Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ С КВАЗИЦИКЛИЧЕСКИМИ КООРДИНАТАМИ И МЕХАНИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Показано, что об устойчивости установившихся движений систем с квазициклическими координатами можно судить по устойчивости равновесия позиционной подсистемы при постоянных (неварьируемых) квазициклических обобщенных скоростях. Это позволяет игнорировать степени свободы, соответствующие квазициклическим координатам, и использовать результаты Пуанкаре о смене устойчивости при бифуркациях равновесий, принимая за параметры квазициклические скорости. Примером систем рассмотренного класса являются электромеханические системы, не содержащие емкостей. Для них указанный выше результат справедлив и при нелинейной связи между B и H в магнетике.

В случае циклических координат судить об устойчивости стационарного движения по устойчивости равновесия позиционной подсистемы можно с помощью теоремы Рауса, обобщенной Ляпуновым, и добавлений к ней [1]. Этот случай, однако, существенно отличен от рассмотренного тем, что постоянными считаются циклические импульсы, а не скорости.

1. Пусть дана система с голономными стационарными связями, описываемая m квазициклическими $(q_1, \ldots, q_m)$ и $n - m$ позиционными $(q_{m+1}, \ldots, q_n)$ координатами (согласно [2], гл. 7, п. 19, координату называем квазициклической, если она не входит в выражения для кинетической энергии и обобщенных сил, а отвечающая ей обобщенная сила отлична от нуля). Предположим, что квазициклическим координатам отвечают обобщенные силы двух родов: диссипативные силы, зависящие только от квазициклических обобщенных скоростей, и постоянные силы. Обобщенные силы, отвечающие позиционным координатам, считаем потенциальными; о влиянии диссипации по позиционным координатам будет сказано далее. «Позиционная» подсистема может быть и системой с распределенными параметрами.

Кинетический потенциал системы L и диссипативная функция F имеют вид

$$L = T - \Pi = T_1 + U + T_2 - \Pi$$
$$\Pi = \Pi(q_{m+1}, \ldots, q_n), \quad F = F(q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot})$$
$$T_1 = \frac{1}{2}\sum_{r, s=1}^{m} a_{rs}(q_{m+1}, \ldots, q_n)\, q_r^{\cdot} q_s^{\cdot}$$
$$U = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n-m} a_{rm+s}(q_{m+1}, \ldots, q_n)\, q_r^{\cdot} q_{m+s}^{\cdot}$$
$$T_2 = \frac{1}{2}\sum_{r, s=1}^{n-m} a_{m+rm+s}(q_{m+1}, \ldots, q_n)\, q_{m+r}^{\cdot} q_{m+s}^{\cdot} \qquad (1.1)$$

В рассматриваемых системах возможны движения вида

$$q_r^{\cdot} = h_r = \mathrm{const} \qquad (r = 1, \ldots, m)$$

$$q_{m+r} = u_r = \mathrm{const} \qquad (r = 1, \ldots, n-m) \tag{1.2}$$

где постоянные h_r, u_r определяются из уравнений

$$\frac{\partial F(h)}{\partial h_r} = e_r \qquad (r = 1, \ldots, m) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Pi(u)}{\partial u_r} = \frac{\partial T_1(h, u)}{\partial u_r} \qquad (r = 1, \ldots, n-m)$$

Здесь e_r — постоянные обобщенные силы, отвечающие квазициклическим координатам, $h = (h_1, \ldots, h_m)$, аналогичный смысл имеют обозначения $\Pi(u)$, $T_1(h, u)$. Для систем с распределенными параметрами вторую группу уравнений (1.3) следует понимать как условную запись уравнений равновесия позиционной подсистемы под действием сил, создаваемых квазициклической подсистемой.

Согласно (1.3), квазициклические скорости в стационарном движении не зависят от позиционных координат и им могут быть приданы произвольные значения (по крайней мере в некоторых пределах) изменением диссипации и постоянных обобщенных сил. Поэтому при определении возможных положений равновесия позиционной подсистемы допустимо считать, что задаются непосредственно квазициклические скорости. В результате получается задача о равновесии позиционной подсистемы под действием сил, зависящих от параметров; квазициклическая же подсистема из рассмотрения исключается. Покажем, что и задача устойчивости решений (1.2) сводится к исследованию устойчивости равновесия позиционной подсистемы в предположении, что квазициклические скорости являются задаваемыми (неварьируемыми) парамерами.

Введем возмущения η_r, ζ_r соотношениями $q_r^{\cdot} = h_r + \eta_r^{\cdot}$, $r = 1, \ldots, m$, $q_{m+r} = u_r + \zeta_r$, $r = 1, \ldots, n-m$, и выпишем уравнения в вариациях

$$\sum_{s=1}^{m} [a_{rs}(u)\eta_r^{\cdot\cdot} + b_{rs}(h)\eta_s^{\cdot}] + \sum_{s=1}^{n-m} [a_{rm+s}(u)\zeta_s^{\cdot\cdot} + g_{rm+s}(h, u)\zeta_s^{\cdot}] = 0 \quad (r = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{s=1}^{n-m} [a_{m+rm+s}(u)\zeta_s^{\cdot\cdot} + (g_{m+rm+s}(h, u) - g_{m+sm+r}(h, u))\zeta_s^{\cdot} + c_{rs}(h, u)\zeta_s] + \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} [a_{sm+r}(u)\eta_s^{\cdot\cdot} - g_{sm+r}(h, u)\eta_s^{\cdot}] = 0 \quad (r = 1, \ldots, n-m)$$

Здесь

$$g_{rm+s}(h, u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_{ri}(u)}{\partial u_s} h_i$$

$$g_{m+rm+s}(h, u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial a_{im+r}(u)}{\partial u_s} h_i \tag{1.5}$$

$$b_{rs} = \frac{\partial^2 F(h)}{\partial h_r \partial h_s}, \qquad c_{rs} = \frac{\partial^2 \Pi(u)}{\partial u_r \partial u_s} - \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{m} \frac{\partial^2 a_{ij}(u)}{\partial u_r \partial u_s} h_i h_j$$

Устойчивость исследуем по отношению к переменным

$$q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}, q_{m+1}, \ldots, q_n$$

Исходная система получается из консервативной после введения в нее диссипативных сил с частичной диссипацией. Поэтому движение (1.2) будет устойчивым, если уравнения в вариациях не имеют неограниченных решений (незатухающие колебания, т. е. чисто мнимые корни, допускаются), и неустойчивым, если неограниченные решения существуют. Тот же критерий примем и для систем с распределенными параметрами. Случай, когда имеются независящие от времени решения $\eta_1^{\cdot}, \ldots, \eta_m^{\cdot}, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-m}$ не рассматривается.

Считаем, что диссипация по квазициклическим координатам полная и матрица $\| b_{rs} \|$ — положительно-определенная. Допустим, что равновесие позиционной подсистемы, рассматриваемое в предположении, что квазициклические скорости постоянны, неустойчиво или обладает временной устойчивостью. Допустим также, что ни одно решение ζ_ν уравнений, описывающих малые колебания позиционной подсистемы при постоянных квазициклических скоростях

$$\sum_{s=1}^{n-m} [a_{m+rm+s}(u)\zeta_{\nu s}^{\cdot\cdot} + (g_{m+rm+s}(h, u) - g_{m+sm+r}(h, u))\zeta_{\nu s}^{\cdot} + c_{rs}(h, u)\zeta_{\nu s}] = 0$$

$$(r = 1, \ldots, n-m) \tag{1.6}$$

не удовлетворяет одновременно m условиям

$$\sum_{s=1}^{n-m} [a_{rm+s}(u)\zeta_{\nu s}^{\cdot\cdot} + g_{rm+s}(h, u)\zeta_{\nu s}^{\cdot}] = 0 \tag{1.7}$$

$$(r = 1, \ldots, m)$$

Тогда соответствующее решение (1.2) неустойчиво.

Действительно, предположим, что оно устойчиво. Из соотношения

$$dH_*/dt = -2F_*$$

$$H_* = T_1(u, \eta^{\cdot}) + U(u, \eta^{\cdot}, \zeta^{\cdot}) + T_2(u, \zeta^{\cdot}) + \Pi_*(u, \zeta)$$

$$F_* = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{m} b_{rs}\eta_r^{\cdot}\eta_s^{\cdot}, \qquad \Pi_* = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n-m} c_{rs}'\zeta_r\zeta_s \tag{1.8}$$

следует, что в устойчивом движении $\eta_1^{\cdot}(t), \ldots, \eta_m^{\cdot}(t)$ таковы, что при $t \to 0$ ограничен интеграл

$$\int_{t_0}^{t} F_*(\tau)\, d\tau$$

Покажем, что в данном случае система (1.4) не может иметь только решения, удовлетворяющие условию $\eta_r^{\cdot}, \zeta_r \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, выберем начальные условия так, чтобы было $H_{*0} < 0$. Согласно (1.8) $H_* \leqslant H_{*0}$ при всех t. Но если $\eta_r^{\cdot}, \zeta_r \to 0$, то $H_* \to 0$, что противоречит требованию $H_* \leqslant H_{*0}$.

Таким образом, система (1.4) должна иметь частное решение, в котором $\zeta_s = z_s \cos(\lambda t + \psi_s)$ и по крайней мере часть z_s отлична от нуля, а $\eta_s^{\cdot}$ таковы, что интеграл от

$F_*(t)$ ограничен при $t \to \infty$. Рассмотрим вторую сумму в одном из первых m уравнений (1.4). Она представляет собой линейную форму $\zeta_s^{\cdot}, \zeta_s^{\cdot\cdot}$ и при ζ_s указанного вида обращается либо тождественно в нуль, либо в функцию $Z_r \cos(\lambda t + \vartheta_r)$. Тот же вид будет иметь и первая сумма в рассматриваемом уравнении. Но эта сумма есть линейная форма $\eta_s^{\cdot}, \eta_s^{\cdot\cdot}$. Следовательно, если обе суммы не обращаются в нуль тождественно, то по крайней мере одна из функций $\eta_s^{\cdot}$ должна содержать слагаемое вида $x_s \cos(\lambda t + \gamma_s)$. Но при $\eta_s^{\cdot}$ такого вида и положительно определенной $|b_{rs}|$ интеграл от F_* не будет ограниченным. Поэтому в устойчивом движении все $2m$ указанных сумм должны быть тождественно равными нулю.

Тем же путем найдем, что должна быть тождественно равной нулю каждая из $2(n-m)$ сумм во второй группе уравнений (1.4). В результате получилось, что в рассматриваемом решении ζ_r удовлетворяют как уравнениям (1.6), так и условиям (1.7). Но это невозможно по предположению. Следовательно, система (1.4) не может иметь только решения, когда интеграл от $F_*(t)$ ограничен, а ζ_r ограничены или стремятся к нулю при $t \to \infty$; этим показана неустойчивость.

Равенства (1.7) отвечают случаям, когда часть неизвестных в (1.4) находится независимо от остальных. При этом неустойчивость позиционной подсистемы, как и ранее, влечет неустойчивость полной системы (1.4), но при временной устойчивости позиционной подсистемы может быть как устойчивость, так и неустойчивость.

Пусть позиционная подсистема при постоянных квазициклических скоростях неустойчива. Если условиям (1.7) удовлетворяет неограниченное решение ζ_ν, то система (1.4) будет иметь неограниченное решение вида $\eta^{\cdot} \equiv 0$, $\zeta = \zeta_\nu$, что означает неустойчивость. Допустим, что условиям (1.7) удовлетворяет некоторое количество ограниченных решений ζ_ν, ζ_μ и т. д. Решения вида $\eta^{\cdot} \equiv 0$, $\zeta = \zeta_\nu, \zeta_\mu, \ldots$, будут частными решениями системы (1.4). Рассмотрим совокупность ее решений, линейно независимых с этими решениями. Для них справедливо предыдущее доказательство неустойчивости.

При временной неустойчивости позиционной подсистемы возможен следующий случай. Рассмотрим частные решения ζ_ν, удовлетворяющие требованию, чтобы при некоторых t выполнялось неравенство $T_2(\zeta_r^{\cdot}) + \Pi_*(\zeta_\nu) < 0$. Допустим, что все такие ζ_ν удовлетворяют условиям (1.7). Тогда для любого решения $\eta^{\cdot}$, ζ системы (1.4), линейно независимого со всеми решениями вида $\eta^{\cdot} \equiv 0$, $\zeta = \zeta_\nu$, будет выполняться неравенство $H_*(\eta^{\cdot}, \zeta, \zeta^{\cdot}) > 0$ при всех t и предыдущее доказательство неустойчивости оказывается несправедливым. В этом (и только в этом) случае временная устойчивость может сохраняться для полной системы (1.4). Тривиальный пример сохранения временной устойчивости доставляет случай, когда все a_{sm+r}, g_{sm+r} равны нулю и система (1.4) распадается на две несвязанные подсистемы.

Если позиционная подсистема при неварьируемых квазициклических скоростях обладает вековой устойчивостью, то решение (1.2) устойчиво.

Действительно, рассмотрим систему, колебания которой описываются уравнениями возмущенного движения. Для нее справедливо энергетическое соотношение

$$dH_{*1}/dt = -2F_{*1} \tag{1.9}$$

$$H_{*1} = H_* + H_{*2}(\eta^{\cdot}, \zeta^{\cdot}, \zeta), \qquad F_{*1} = F_* + F_{*2}(\eta^{\cdot})$$

причем разложения функций H_{*2}, F_{*2} по степеням их аргументов начинаются с членов порядка большего двух. Поэтому при достаточно малых по модулю значениях аргументов H_{*1} будет положительно-определенной, а её производная по времени, взятая в силу уравнений возмущенного движения, не будет положительной.

Если $g_{m+rm+s} - g_{m+sm+r} = 0$, r, $s = 1, \ldots, n - m$, например, в случае гироскопически несвязанной системы при $U = 0$, уравнения малых колебаний позиционной подсистемы при постоянных квазициклических скоростях не содержат гироскопических членов и временная устойчивость невозможна. В этом случае устойчивость стационарных движений однозначно определяется свойствами равновесия и не зависит от того, учитывается ли диссипация по позиционным координатам. В общем случае свойствами равновесия (и независимо от диссипации в позиционной подсистеме) определяются неустойчивость и вековая устойчивость. Но и в этом случае суждение об устойчивости будет однозначным, если учесть диссипативные силы, отвечающие позиционным координатам.

2. Важным примером систем рассмотренного класса служат электромеханические системы с замкнутыми токами проводимости (т. е. не содержащие емкостей, а также скользящих контактов). Такие системы во многих случаях достаточно точно описываются в квазистационарном приближении. Если, кроме того, можно считать, что размеры поперечных сечений проводников малы по сравнению с их длиной, а активные сопротивления не зависят от перемещений, то система будет иметь кинетический потенциал и диссипативную функцию прежнего вида. При этом роль квазициклических координат играют заряды, скоростей — токи, постоянные «квазициклические» обобщенные силы суть внешние эдс, а диссипация по квазициклическим координатам обусловливается активными сопротивлениями проводников; позиционными же являются механические обобщенные координаты. Слагаемому T_1 в выражении кинетической энергии теперь соответствует энергия магнитного поля, а ее производные по q_{m+r} определяют пондеромоторные силы. Слагаемого U выражение для T обычно не содержит.

Стационарному решению в случае электромеханической системы соответствуют постоянные значения токов и механическое равновесие под действием постоянного магнитного поля. Результаты п. 1 позволяют в этом случае игнорировать «электрические» степени свободы, в частности, не интересоваться электрической схемой, способом питания и т. п. Они позволяют также судить об устойчивости по зависимостям форм равновесия от токов с помощью теории бифуркаций Пуанкаре.

Предыдущее распространяется и на «магнитно-нелинейные» электромеханические системы при условии, что гистерезисом можно пренебречь. При этом выражение для T будет отличаться от принятого ранее лишь тем, что вместо квадратичной формы T_1 в него войдет иного вида функция токов. Поэтому достаточно показать, что форма

$$\sum_{r,s=1}^{m} \frac{\partial T_1}{\partial h_r \partial h_s} \dot{\eta}_r \dot{\eta}_s \tag{2.1}$$

положительно-определенная. Ограничимся случаем, когда векторы индукции **B** и напряженности поля **H** в магнетике параллельны, а функция $B(H)$ возрастающая. При параллельных **B** и **H**

$$T_1(h_1, \ldots, h_m) = \int dv \int\limits_0^H B(H)\, dH \tag{2.2}$$

где первый интеграл берется по всему пространству. Найдем приращение $\Delta T_1 = T_1(h + \eta^\cdot) - T_1(h)$, удерживая квадраты $\eta_1^\cdot, \ldots, \eta_m^\cdot$. Обозначим через $\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H}(h + \eta^\cdot) - \mathbf{H}(h)$ приращение напряженности поля. Сохраняя члены второго порядка относительно $\Delta\mathbf{H}$, получим

$$\Delta T_1 = \int dv \left[\mathbf{B}\Delta\mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}^2(\Delta\mathbf{H})^2 - (\mathbf{H}\Delta\mathbf{H})^2}{2H^3} B + \frac{1}{2}\frac{dB}{dH}\left(\frac{\mathbf{H}\Delta\mathbf{H}}{H}\right)^2\right] \tag{2.3}$$

В магнитно-нелинейном случае $\Delta\mathbf{H}$ включает не только первые, но и старшие степени приращений токов. Но из соотношения [3] (гл. IV, § 32)

$$\int \mathbf{B}\Delta\mathbf{H} dv = \sum_{r=1}^{m} \Phi_r \eta_r^\cdot \tag{2.4}$$

где Φ_r — магнитный поток через контур r-го тока, следует, что интеграл от $\mathbf{B}\Delta\mathbf{H}$ — линейная форма $\eta_1^\cdot, \ldots, \eta_m^\cdot$. Поэтому значение формы (2.1) найдется из двух последних членов в (2.3), если заменить в них $\Delta\mathbf{H}$ на часть $\Delta\mathbf{H}$, линейную по $\eta_1^\cdot, \ldots, \eta_m^\cdot$. Эта часть исчезает во всем пространстве только при $\eta_1^\cdot, \ldots, \eta_m^\cdot = 0$. Учитывая вид последних членов в (2.3), заключаем, что форма (2.1) положительно-определенная.

В предположении, что перемещения не меняют активных сопротивлений (справедливом, например, если проводники неподвижны, а смещаются непроводящие намагничивающиеся тела), возможно обобщение и на случай, когда имеются объемные проводники. В этом случае следует использовать указанные в [4] (гл. V) разложения плотности тока по соленоидальным функциям пространственных координат. Тогда единственное отличие от предыдущего будет состоять в том, что получится система со счетным множеством квазициклических координат.

В случае циклических координат судить об устойчивости стационарного движения по устойчивости равновесия позиционной подсистемы можно с помощью теоремы Рауса, обобщенной Ляпуновым, и дополнений к ней [1]. В этом случае, однако, постоянными считаются циклические импульсы, а не скорости. Условия устойчивости, получающиеся с помощью теоремы Рауса, шире, чем условия устойчивости для той же системы, но с квазициклическими координатами.

Покажем это для случая $U = 0$. Обозначим через $p_1, \ldots, p_m$ циклические импульсы, а через $V_R = \Pi + T_1(p, u)$ измененную по Раусу силовую функцию. Решение $q_{m+r} = u_r = \text{const}$, $r = n - m$, будет устойчиво, если квадратичная форма

$$\sum_{r,s=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V_R}{\partial u_r \partial u_s} v_r v_s \tag{2.5}$$

положительно-определенная, и неустойчиво, если при некоторых $v_1, \ldots, v_{n-m}$ эта форма принимает отрицательные значения. В случае же, когда координаты $q_1, \ldots, q_m$ — квазициклические, вместо V_R в (2.5) следует внести функцию $V = \Pi - T_1\ (h,\ u)$. Пусть в системах с циклической и квазициклической координатами величины $q_r{}^\cdot = h_r$, $r = 1, \ldots, m$, одинаковы. Тогда существуют решения, где и u_r одинаковы. Составим для таких решений форму (2.5) и аналогичную форму, содержащую V, учитывая, что матрица коэффициентов $\| a_{rs}{}^{(-1)} \|$ в $T_1\ (p,\ u)$ обратна матрице $\| a_{rs} \|$. В результате получим, что разность между (2.5) и второй формой равна неотрицательной величине

$$\sum_{r,\, s=1}^{m} a_{rs}{}^{(-1)} f_r f_s$$

где

$$f_r = \sum_{i=1}^{n-m} \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_i} h_s v_i$$

Из электромеханических систем теорема Рауса охватывает системы со сверхпроводящими контурами. Будем игнорировать те исключительные случаи, когда обе указанные выше квадратичные формы обращаются в нуль при одних и тех же $v_1, \ldots, v_{n-m}$. Тогда предыдущее означает, что формы равновесия под действием магнитного поля, устойчивые в случае, когда поле создается контурами с конечной проводимостью, будут устойчивы и при сверхпроводимости, но существуют формы, устойчивые только в случае сверхпроводящих контуров. Системы со сверхпроводящими контурами обладают, следовательно, качественными особенностями и в рассматриваемом здесь «чисто механическом» смысле.

Поступила 9 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубановский В. Н., Степанов С. Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
4. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.