УДК 536.24

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПЛОСКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ ИЗНУТРИ НЕКРУГОВЫМ КОНТУРОМ

И. А. Ябко

(Москва)

Рассмотрим задачу о нестационарном распространении тепла в плоской бесконечной области, ограниченной изнутри выпуклым контуром Г, на котором поддерживается постоянная температура u_0. Начальная температура в области предполагается нулевой. Пусть уравнение контура Г в полярных координатах имеет вид: $r = a\gamma(\varphi)$, где a — характерный линейный размер задачи.

Задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad r > a\gamma(\varphi) \tag{1}$$

при начальном и граничных условиях

$$\begin{gathered} u \to 0 \text{ при } \tau \to +0,\ r > a\gamma(\varphi) \\ u \to u_0 \text{ при } r \to a\gamma(\varphi),\ \tau > 0 \\ u \to 0 \text{ при } r \to \infty,\ \tau > 0 \end{gathered} \tag{2}$$

Решение задачи (1), (2) ищем для малых интервалов времени. Пусть u^* — преобразование Лапласа по τ от u, т. е.

$$u^* = u^*(s) = \int_0^\infty u e^{-s\tau}\, d\tau$$

Введя безразмерный радиус $\rho = r/a$ и используя свойства преобразования Лапласа, перепишем (1), (2), в виде

$$\begin{gathered} \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u^*}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \varphi^2}\right)-u^*=0, \qquad \rho > \gamma(\varphi) \qquad \left(\varepsilon^2=\frac{\varkappa}{sa^2}\right) \\ u^* \to u_0/s \text{ при } \rho \to \gamma(\varphi) \\ u^* \to 0 \text{ при } \rho \to \infty \end{gathered} \tag{3}$$

Имея в виду решение задачи (1), (2) для малых интервалов времени, будем искать асимптотику решения задачи (3) при $s \to \infty$, считая малым параметр ε^2, стоящий множителем при старших производных в (3). В рассматриваемом случае имеет место регулярное вырождение краевой задачи, детально изученное в [1,2]. Решение задачи (3) имеет характер погранслоя и быстро затухает с удалением от границы Г. Введем новую переменную $t = [\rho - \gamma(\varphi)]/\varepsilon$, что соответствует растяжению окрестности Г в $1/\varepsilon$ раз. В переменных t, φ оператор в левой части уравнения (3) перепишется в виде

$$L_\varepsilon = \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)-1=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k M_k \tag{4}$$

$$M_0=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1, \qquad M_{k+1}=(-1)^k\frac{t^{k-1}}{\gamma^{k+1}}\left[t\frac{\partial}{\partial t}-k\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right] \tag{5}$$

$$(k=0,1,2,\ldots)$$

Ищем решение задачи (3) в виде

$$u^*=\frac{u_0}{s}\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l u_l^* \tag{6}$$

В силу линейности оператора L_ε

$$L_\varepsilon u^* = \frac{u_0}{s} \sum_{k,\, l=0}^{\infty} \varepsilon^{k+l} M_k u_l^* = \frac{u_0}{s} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \left(\sum_{k=1}^{m} M_{m-k+1} u^*_{k-1} \right) \tag{7}$$

Приравнивая нулю в равенстве (7) члены при различных степенях ε и используя (3), получаем рекуррентную последовательность краевых задач

$$M_0 u_0^* = 0, \quad u_0^* |_{t=0} = 1, \quad u_0^* |_{t\to\infty} = 0 \tag{8}$$

$$M_0 u_m^* = -\sum_{k=1}^{m} M_{m-k+1} u^*_{k-1}, \quad u_m^* |_{t=0} = 0, \quad u_m^* |_{t\to\infty} = 0 \tag{9}$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

Решением (8) служит $u_0^* = e^{-t}$. Очевидно также, что решение (9) — функция вида

$$u_n^* = \sum_{l=1}^{n} a_l^{(n)} (\varphi)\, t^l\, e^{-t} \tag{10}$$

Пользуясь (5), перепишем (9) в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1 \right) u_m^* = \sum_{k=1}^{m} \left(-\frac{1}{\gamma} \right)^{m-k+1} \left[t \frac{\partial}{\partial t} - (m-k) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] u^*_{k-1}$$

Подставляя в последнее равенство соотношение (10), предварительно положив в нем $n = m$ и $n = k - 1$, а затем приравнивая члены при одинаковых степенях t в левой и правой частях, получим

$$-2m a_m^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{m-k}}{\gamma^{m-k+1}} a_{k-1}^{(k-1)} \tag{11}$$

$$(m - l + 1) \left[(m - l)\, a_{m-l}^{(m)} - 2 a_{m-l-1}^{(m)} \right] =$$

$$= \sum_{k=2+l}^{m} \frac{(-1)^{m-k+1}}{\gamma^{m-k+1}} \left[(k - l - 1)\, a_{k-l-1}^{(k-1)} - a_{k-l-2}^{(k-1)} - (m-k) \frac{d^2 a_{k-1-l}^{(k-1)}}{d\varphi^2} \right] \tag{12}$$

$$(l = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Из (11) находим

$$-2m a_m^{(m)} = -\frac{1}{\gamma} \sum_{k=1}^{m-1} \left(-\frac{1}{\gamma} \right)^{m-k-1} a_{k-1}^{(k-1)} + \frac{1}{\gamma} a_{m-1}^{(m-1)} = \frac{2m-1}{\gamma} a_{m-1}^{(m-1)}$$

Таким образом, получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$a_m^{(m)} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{2m} - 1 \right) a_{m-1}^{(m-1)}, \quad a_0^{(0)} = 1 \qquad (m = 1,\ 2, \ldots) \tag{13}$$

Аналогичным образом из (12) при $l = 0$, $l = 1$ и т. д. последовательно выводятся рекуррентные соотношения

$$a_m^{(m+1)} = \frac{3 - 4m}{2\gamma m} a_{m-1}^{(m)} + \frac{3 - 2m}{2\gamma^2 m} a_{m-2}^{(m-1)} + \frac{1}{8\gamma^2 m} a_{m-1}^{(m-1)} + \frac{1}{2\gamma^2 m} \frac{d^2 a_{m-1}^{(m-1)}}{d\varphi^2}, \quad a_0^{(1)} = 0$$

$$a_m^{(m+2)} = \frac{3 - 4m}{2\gamma m} a_{m-1}^{(m+1)} + \frac{3 - 2m}{2\gamma^2 m} a_{m-2}^{(m)} - \frac{3}{4\gamma} a_m^{(m+1)} + \frac{2 - 3m}{4\gamma^2 m} a_{m-1}^{(m)} + \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{16\gamma^2 m} a_m^{(m)} + \frac{1}{2\gamma^2 m} \frac{d^2 a_{m-1}^{(m)}}{d\varphi^2} + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{d^2 a_m^{(m)}}{d\varphi^2}, \quad a_0^{(2)} = 0 \quad (m = 1,\ 2, \ldots)$$

Перепишем сумму, стоящую в правой части равенства (6), с учетом (10) в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m{}^* = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(m)} \xi^m e^{-t} + \ldots + \varepsilon^l \sum_{m=l+1}^{\infty} a_{m-l}^{(m)} \xi^{m-l} e^{-t} + \ldots$$

Следующее выражение служит n-м приближением для точного решения u^*:

$$\left(\frac{u_0}{s}\right) \sum_{l=0}^{n} \varepsilon^l x_l e^{-t}$$

Здесь

$$\xi = \varepsilon t, \qquad x_0 = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(m)} \xi^m, \qquad x_l = \sum_{m=l+1}^{\infty} a_{m-l}^{(m)} \xi^{m-l}$$

$$(l = 1,\ 2,\ \ldots)$$

Найдем x_0 при помощи (13). Имеем

$$\left(1 + \frac{\xi}{\gamma}\right) x_0 = 1 + \frac{1}{2\gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} a_{m-1}^{(m-1)} \xi^m \tag{15}$$

Дифференцируя (15) по ξ, получаем для x_0 обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной ξ

$$\frac{\partial x_0}{\partial \xi} + \frac{x_0}{2(\gamma + \xi)} = 0, \qquad x_0(0) = 1 \tag{16}$$

Отсюда

$$x_0 = (1 + \xi / \gamma)^{-1/2} = (\gamma / \rho)^{1/2}$$

Таким образом, нулевое приближение задачи (3)

$$u^* = \frac{u_0}{s} \left[\frac{a\gamma(\varphi)}{r}\right]^{1/2} e^{-[r - a\gamma(\varphi)] \sqrt{s/\varkappa}} \tag{17}$$

Обращение преобразования Лапласа дает нулевое приближение решения задачи (1), (2)

$$u = u_0 \left[\frac{a\gamma(\varphi)}{r}\right]^{1/2} \operatorname{erfc}\left(\frac{r - a\gamma}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right) \tag{18}$$

Аналогично предыдущему находятся x_1, x_2 и т. д. Для x_1 дифференциальное уравнение по ξ имеет вид

$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi} + \frac{x_1}{2(\gamma + \xi)} = \frac{1}{8\gamma^2}\left(1 + \frac{\xi}{\gamma}\right)^{-2} \left(x_0 + 4\frac{\partial^2 x_0}{\partial \varphi^2}\right), \qquad x_1(0) = 0 \tag{19}$$

Из (19) находим

$$x_1 = \frac{1}{8\gamma}\left(\frac{\gamma}{\rho}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right) \left[1 + \gamma^2 \left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right)^2 \left(\frac{d\gamma^{-1}}{d\varphi}\right)^2 - \gamma\left(1 - \frac{\gamma}{\rho}\right)\left(\frac{d^2\gamma^{-1}}{d\varphi^2}\right)\right]$$

Таким образом, первое приближение решения задачи (3)

$$u^* = \left(\frac{a\gamma}{r}\right)^{1/2} \left\{1 + \frac{1}{8a\gamma}\left(1 - \frac{a\gamma}{r}\right)\left[1 + \gamma^2\left(1 - \frac{a\gamma}{r}\right)^2 \left(\frac{d\gamma^{-1}}{d\varphi}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \gamma\left(1 - \frac{a\gamma}{r}\right) \frac{d^2\gamma^{-1}}{d\varphi^2}\right] \sqrt{\frac{\varkappa}{s}}\right\} \frac{u_0}{s} e^{-[r - a\gamma(\varphi)] \sqrt{s/\varkappa}} \tag{20}$$

Обращение преобразования Лапласа дает первое приближение решения задачи (1), (2)

$$u = u_0 \left(\frac{a\gamma}{r}\right)^{1/2} \left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{r - a\gamma}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right) + \frac{\sqrt{\varkappa\tau}}{4a\gamma}\left(1 - \frac{a\gamma}{r}\right)\left[1 + \gamma^2\left(1 - \frac{a\gamma}{r}\right)^2 \left(\frac{d\gamma^{-1}}{d\varphi}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \gamma\left(1 - \frac{a\gamma}{r}\right) \frac{d^2\gamma^{-1}}{d\varphi^2}\right] \operatorname{ierfc}\left(\frac{r - a\gamma}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right)\right\} \tag{21}$$

Формулы первого приближения можно переписать в более простом виде. Пусть температура определяется в точке M, а точка P лежит на Γ и такая, что отрезок MP ортогонален к Γ. Если $R = R_P$ — радиус кривизны Γ в точке P, а d_{MP} — расстояние между M и P, то выражения (20), (21) преобразуются к виду

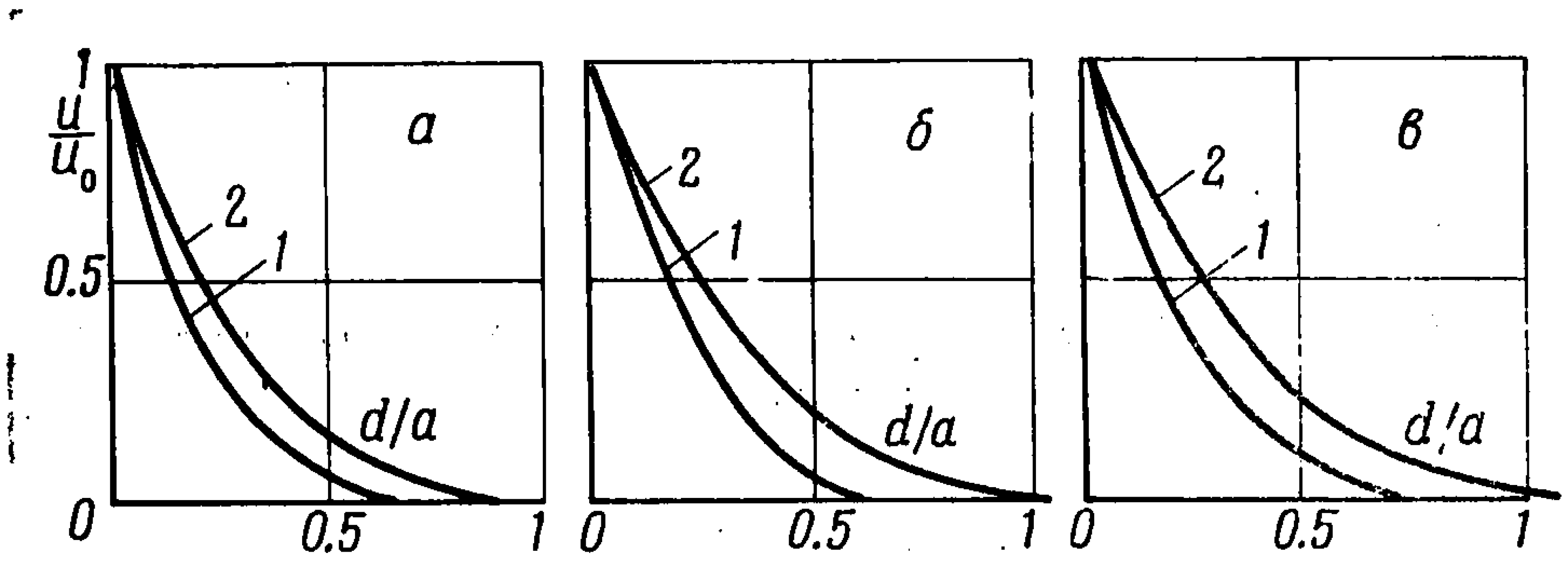
$$u^* = \left(1 + \frac{d_{MP}}{R_P}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{d_{MP}}{8R_P\,(R_P + d_{MP})} \sqrt{\frac{\varkappa}{s}}\right] \frac{u_0}{s} e^{-d_{MP}\sqrt{s/\varkappa}}$$

$$u = u_0 \left(1 + \frac{d_{MP}}{R_P}\right)^{-1/2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{d_{MP}}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right) + \frac{\sqrt{\varkappa\tau}\, d_{MP}}{4R_P\,(R_P + d_{MP})} \operatorname{ierfc}\left(\frac{d_{MP}}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right)\right] \tag{22}$$

С учетом уравнений для x_0 и x_1 дифференциальное уравнение по ξ для x_2 имеет следующий вид:

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi} + \frac{x_2}{2(\gamma + \xi)} = \frac{1}{8\gamma^2}\left(1 + \frac{\xi}{\gamma}\right)^{-2} \left[x_1 + 4\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} - \frac{x_0}{\gamma + \xi} - \frac{3}{\gamma + \xi}\frac{\partial^2 x_0}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\frac{x_0}{\gamma + \xi}\right)\right]$$

$$x_2(0) = 0 \tag{23}$$



Если выбрать длину дуги λ в качестве параметра, а точку P характеризовать значением $\lambda = \lambda_P$, то решение уравнения (23) может быть записано в форме

$$x_2 = a^2\left(1 + \frac{d_{MP}}{R_P}\right)^{-1/2} \left[-\frac{d_{MP}\,(7d_{MP} + 16R_P)}{128R_P^2\,(R_P + d_{MP})^2} - \frac{d_{MP}^3\, R_P}{48\,(R_P + d_{MP})^3}\left(\frac{d^2R^{-1}}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_P}\right] \tag{24}$$

Таким образом, второе приближение решения задачи (3)

$$u^* = u_0\left(1 + \frac{d_{MP}}{R_P}\right)^{-1/2} \left\{1 + \frac{d_{MP}}{8R_P\,(R_P + d_{MP})}\sqrt{\frac{\varkappa}{s}} - \left[\frac{d_{MP}\,(7d_{MP} + 16R_P)}{128R_P^2\,(R_P + d_{MP})^2} + \frac{d_{MP}^3\, R_P}{48\,(R_P + d_{MP})^3}\left(\frac{d^2R^{-1}}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_P}\right]\frac{\varkappa}{s}\right\}\frac{1}{s}\, e^{-d_{MP}\sqrt{s/\varkappa}} \tag{25}$$

Обращение преобразования Лапласа дает второе приближение решения задачи (1), (2)

$$u = u_0\left(1 + \frac{d_{MP}}{R_P}\right)^{-1/2} \left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{d_{MP}}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right) + \frac{\sqrt{\varkappa\tau}\, d_{MP}}{4R_P\,(R_P + d_{MP})}\operatorname{ierfc}\left(\frac{d_{MP}}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right) - \right. \tag{26}$$

$$\left. - \frac{\varkappa\tau}{4R_P^2}\left[\frac{d_{MP}\,(16 + 7d_{MP}/R_P)}{8R_P\,(1 + d_{MP}/R_P)^2} + \frac{d_{MP}^3}{3\,(1 + d_{MP}/R_P)^3}\left(\frac{d^2R^{-1}}{d\lambda^2}\right)_{\lambda=\lambda_P}\right] i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{MP}}{2\sqrt{\varkappa\tau}}\right)\right\}$$

Если в формулах (25), (26) положить $R_P = a = \mathrm{const}$, то $d_{MP} = r - a$ и приходим к известным формулам второго приближения для задачи о распространении тепла в области, ограниченной изнутри окружностью [3].

В качестве примера рассмотрим случай, когда контур Г — эллипс с полуосями a, $^1/_2\, a$ и задается уравнениями $x = a \cos t$, $y = {}^1/_2\, a \sin t$. Пусть точке P соответствует значение $t = t_P$. На фигуре приведены графики распределения температуры вдоль луча PM, ортогонального к Г в точке P, при значениях времени, соответствующих $\varkappa\tau / a^2 = 0.04$ (кривые *1*) и $\varkappa\tau / a^2 = 0.09$ (кривые *2*), и значениях t_P, равных 0 (*а*), $\pi / 4$ (*б*) и $\pi / 2$ (*в*).

Поступила 3 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧАСТОТЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

В. К. Карпасюк

(Астрахань)

В теории движения заряженных частиц в периодических ускоряюще-фокусирующих структурах при решении уравнения Хилла широко применяется метод «гладкого приближения», основанный на представлении решения в виде «медленной» гармонической функции с «быстро» осциллирующей амплитудой.

Ниже выводится формула, выражающая частоту медленной составляющей такого решения через амплитуды фурье-гармоник коэффициента уравнения, которая может быть удобной для практических вычислений.

В гладком приближении [1], сводящемся к первому приближению метода усреднения [2], решение уравнения Хилла

$$x^{\cdot\cdot} + q(t)x = 0, \qquad q(t + T) \equiv q(t) \qquad (T > 0) \tag{1}$$

ищется в виде $x(t) = [1 + r(t)]X(t)$, где $X(t)$ считается медленной (по сравнению с $r(t)$) функцией, а $r(t)$ однозначно определяется условиями

$$r^{\cdot\cdot} = -q(t) + \langle q \rangle \equiv -\Delta q(t) \tag{2}$$

$$\langle r^{\cdot} \rangle = 0, \quad \langle r \rangle = 0 \tag{3}$$

Здесь знак $\langle\ \rangle$ означает усреднение по периоду коэффициента $q(t)$. Функция $X(t)$ приближенно удовлетворяет уравнению

$$X^{\cdot\cdot} + \omega^2 X = 0 \qquad (\omega^2 = \langle q \rangle + \langle r^{\cdot 2} \rangle) \tag{4}$$

Гладкое приближение применимо, когда $\omega \ll 2\pi / T$.

Выразим ω^2 через коэффициенты разложения $q(t)$ в ряд Фурье

$$q(t) = \langle q \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} \right) \tag{5}$$