Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 531.36

О БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. Морозов, В. Н. Рубановский, В. В. Румянцев, В. А. Самсонов

(Москва)

Многие объекты современной техники (ракеты, космические корабли, самолеты, гироскопические приборы, центрифуги и т. п.) в ряде случаев можно моделировать механическими системами, состоящими из абсолютно твердых тел и материальных точек и связанных с ними деформируемых (жидких и упругих) тел.

Механические системы, содержащие в качестве своих частей как подсистемы с конечным числом степеней свободы, так и звенья с распределенными параметрами, т. е. сплошные среды, будем для краткости называть сложными системами.

Рассматриваются установившиеся движения сложных систем. Установившимся движениям соответствуют стационарные значения потенциальной энергии V или измененной потенциальной энергии W системы. Задача об устойчивости установившихся движений приводится к исследованию характера экстремума потенциальной энергии V или W. Устойчивому движению соответствует минимум потенциальной энергии. Условия устойчивости (неустойчивости) установившихся движений в ряде важных случаев можно получить как условия определенной положительности (знакопеременности вместе с некоторыми дополнительными условиями) второй вариации потенциальной энергии $\delta^2 V$ или $\delta^2 W$.

Эти общие результаты прилагаются к решению ряда конкретных задач об устойчивости установившихся движений сложных систем. Обсуждаются условия устойчивости движения твердого тела с жидкими и упругими частями в различных силовых полях.

1. Будем рассматривать сложные системы, стесненные голономными связями. Существенным является выбор модели для сплошных сред, входящих, как часть, в сложную систему. Для определенности примем, что жидкие тела моделируются несжимаемыми однородными идеальными или вязкими ньютоновыми жидкостями, а упругие тела — твердыми деформируемыми телами, рассматриваемыми как материальные континуумы, для которых процессы деформирования обратимы и существует потенциальная энергия деформации [1].

Движение сложной системы будем рассматривать по отношению к некоторой инерциальной системе координат $O'\xi\eta\zeta$ и будем предполагать, что при заданных внешних силах оно однозначно определяется заданием начальных условий и является непрерывным во времени. Одно из твердых тел системы примем за основное, или несущее тело, и жестко свяжем с ним систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в некоторой точке O этого тела.

Положение точек системы в пространстве $\xi\eta\zeta$ будем определять обобщенными лагранжевыми координатами q_s $(s = 1, \ldots, n)$ ее подсистемы с конечным числом степеней свободы и радиус-векторами $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$

с началом в точке O частиц сплошной среды. Тогда скорости точек системы можно представить [2] некоторыми функциями от q_s, $q_s^{\cdot}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}^{\cdot}$.

Не приводя здесь в явном виде уравнения движения сложной системы [2], ограничимся рассмотрением ее установившихся состояний (равновесий и стационарных движений) и их устойчивости. Будем далее предполагать, что наложенные на систему связи стационарны, а действующие активные силы — позиционные потенциальные, производные от силовой функции, зависящей от положений точек системы и, возможно, некоторого параметра и не зависящей явно от времени. При этих условиях существует потенциальная энергия системы V, зависящая, в общем случае, как от обобщенных координат q_s, так и от формы областей τ_1 и τ_2, занятых в данный момент времени жидкостью и упругим телом, так что потенциальная энергия системы является функцией и функционалом одновременно.

Если связи, наложенные на систему, допускают вращение всей системы как одного твердого тела вокруг некоторой неподвижной прямой $O'\zeta$, а действующие на систему силы не дают момента относительно этой прямой, то существует интеграл площадей $G_\zeta = k$, где G_ζ — проекция на ось ζ вектора кинетического момента системы относительно точки O' в ее абсолютном движении. В этом случае можно ввести функционал измененной потенциальной энергии W [2]. Среди действительных движений системы при этом могут быть стационарные движения, для которых позиционные координаты q_s $(s = 1, \ldots, m;\ m \leqslant n)$ и координаты x_i точек сплошной среды остаются постоянными.

Координаты q_s и конфигурация сплошной среды, соответствующие установившемуся состоянию системы, в случаях, когда полный приток тепла к сплошной среде равен нулю, определяются согласно принципу возможных перемещений из условия

$$\delta F = 0 \tag{1.1}$$

где δ означает изменение на возможном перемещении системы, а функционал F равен V или W.

Условие (1.1) эквивалентно уравнениям

$$\partial F / \partial q_s = 0 \quad (s = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

и функциональным уравнениям вместе с естественными граничными условиями.

Потенциальная энергия сложной системы обычно зависит от некоторого параметра λ, остающегося постоянным при любом движении системы. Для функционала W таким параметром служит постоянная интеграла площадей $k = k_0$. Установившиеся состояния системы зависят от значений этого параметра и при его непрерывном изменении будут, вообще говоря, изменяться, причем одному значению параметра могут отвечать несколько состояний. В пространстве конфигураций, дополненном измерением параметра λ, эти состояния изобразятся точками вещественной кривой «равновесия», состоящей, в общем случае, из нескольких ветвей. Отдельные ветви этой кривой могут пересекаться между собой в точках бифуркации. Кривые равновесия дают глобальную картину распределения установившихся состояний системы.

Определение положений равновесия сложной системы по отношению к некоторой подвижной системе координат O_1xyz проводится так же, как и абсолютных положений равновесия при условии добавления к потенциальной энергии сил инерции переносного движения.

Исследование устойчивости установившихся движений (равновесий и стационарных движений) сложных систем с успехом проводится с помощью методов, первоначально разработанных [3, 4] для твердых и упругих тел с жидким наполнением.

В указанных работах предложено два определения устойчивости. В соответствии с одним из них под устойчивостью движения сложной системы можно понимать устойчивость в смысле Ляпунова по отношению к переменным q_s ($s = 1,\ldots, k$; $k = n$ в случае равновесия и $k = m < n$ в случае стационарных движений), $q_i^{\cdot}$ ($i = 1,\ldots, n$) и p_j ($j = 1,\ldots, r$), где величины p_j — некоторые интегральные характеристики движения сплошной среды, число r которых конечно [2]. Конкретный выбор величин p_j зависит от рассматриваемой задачи и должен учитывать ее физические условия. При указанной постановке задача об устойчивости движения системы с бесконечным числом степеней свободы приводится к исследованию устойчивости по отношению к конечному числу $k + n + r$ величин q_s, $q_i^{\cdot}$, p_j, т. е. ставится как задача устойчивости по отношению к части переменных [1]. При такой постановке задачи эффективным оказывается второй метод Ляпунова, однако не в его стандартной, а несколько модифицированной форме. Дело в том, что при исследовании устойчивости не по всем, а по части переменных классические теоремы второго метода Ляпунова непосредственно неприменимы, так как не удается, как правило, построить функции Ляпунова, зависящие лишь от интересующих нас переменных. Применение метода к таким задачам основывается на некоторых теоремах об устойчивости по части переменных (см. [3], гл. 3, § 2), представляющих собой модификации теорем Ляпунова. Выражения, играющие роль функций Ляпунова, в случае сложных систем представляют собой функционалы исходных переменных. Для их построения эффективен способ Четаева [6]. В случае установившихся движений эффективно также применение модификаций теорем Лагранжа и Рауса и их обращений. Данная постановка задачи об устойчивости оказалась плодотворной и в проблемах устойчивости движения одних сплошных сред при надлежащем выборе интегральных характеристик движения среды.

Другое определение устойчивости установившихся движений сложных систем представляет собой синтез определений устойчивости по Ляпунову по отношению к переменным q_s, $q_i^{\cdot}$ и к формам равновесия звеньев с распределенными параметрами. Характеристики отклонения возмущенной формы от невозмущенной можно вводить по-разному, принимая за таковые, как предложил Ляпунов, «отклонение» или же какие-нибудь другие величины, например L_2-нормы относительных смещений $\| \mathbf{u} \|$ [4]. Отметим, что устойчивость по отношению к форме равновесия сплошной среды, по существу, относится также к классу задач об устойчивости по части переменных.

Согласно теоремам, доказанным для твердых и упругих тел с жидким наполнением и легко распространяемым на сложные системы, равновесие (стационарное движение) устойчиво, если для него функционал F имеет минимум $F^{(0)}$, и неустойчиво, если для него F не имеет минимума и в сколь угодно малой окрестности установившегося движения может принимать

[1] Ошибочно мнение [5], будто рассматриваемая система тем самым заменяется конечномерной системой; разумеется, она остается сама собой и описывается исходными дифференциальными уравнениями движения.

отрицательные значения, причем знаки выражений $F - F^{(0)} = F^{(2)} + F^{(3)} + \ldots$ и $2F^{(2)} + 3F^{(3)} + \ldots$ определяются членами второго порядка $F^{(2)}$ в разложении функционала в ряд Тейлора (и при этом невозможна гироскопическая стабилизация).

В случае, если в системе имеется диссипация на всяких действительных движениях системы, отличных от установившихся движений, эти результаты усиливаются [3, 4].

Подчеркнем, что наличие (отсутствие) минимума F понимается как определенная положительность (знакопеременность) функционала $F - F^{(0)}$.

При непрерывном изменении постоянного параметра λ, от которого зависит F, установившиеся состояния и функционал F будут непрерывно меняться, и для всех точек кривой равновесия, для которых F сохраняет минимум, установившиеся состояния останутся устойчивыми. Смена устойчивости на определенной ветви кривой равновесия может происходить лишь в точке бифуркации, где уравнение $\delta^2 F = 2F^{(2)} = 0$ имеет нетривиальное решение.

Имеет место также установленный еще Пуанкаре закон смены устойчивости при фиксированном значении параметра. Заметим, что при этом имеется в виду существенно постоянный параметр, остающийся постоянным на любом движении системы [7].

В обычных случаях вопрос о характере экстремума функционала F решается исследованием его второй вариации $\delta^2 F$, вид которой зависит не только от самого функционала F, но и от выбора функций, характеризующих отклонение возмущенной формы сплошной среды от невозмущенной и удовлетворяющих определенным условиям. Если вторая вариация $\delta^2 F$ определенно положительна, то F имеет минимум, если же $\delta^2 F$ может принимать отрицательные значения, то F не имеет минимума. И лишь в особых случаях, когда $\delta^2 F$ неотрицательна, вопрос о характере экстремума функционала F решается членами выше второго порядка; эти случаи далее не рассматриваются.

Без уменьшения общности будем считать, что для рассматриваемого установившегося движения обобщенные координаты $q_s = 0$, так что в его окрестности $\delta q_s = q_s$.

Для сложных систем вторая вариация функционала F состоит из трех частей

$$\delta^2 F = F_1(q) + F_2(n) + F_3(q, n)$$

Здесь $F_1(q)$ — квадратичная форма обобщенных координат q_s, совпадающая с $\delta^2 F$ для «отвердевшей» системы, получаемой из исходной отвердеванием сплошных сред, $F_2(n)$ — квадратичный функционал, отражающий изменение формы соответствующих звеньев системы с распределенными параметрами, описываемое вектор-функцией n; $F_3(q, n)$ — функционал, билинейный относительно функции n и координат q_s, характеризующий взаимное влияние изменения положения подсистемы с конечным числом степеней свободы и деформации ее звеньев с распределенными параметрами.

Укажем два способа установления условий положительной определенности $\delta^2 F$. Один из них, развитый в работах [8–10], состоит в следующем.

Пусть функционал $F_2(n)$ — определенно-положительный. С помощью решения $n^*(q)$ уравнения

$$\delta\,[F_2(n) + F_3(q,\ n)]_{q=\mathrm{const}} = 0 \tag{1.3}$$

вторую вариацию δ^2F можно привести к виду

$$\delta^2F = F_1(q) + F_2(n - n^*) + {}^1/_2F_3(q,\ n^*(q)) \tag{1.4}$$

где $F_3(q,\ n^*(q))$ — квадратичная форма координат q_s, так как решение $n^*(q)$ уравнения (1.3) представляет собой линейную функцию q_s. Таким образом, δ^2F представлена в виде суммы двух независимых частей, и условия ее положительной определенности состоят из условий положительной определенности функционала F_2 и квадратичной формы

$$U = F_1(q) + {}^1/_2F_3(q,\ n^*(q)) \tag{1.5}$$

Выполнение условий положительной определенности функционала F_2 обеспечивает устойчивость «равновесия» звеньев с распределенными параметрами при $q_s = 0$, а условия положительной определенности квадратичной формы U можно интерпретировать как условия устойчивости некоторой «эквивалентной» механической системы, состоящей из твердых тел и материальных точек и имеющей, вообще говоря, иную конфигурацию, чем отвердевшая система.

При другом способе [11] установления условий положительной определенности второй вариации предполагается, что квадратичная форма $F_1(q)$ является определенно-положительной. С помощью решения $q^*(n)$ уравнения

$$\delta\,[F_1(q) + F_3(q,\ n)]_{n=\mathrm{const}} = 0$$

вторую вариацию можно привести к виду

$$\delta^2F = F_1(q - q^*(n)) + F_2(n) + {}^1/_2F_3(q^*(n),\ n) \tag{1.6}$$

где $F_3(q^*(n),\ n)$ — квадратичный функционал n.

Условия определенной положительности (1.6) слагаются из условий определенной положительности квадратичной формы F_1 и квадратичного функционала

$$\Phi(n) = F_2(n) + {}^1/_2F_3(q^*(n),\ n)$$

Определенная положительность F_1 гарантирует устойчивость подсистемы с конечным числом степеней свободы при отвердевших в установившемся состоянии звеньях с распределенными параметрами, а определенная положительность функционала $\Phi(n)$ — устойчивость некоторой эквивалентной системы, состоящей из звеньев с распределенными параметрами и отличающейся, вообще говоря, от исходной подсистемы с распределенными параметрами.

Оба способа дают необходимые и достаточные условия определенной положительности δ^2F. Этими способами путем разного рода оценок можно получить достаточные условия определенной положительности δ^2F, например, приведенные в работах [11-13].

Нетрудно показать, что $F_3(q, n^*(q) \leqslant 0$ и $F_3(q^*(n), n) \leqslant 0$. Поэтому условия устойчивости равновесия эквивалентной системы хуже, чем аналогичные условия для отвердевшей системы или для подсистемы с распределенными параметрами.

В этом проявляется общее свойство систем с деформируемыми элементами, состоящее в том, что деформируемость оказывает дестабилизирующее влияние на равновесие системы по сравнению с системой той же конфигурации, состоящей из недеформируемых элементов. Это свойство, например, неоднократно отмечалось для твердых тел с полостями, содержащими жидкость. В некоторых практических задачах имеется возможность изменения распределения масс системы, например разнесением отдельных ее частей на значительные расстояния. Эти изменения способствуют стабилизации равновесия системы твердых тел, однако они обычно усиливают деформируемость элементов системы, что может привести не только к значительному снижению ожидаемого эффекта стабилизации, но и в отдельных случаях к дестабилизации равновесия системы.

Задача об условиях определенной положительности функционалов $F_2(n)$ и $\Phi(n)$ может быть сведена к задаче положительности наименьшего собственного значения соответствующей краевой задачи. Для определения коэффициентов квадратичной формы $F_3(q, n^*(q))$ могут быть использованы численные методы.

Далее рассмотрим ряд задач об устойчивости установившихся движений конкретных сложных систем, представляющих определенный самостоятельный интерес.

2. Рассмотрим движение вокруг неподвижной точки O твердого тела, имеющего полость, частично заполненную жидкостью плотности ρ, поверхностным натяжением которой пренебрегаем. С твердым телом неизменно связана ось симметрии динамически уравновешенного ротора, постоянный относительный гиростатический момент которого R направлен по оси x_3 (с ортом $\mathbf{i}_3$), а также связаны другие твердые тела и материальные точки, обобщенные относительные координаты которых q_s $(s = 1, \ldots, n)$. Будем предполагать, что на систему действуют силы тяжести, а также внутренние силы с потенциальной энергией $V(q_1, \ldots, q_n)$.

Измененная потенциальная энергия системы

$$W = \frac{1}{2J}(k_0 - R\mathbf{i}_3\boldsymbol{\gamma})^2 + V(q_1, \ldots, q_n) + Mg(x_{c1}\gamma_1 + x_{c2}\gamma_2 + x_{c3}\gamma_3)$$

$$J = A\gamma_1^2 + \beta\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - 2D\gamma_2\gamma_3 - 2E\gamma_3\gamma_1 - 2F\gamma_1\gamma_2$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — орт направленной ветикально вверх оси $O\zeta$, J — момент инерции системы относительно оси ζ; A, B, C, D, E, F — моменты и произведения инерции, x_{ci} — координаты центра масс системы.

Уравнения вида (1.2) допускают решение

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \ \gamma_3 = 1, \ q_i = q_i^\circ$$

если при произвольной постоянной величине $\omega = (k_0 - R)/J_\theta$ выполняются условия

$$x_{c1} = x_{c2} = 0, \ D = E = 0$$

т. е. если центр тяжести системы расположен на оси x_3, являющейся при этом главной осью инерции системы.

Из условия вида (1.1) получим уравнение свободной поверхности жидкости

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 (x_1^2 + x_2^2) - gx_3 = c \tag{2.1}$$

Квадратичная форма вида (1.6) в данном случае следующая:

$$U = [(C^\circ - A^\circ)\omega^2 + R\omega - Mgx_{c3}{}^\circ - a]\gamma_1^2 + [(C^\circ - B^\circ)\omega^2 + R\omega - \\ - Mgx_{c3}{}^\circ - a]\gamma_2^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_1 \partial q_i}\right)^\circ \gamma_1 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\gamma_2 \partial q_i}\right)^\circ \gamma_2\right](q_i - q_i^\circ) + \\ + \sum_{i,\,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\right)^\circ (q_i - q_i^\circ)(q_j - q_j^\circ) \tag{2.2}$$

Здесь в случае пересечения поверхности (2.1) со стенками полости по окружностям с радиусами R_1, R_2 ($R_1 > R_2 \geqslant 0$) и центрами на оси x_3:

$$a = \pi g\rho \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{\omega^2}{g^2}\left(\frac{\omega^2}{2}r^2 - c\right) + 1\right] r^3 dr$$

Для определенной положительности выражения (2.2) необходимо и достаточно выполнение условий Сильвестра

$$(C^\circ - A^\circ)\omega^2 + R\omega - Mgx_{c3}{}^\circ - a > 0 \quad (A^\circ \geqslant B^\circ) \tag{2.3}$$
$$\Delta_{2+i} > 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где Δ_{2+i} — главные диагональные миноры дискриминанта квадратичной формы (2.2), отвечающие переменным q_i ($i = 1, \ldots, n$).

Неравенства (2.3) являются достаточными условиями устойчивости рассматриваемого движения.

В случае вязкой жидкости и действия диссипативных сил Q_i таких, что $Q_1 q_1^{\boldsymbol\cdot} + \ldots + Q_n q_n^{\boldsymbol\cdot} \leqslant 0$, причем знак равенства имеет место только при $q_i^{\boldsymbol\cdot} = 0$ ($i = 1, \ldots, n$), при выполнении условий (2.3) возмущенное движение системы, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически стремится к равномерному вращению вокруг вертикали всей системы, кроме ротора, как одного твердого тела. При изменении на противоположный знака одного или нескольких из неравенств (2.3) невозмущенное движение будет неустойчивым.

Величина a, входящая в условие (2.3), имеет порядок ω^2 при $\omega \to \infty$. Хотя подынтегральная функция содержит ω в четвертой степени, но $R_2 \to R_1$ при $\omega \to \infty$ для любой ограниченной полости.

Предельный случай $\omega = \infty$ представляет определенный практический интерес и позволяет сравнительно просто описать эволюцию условий устойчивости при изменении количества жидкости в полости.

В этом случае уравнение свободной поверхности (2.1) имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 = R_1^2 = R_2^2 = b^2 \tag{2.4}$$

Если полость ограничена плоскостями $x_3 = h \pm d$, то первое из неравенств (2.3) запишется следующим образом:

$$C^\circ - A^\circ - 2\pi\rho b^2 d\,\frac{3h^2 + d^2}{3} > 0$$

или

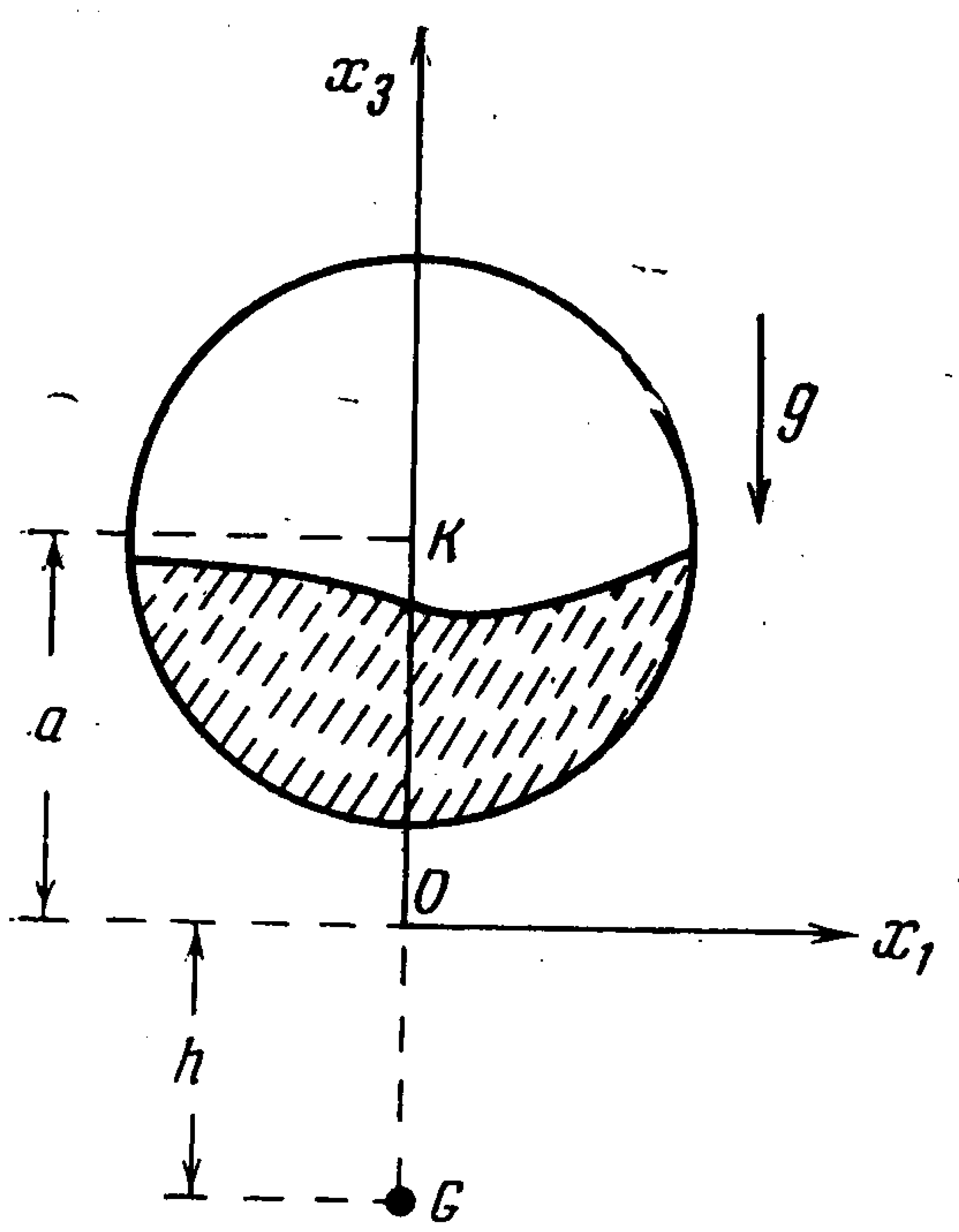
$$C_1 - A_1 - {}^1/_2\pi\rho d b^4 > 0$$

Здесь C_1, A_1 — моменты инерции фиктивного твердого тела, полученного из исходной отвердевшей системы заполнением цилиндра (2.4), образованного свободной поверхностью жидкости. Условие устойчивости такого твердого тела имеет вид

$$C_1 - A_1 > 0$$

и совпадает с условием устойчивости для твердого тела с полостью, целиком заполненной жидкостью.

Таким образом, уменьшение количества жидкости в полости быстро вращающегося тела в конечном итоге ухудшает условия устойчивости, т. е. оказывает дестабилизирующее влияние, хотя разность между осевым и поперечным моментами инерации системы при этом увеличивается (как легко видеть, $C_1 - A_1 < C^\circ - A^\circ$ при малых r).



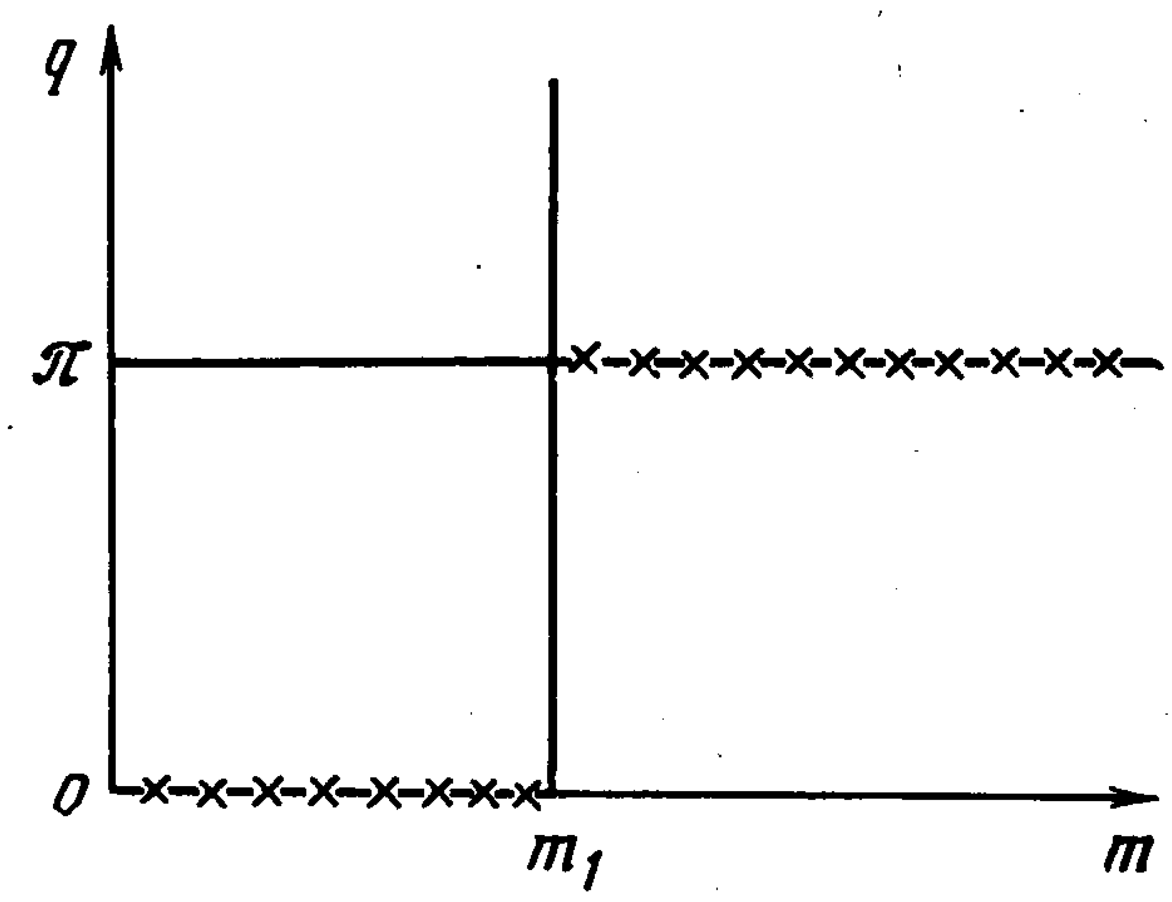
Фиг. 1

3. Изучение полостей конкретного вида позволяет построить полную картину распределения положений равновесия сложной системы, их эволюцию и бифуркацию при изменении параметров системы.

В качестве простейшего примера рассмотрим равновесие тяжелого физического маятника со сферической полостью, частично наполненной жидкостью, и горизонтальной осью подвеса (фиг. 1). Наиболее интересен случай, когда центр тяжести тела G и центр полости K лежат в одной плоскости с осью качания O и расположены по разные стороны от нее (фиг. 1). В этом случае, как нетрудно установить, система имеет два положения равновесия: $q = 0$ и $q = \pi$ при любом количестве жидкости в полости. Здесь q — угол между осью x_3 и вертикалью.

Кроме этого, любое положение системы может рассматриваться как положение равновесия, если $Mh = ma$. Здесь M, m — масса тела и жидкости, а величины a и h — геометрические характеристики (фиг. 1).

Картина распределения положений равновесия с выделением устойчивых положений и их эволюция при изменении количества жидкости изображены на фиг. 2. При малом количестве ($m < m_1 = Mh / a$) жидкости в полости тела устойчиво положение равновесия $q = 0$, в котором центр тяжести тела G находится ниже оси качания O. При достаточно большом количестве жидкости ($m > m_1$) устойчиво другое положение равновесия $q = \pi$, в котором ниже оси O находится центр полости K. Смена устойчивости на ветвях $q = 0$, $q = \pi$ происходит в точках бифуркации при $m = m_1$.



Фиг. 2

Изучение более сложных полостей приводит к более замысловатым бифуркационным картинам. Например, полость в виде прямоугольного параллелепипеда рассматривалась в работе [12].

Исследование частных случаев [12] позволило также установить, что форма полости существенно определяет характер влияния на условия устойчивости поверхностного натяжения жидкости, которое не учитывалось в приведенных примерах.

4. Рассмотрим задачу об устойчивости равномерного вертикального вращения вокруг неподвижной точки твердого тела с жестко заделанным в нем тонким прямолинейным нерастяжимым упругим стержнем в однородном поле силы тяжести.

Введем две прямоугольные системы координат с началом в неподвижной точке O тела: инерциальную $O\xi\eta\zeta$, ось ζ которой направим вертикально вверх, и подвижную $Ox_1x_2x_3$, оси которой направим по главным осям инерции тела для точки O. Пусть $\mathbf{i}_j$ — единичные векторы, направленные по осям x_j ($j = 1, 2, 3$). Орт оси ζ обозначим через γ, а его проекции на оси x_j — через γ_j.

Будем предполагать, что стержень длины l одним концом защемлен в теле на расстоянии a от точки O и в недеформированном состоянии направлен по оси x_3, причем плоскости x_3x_1 и x_2x_3 служат его плоскостями симметрии.

Обозначим через

$$\mathbf{u}(t, s) = u_1\mathbf{i}_1 + u_2\mathbf{i}_2 + u_3\mathbf{i}_3, \quad 0 \leqslant s \leqslant l, \quad t \geq t_0$$

вектор упругого перемещения точек оси стержня. Условие нерастяжимости стержня приводит к соотношению

$$u_3' = -\frac{1}{2}(u_1'^2 + u_2'^2) \qquad (u' = \partial u/\partial s)$$

а условие защемления в теле конца стержня — к граничным условиям

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_1' = u_2' = 0 \quad \text{при } s = 0, \quad t \geq t_0$$

Измененная потенциальная энергия системы

$$W = \frac{k_0^2}{2J} + \Pi$$

$$J = J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2 + \sigma\rho\int_0^l \Big\{u_2^2\gamma_1^2 + u_1^2\gamma_2^2 + (u_1^2 + u_2^2)\gamma_3^2 -$$

$$-\left[a(l-s) + \frac{1}{2}(l^2 - s^2)\right](u_1'^2 + u_2'^2)(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) - 2(a+s)(u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2)\gamma_3 -$$

$$-2u_1u_2\gamma_1\gamma_2\Big\}\,ds$$

$$\Pi = Mg(x_{10}\gamma_1 + x_{20}\gamma_2 + x_{30}\gamma_3) + g\sigma\rho\int_0^l \Big[\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 -$$

$$- \frac{1}{2}\gamma_3(l-s)(u_1'^2 + u_2'^2)\Big]ds + \frac{1}{2}E\int_0^l (I_2 u_1''^2 + I_1 u_2''^2)\,ds$$

Здесь J — момент инерции системы относительно оси ζ, Π — потенциальная энергия сил тяжести и упругой деформации стержня, J_i — моменты инерции недеформированной системы относительно осей x_i, σ — площадь поперечного сечения стержня, ρ — его плотность, M — масса системы, g — ускорение силы тяжести, x_{i0} — координаты центра тяжести системы в ее недеформированном состоянии, E — модуль Юнга, EI_1 и EI_2 — жесткости на изгиб.

В случае, когда $x_{10} = x_{20} = 0$, уравнения стационарных движений вида (1.2) допускают решение, описывающее равномерное вращение вокруг вертикали с угловой скоростью ω твердого тела с недеформированным стержнем

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad u_1 = u_2 = 0 \tag{4.1}$$

Выражение для $\delta^2 W$ в окрестности невозмущенного движения (4.1) представим в виде (1.6)

$$\delta^2 W = [(J_3 - J_1)\omega^2 - Mgx_{30}]\Big\{\gamma_1 + [(J_3 - J_1)\omega^2 - Mgx_{30}]^{-1}\sigma\rho\,\times$$

$$\times \int_0^l [g + \omega^2(a+s)]\,u_1 ds\Big\}^2 + [(J_3 - J_2)\omega^2 - Mgx_{30}]\Big\{\gamma_2 + [(J_3 - J_2)\omega^2 -$$

$$- Mgx_{30}]^{-1}\sigma\rho\int_0^l [g + \omega^2(a+s)]\,u_2 ds\Big\}^2 + V \tag{4.2}$$

Здесь

$$V(u_1, u_2) = \sigma\rho\int_0^l \{E_*(I_2 u_1''^2 + I_1 u_2''^2) - g(l-s)(u_1'^2 + u_2'^2) - \omega^2(u_1^2 + u_2^2)\}\,\times$$

$$\times ds - [(J_3 - J_1)\omega^2 - Mgx_{30}]\Big\{[(J_3 - J_1)\omega^2 - Mgx_{30}]^{-1}\sigma\rho\int_0^l [g + \omega^2(a+s)]\,\times$$

$$\times u_1 ds\Big\}^2 - [(J_3 - J_2)\omega^2 - Mgx_{30}]\Big\{[(J_3 - J_2)\omega^2 - Mgx_{30}]^{-1}\sigma\rho\,\times$$

$$\times \int_0^l [g + \omega^2(a+s)]\,u_2 ds\Big\}^2 \qquad (E = \delta\rho E_*) \tag{4.3}$$

Пусть выполнены условия

$$(J_3 - J_i)\omega^2 - Mgx_{30} > 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{4.4}$$

представляющие собой достаточные условия устойчивости равномерного вертикального вращения (4.1) тяжелого твердого тела с недеформируемым стержнем ($u_1 = u_2 \equiv 0$). Тогда, используя неравенства вида

$$\Big\{\sigma\rho\int_0^l [g + \omega^2(a+s)]\,u ds\Big\}^2 \leqslant h\sigma\rho\int_0^l u^2 ds$$

где

$$h = \sigma\rho \int_0^l [g + \omega^2 (a + s)]^2 ds = J_* \omega^4 + 2mgx_{3*}\omega^2 + mg^2$$

$m = \sigma l \rho$ — масса стержня, J_* — момент инерации недеформированного стержня относительно точки O, а x_{3*} — координата по оси x_3 центра масс недеформированного стержня, из (4.3) получим неравенство

$$V(u_1, u_2) \geq \sigma\rho \int_0^l \{\sigma (\lambda_1 u_1'^2 + \lambda_2 u_2'^2) + \{\lambda_1 - \omega^2 - h [(J_3 - J_1)\omega^2 - Mgx_{30}]^{-1}\} \times$$
$$\times u_1^2 + \{\lambda_2 - \omega^2 - h [(J_3 - J_2)\omega^2 - Mgx_{30}]^{-1}\} u_2^2\} ds \qquad (4.5)$$

Здесь λ_1 и λ_2 — минимумы функционалов

$$\Phi_1(u) = \left\{\int_0^l (u^2 + \sigma u'^2) ds\right\}^{-1} \int_0^l \{E_* I_2 u''^2 - g(l - s) u'^2\} ds$$

$$\Phi_2(u) = \left\{\int_0^l (u^2 + \sigma u'^2) ds\right\}^{-1} \int_0^l \{E_* I_1 u''^2 - g(l - s) u'^2\} ds$$

в классе непрерывно дифференцируемых до четвертого порядка функций $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, удовлетворяющих условиям $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.

Из (4.2), (4.4) и (4.5) следует, что неравенства

$$\lambda_i > 0, \quad \lambda_i - \omega^2 > h [(J_3 - J_i)\omega^2 - Mgx_{30}]^{-1} > 0 \quad (i = 1, 2)$$

служат достаточными условиями положительной определенности $\delta^2 W$ и, следовательно, представляют собой достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (4.1).

5. Рассмотрим в центральном ньютоновом поле сил движение твердого тела, несущего на себе тонкие или тонкостенные нерастяжимые упругие стержни, каждый из которых имеет две плоскости симметрии. Предположим, что три пары упругих стержней длины l защемлены в теле на одинаковых расстояниях a от центра масс O твердого тела и в недеформированном состоянии расположены по главным центральным осям инерции тела, причем главные плоскости инерции служат плоскостями симметрии стержней.

Задача об устойчивости относительного равновесия такой системы на круговой орбите исследовалась в работе [11] при помощи представления второй вариации $\delta^2 W$ в виде (1.6). Ниже эта задача решается путем представления $\delta^2 W$ в виде (1.4). Тогда для квадратичной формы (1.5) имеем

$$U = {}^1/_2\Omega^2 [(J_2 - J_1 - b_1)\beta_1^2 + 3(J_1 - J_3 - b_2)\gamma_1^2 +$$
$$+ 4(J_2 - J_3 - b_3)\gamma_2^2] \qquad (5.1)$$

где величины $b_i > 0$ вычисляются по решениям u_{ij}^* уравнений типа (1.3).

Здесь J_i — главные центральные моменты инерции твердого тела с недеформированными стержнями, $m = \sigma l \rho$ — масса стержня, σ — площадь поперечного сечения стержня, ρ — плотность стержней, Ω — угловая скорость движения центра масс системы по орбите.

Условия положительной определенности (5.1) имеют вид

$$J_2 - J_1 - b_1 > 0,\ J_1 - J_3 - b_2 > 0,\ J_2 - J_3 - b_3 > 0$$

Для вычисления постоянных b_i могут быть использованы численные методы.

Достаточные условия устойчивости можно получить и без использования численных методов, если сделать оценки функционалов, входящих в $\delta^2 V$. Тогда можно показать, что достаточными условиями положительной определенности функционала F_2 служат условия

$$3k_1^4 < \nu_*^4,\quad 1 - {}^1/_4 k_2^4 > 0,\quad 3k_2^4 < \nu_*^4 (1 - {}^1/_4 k_2^4) \quad (k_i^4 = \rho\sigma\Omega^2 l^4 (EI_i)^{-1})$$

Здесь EI_i — жесткости стержней на изгиб ($i = 1, 2, 3$), $\nu_* = 1.875$ — первый корень уравнения $1 + \operatorname{ch}\nu \cos\nu = 0$; для простоты вычислений предполагается, что $a = 0$.

Величины b_i можно заменить на

$$b_1^\circ = 2ml^2 \left[\frac{11}{420} \frac{k_2^4}{1 - {}^1/_4 k_2^4} + g_1(\nu_1)\right],\quad b_2^\circ = 2ml^2 \left[\frac{11k_3^4}{140 + 33k_3^4} + g_2(\nu_2)\right]$$

$$b_3^\circ = 2ml^2 \left[\frac{11k_3^4}{3(11k_3^4 + 35)} + \frac{4}{3} g_2(\nu_4)\right]$$

при этом $b_i \leqslant b_i^\circ$ ($i = 1, 2, 3$). Здесь

$$g_1(\nu) = \frac{1}{3} - \frac{\operatorname{sh} 2\nu - \sin 2\nu}{2\nu^3 (2 + \operatorname{ch} 2\nu + \cos 2\nu)},\quad g_2(\nu) = \frac{\operatorname{ch}\nu \sin\nu - \operatorname{sh}\nu \cos\nu}{\nu^3 (1 + \operatorname{ch}\nu \cos\nu)} - \frac{1}{3}$$

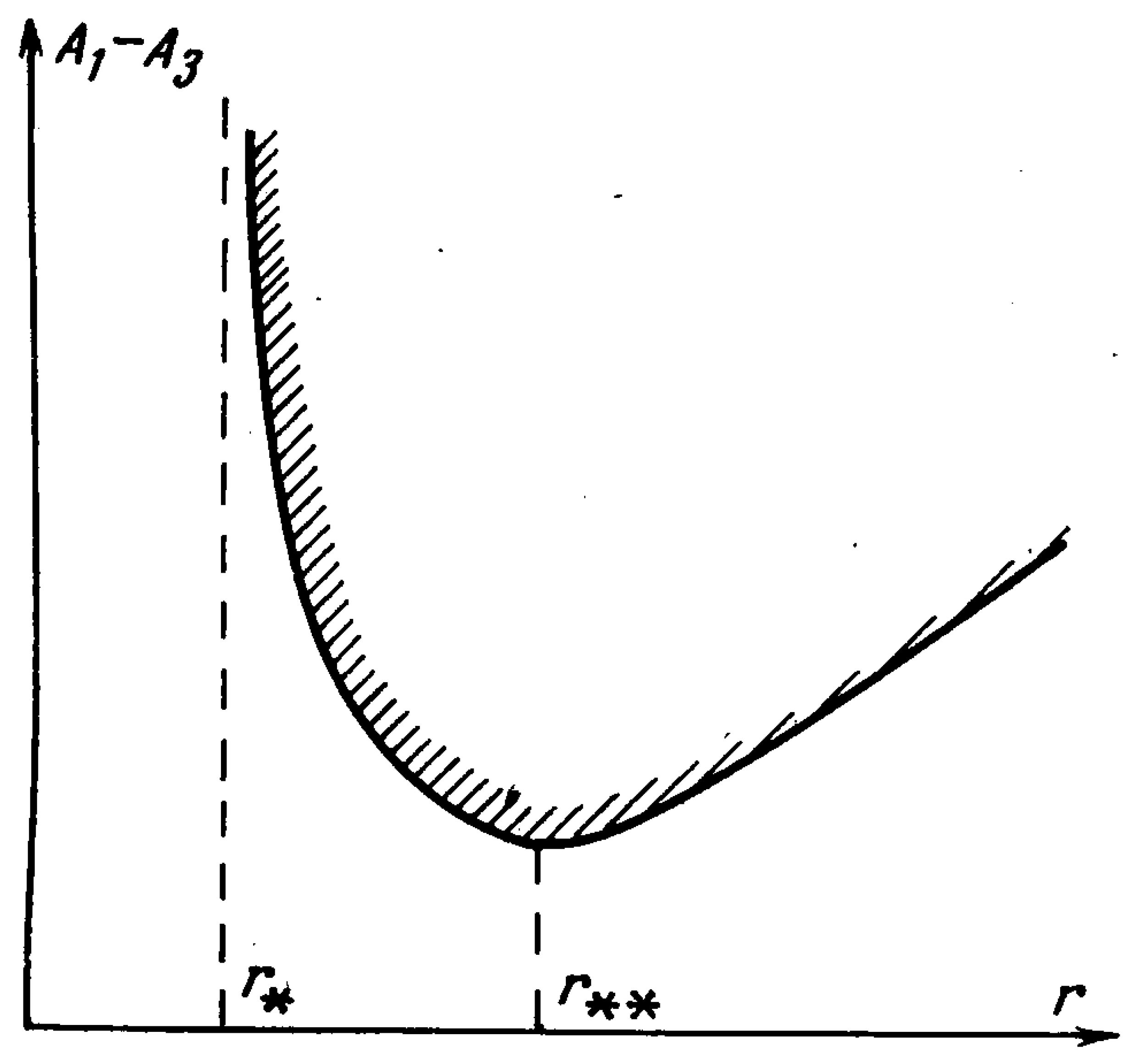
$$\nu_1^4 = {}^1/_4 k_1^4,\quad \nu_2^4 = 3k_1^4,\quad \nu_*^4 = 3k_2^4 / (1 - {}^1/_4 k_2^4)$$

Рассмотрим более подробно достаточные условия устойчивости твердого тела с одной парой упругих стержней, имеющих в положении относительного равновесия направление касательной к орбите. Достаточные условия устойчивости имеют вид

$$3k_1^4 < \nu_*^4,\ A_2 > A_3,\ A_2 - A_1 + {}^2/_3 ml^2 [1 - 3g_1(\nu_1)] > 0$$

$$A_1 - A_3 - {}^2/_3 ml^2 [1 + 3g_2(\nu_2)] > 0$$

Здесь A_i — главные центральные моменты инерции одного твердого тела. В частности, для круглых стержней с поперечным сечением радиуса r область устойчивости на плоскости параметров $A_1 - A_3$ и r указана на фиг. 3.



Фиг. 3

Значение r_* соответствует значению $\nu_2 = \nu_*$, т. е. тому значению параметра, при котором происходит потеря устойчивости прямолинейной формы стержня. Расчеты показывают, что при фиксированных всех остальных параметрах стержня и фиксированной угловой скорости орбитального движения Ω существует оптимальный радиус стержня r_{**}, при котором область устойчивости наибольшая. При $r > r_{**}$ область устойчивости сужается из-за увеличения массы стержня ($m = \rho\pi r^2 l$), а при $r < r_{**}$ она сужается из-за увеличения деформируемости стержня, так как $\nu \to \nu_*$ и $g(\nu) \to \infty$ при $r \to r_*$.

Поступила 2 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. М., «Наука», 1970.
2. Румянцев В. В. Некоторые задачи динамики сложных систем. В сб.: Проблемы прикладной математики и механики. М., «Наука», 1971.
3. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
4. Румянцев В. В. О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
5. Meirovitch L. Reply by Author to V. V. Rumyantsev. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 9.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
7. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
8. Пожарицкий Г. К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
9. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
10. Самсонов В. А. О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
11. Рубановский В. Н. Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
12. Самсонов В. А. Устойчивость и бифуркация равновесия тела с жидкостью. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1971, № 16.
13. Морозов В. М., Рубановский В. Н. Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.