормализующего преобразования (1.2)

$$\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = \frac{1 - \Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}}{\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu} B^{\nu}_{j_1\ldots j_k} \tag{3.2}$$

$$(\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu \neq 0; \quad \nu, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n)$$

$$\begin{aligned} B^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = a^{\nu}_{j_1\ldots j_k} + \sum_{\varkappa=2}^{k-1} \Biggl\{ \sum_{i_1,\ldots,i_\varkappa=1}^{n} a^{\nu}_{i_1\ldots j_\varkappa} \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_\varkappa=k} [C_k^{\mu_1} C_{k-\mu_1}^{\mu_2} \ldots C^{\mu_{\varkappa-1}}_{\mu_{\varkappa-1}+\mu_\varkappa}]^{-1} \times \\ \times S^{p[k-\mu(\varkappa)-\mu(\varkappa-1)+1],\ldots,p[k-\mu(\varkappa)]}_{1,\ldots,k\setminus p[1],\ldots,p[k-\mu(\varkappa)-\mu(\varkappa-1)]} \ldots S^{p[\mu(1)+1],\ldots,p[\mu(1)+\mu(2)]}_{1,\ldots,k\setminus p[1],\ldots,p[\mu(1)]} S^{p[1],\ldots,p[\mu(1)]}_{1,\ldots,k} \times \\ \times \alpha^{i_1}_{j_{p[1]}\ldots j_{p[\mu(1)]}} \alpha^{i_2}_{j_{p[\mu(1)+1]}\ldots j_{p[\mu(1)+\mu(2)]}} \ldots \alpha^{i_{\varkappa-1}}_{j_{p[k-\mu(\varkappa)-\mu(\varkappa-1)+1]}\ldots j_{p[k-\mu(\varkappa)]}} \times \\ \times \alpha^{i_\varkappa}_{j_{p[k-\mu(\varkappa)+1]}\ldots j_{p[k]}} - \varkappa [C_k^{\varkappa-1}]^{-1} S^{p_1,\ldots,p_{\varkappa-1}}_{1,\ldots,k} \sum_{i=1}^{n} \alpha^{\nu}_{j_{p[1]}\ldots j_{p[\varkappa-1]}} \varphi^{i}_{j_{\varkappa'}\ldots,j_{k'}} \Biggr\} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$(\nu, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n)$$

2) Допустим, значения $\nu, j_1, \ldots, j_k$ таковы, что круглая скобка в последней сумме левой части тождеств (2.4) равна нулю, т. е. $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = 1$. Это означает, во-первых, что величина $\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ может быть выбрана любой, в частности, равной нулю или определенной по непрерывности по значениям реальных параметров. Во-вторых, сравнивая члены с $y_{j_1} \ldots y_{j_k}$ в левой и правой частях тождеств (2.4), получим теперь формулу для симметризованных коэффициентов нормальной формы (1.6)

$$\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = \Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k} B^{\nu}_{j_1\ldots j_k} \quad (\nu, j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

где $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ (см. (3.1)), а $B^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ (см. (3.3)).

Замечания. 1°. В формулах (3.2) и (3.4) $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ играет роль сторожа. Действительно, по формуле (3.4) при $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = 0$ имеем $\varphi^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = 0$ (случай 1)). При $\Delta^{\nu}_{j_1\ldots j_k} = 1$ $(\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_k} - \lambda_\nu = 0)$ дробь перед квадратной скобкой в формуле (3.2) теряет смысл, превращаясь в неопределенность, напоминая читателю, что при этом значение $\alpha^{\nu}_{j_1\ldots j_k}$ может быть выбрано любым.

2°. Пусть индексы $j_1, \ldots, j_k$ расположены так, что первые χ $(1 \leqslant \chi \leqslant k)$ из них различны и пусть j_1 встречается m_{j_1} раз,..., j_χ встречается m_{j_χ} раз $(m_{j_1} + \ldots + m_{j_\chi} = k)$.

Число N различных размещений этих индексов

$$N = \frac{k!}{m_{j_1}! \ldots m_{j_\chi}!}$$

Это означает, что в сумме

$$\sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{n} a^{\nu}_{j_1 \ldots j_k} x_{j_1} \ldots x_{j_k}$$

будет всего N подобных членов, содержащих $x_{j_1} \ldots x_{j_k}$. Поэтому N и есть множитель при переходе от симметризованных коэффициентов к обычным, т. е. когда все одночлены в сумме различны.

3°. По вопросам сходимости нормализующих преобразований отсылаем читателя к статье А. Д. Брюно [1].

4. Формулы для коэффициентов при квадратичных и кубичных членах. При $k = 2$ формулы (3.2) — (3.4) дадут симметризованные коэффициенты квадратичных членов нормализующего преобразования (1.2)

$$\alpha^{\nu}_{j_1 j_2} = \frac{a^{\nu}_{j_1 j_2}}{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu} \qquad (\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu \neq 0;\ \nu, j_1, j_2 = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

и нормальной формы (1.6)

$$\varphi^{\nu}_{j_1 j_2} = a^{\nu}_{j_1 j_2} \qquad (\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu = 0;\quad \nu, j_1, j_2 = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

Здесь $a^{\nu}_{j_1 j_2}$ — симметризованные квадратичные коэффициенты в (1.1) ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ см. там же). Подчеркнем, что по определению нормальной формы $\varphi^{\nu}_{j_1 j_2} = 0$ для тех значений ν, j_1, j_2, взятых из $1, \ldots, n$, при которых $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu \neq 0$. С другой стороны, при $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu = 0$ коэффициенты $\alpha_{j_1 j_2}{}^{\nu}$ могут быть выбраны любыми.

Для кубичных коэффициентов в (1.2) и (1.6) будем иметь из формул (3.2) — (3.4) при $k = 3$

$$\alpha^{\nu}_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} - \lambda_\nu} \Big\{ a^{\nu}_{j_1 j_2 j_3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} [a^{\nu}_{j_1 i} \alpha^{i}_{j_2 j_3} +$$
$$+ a^{\nu}_{j_2 i} \alpha^{i}_{j_3 j_1} + a^{\nu}_{j_3 i} \alpha^{i}_{j_1 j_2} - (\alpha^{\nu}_{j_1 i} \varphi^{i}_{j_2 j_3} + \alpha^{\nu}_{j_2 i} \varphi^{i}_{j_3 j_1} + \alpha^{\nu}_{j_3 i} \varphi^{i}_{j_1 j_2})] \Big\} \tag{4.3}$$

$$(\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} - \lambda_\nu \neq 0;\quad \nu, j_1, j_2, j_3, = 1, \ldots, n)$$

$$\varphi^{\nu}_{j_1 j_2 j_3} = a^{\nu}_{j_1 j_2 j_3} + \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{n} [a^{\nu}_{j_1 i} \alpha^{i}_{j_2 j_3} + a^{\nu}_{j_2 i} \alpha^{i}_{j_3 j_1} + a^{\nu}_{j_3 i} \alpha^{i}_{j_1 j_2} -$$
$$- (\alpha^{\nu}_{j_1 i} \varphi^{i}_{j_2 j_3} + \alpha^{\nu}_{j_2 i} \varphi^{i}_{j_3 j_1} + \alpha^{\nu}_{j_3 i} \varphi^{i}_{j_1 j_2})] \tag{4.4}$$

$$(\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} - \lambda_\nu = 0;\quad \nu, j_1, j_2, j_3 = 1, \ldots, n)$$

Подчеркнем, что и здесь в силу определения нормальной формы (1.3) имеем $\varphi^{\nu}_{j_1 j_2 j_3} = 0$ при $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} - \lambda_\nu \neq 0$. Коэффициенты $\alpha^{\nu}_{j_1 j_2 j_3}$ нормализующего преобразования (1.2) при $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} - \lambda_\nu = 0$ могут быть выбраны любыми.

Замечание. Покажем, что если все произвольные квадратичные коэффициенты в (1.2) выбирались нулями, т. е. если $\alpha^{\nu}_{j_1 j_2} = 0$ при $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu = 0$, то все слагаемые в круглой скобке (4.4) равны нулю. Покажем, например, что $\alpha^{\nu}_{j_1 i} \varphi^{i}_{j_2 j_3} = 0$ $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n)$. Допустим сначала, что $\Delta^{i}_{j_2 j_3} = 0$ (см. (3.1)), тогда из (3.4) следует, что $\varphi^{i}_{j_2 j_3} = 0$

для этих значений i, j_2, j_3, и наше утверждение справедливо. Остается рассмотреть те значения i, j_2, j_3, для которых $\Delta^i_{j_2j_3} = 1$, т. е. $\lambda_i = \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3}$.

Из (4.4) имеем $\lambda_\nu = \lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3}$. Вычитая последние равенства, получим $\lambda_{j_1} + \lambda_i - \lambda_\nu = 0$ и в силу обусловленного выбора имеем $\alpha^\nu_{j_1i} = 0$, т. е. опять-таки $\alpha^\nu_{j_1i}\varphi^i_{j_2j_3} = 0$. Для остальных слагаемых в круглой скобке (4.4) доказательство аналогично, ибо они получаются из первого круговой перестановкой индексов j_1, j_2, j_3.

Итак, если все произвольные квадратичные коэффициенты нормализующего преобразования (1.2) выбраны нулями, т. е. если

$$\alpha^\nu_{j_1j_2} = 0 \quad (\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} - \lambda_\nu = 0;\ \nu, j_1, j_2 = 1, \ldots, n)$$

или если квадратичные члены в нормальной форме (1.3) отсутствуют, то формула (4.4) упростится

$$\varphi^\nu_{j_1j_2j_3} = a^\nu_{j_1j_2j_3} + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n}[a^\nu_{j_1i}\alpha^i_{j_2j_3} + a^\nu_{j_2i}\alpha^i_{j_3j_1} + a^\nu_{j_3i}\alpha^i_{j_1j_2}] \tag{4.5}$$

$$(\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} - \lambda_\nu = 0;\ \nu, j_1, j_2, j_3 = 1, \ldots, n)$$

Формулы (4.3) — (4.5) уточняют формулы (2.4) — (2.6) в [4].

5. Формулы для коэффициентов при четвертых степенях. При $k = 4$ формула (3.3) даст

$$B^\nu_{j_1j_2j_3j_4} = a^\nu_{j_1j_2j_3j_4} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Sa^\nu_{j_1i}\alpha^i_{j_2j_3j_4} - S\alpha^\nu_{j_1i}\varphi^i_{j_2j_3j_4} +$$

$$+ Sa^\nu_{j_1j_2i}\alpha^i_{j_3j_4} - S\alpha^\nu_{j_1j_2i}\varphi^i_{j_3j_4}) + \frac{1}{6}\sum_{i,h=1}^{n} S\alpha^i_{j_1j_2}\alpha^h_{j_3j_4}a^\nu_{ih}$$

Здесь S означает сумму по всем сочетаниям индексов у j в первом сомножителе из чисел 1, 2, 3, 4. Для первых двух сумм это сводится к круговой перестановке индексов j_1, j_2, j_3, j_4, для остальных сумм у первых сомножителей индексы j_1j_2 заменяются последовательно на j_1j_3, j_1j_4, j_2j_3, j_2j_4, j_3j_4. Будем иметь для симметризованных коэффициентов нормализующего преобразования (1.2) по формуле (3.2)

$$\alpha^\nu_{j_1j_2j_3j_4} = \frac{1 - \Delta^\nu_{j_1j_2j_3j_4}}{\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} + \lambda_{j_4} - \lambda_\nu} B^\nu_{j_1j_2j_3j_4}$$

$$(\nu, j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \ldots, n)$$

где $\Delta^\nu_{j_1j_2j_3j_4}$ определены в (3.1). При $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \lambda_{j_3} + \lambda_{j_4} - \lambda_\nu = 0$ соответствующие $\alpha^\nu_{j_1j_2j_3j_4}$ могут быть выбраны любыми. Наконец, формула (3.4) даст симметризованные коэффициенты нормальной формы (1.6)

$$\varphi^\nu_{j_1j_2j_3j_4} = \Delta^\nu_{j_1j_2j_3j_4}B^\nu_{j_1j_2j_3j_4} \quad (\nu, j_1, j_2, j_3, j_4 = 1, \ldots, n)$$

Поступила 13 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, ч. I, 1971, т. 25; ч. II, 1972, т. 26.
2. Брюно А. Д. Нормальная форма нелинейных колебаний. Аналитические методы теории нелинейных колебаний, т. 1 (Тр. V межд. конф. по нелин. колеб.), Киев, ин-т матем. АН УССР, 1970.
3. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем. М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Старжинский В. М. О нормальных формах четвертого порядка нелинейных колебаний. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 1.
5. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., «Наука», 1972.