УДК 539.3

О СЖАТИИ УПРУГОГО СЛОЯ БАЛОЧНЫМИ ПЛИТАМИ

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

На основании точного решения контактной задачи о давлении полубесконечной балки на упругую полосу строится соответствующая система кусочно-однородных решений, которая используется при рассмотрении задач о сжатии упругой полосы периодической последовательностью одинаковых конечных балок. Произвольные постоянные в кусочно-однородных решениях определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений, имеющей нормальный двусторонний определитель с экспоненциально убывающими элементами.

Задача о давлении полубесконечной балочной плиты на линейно-деформируемое основание, и в частности, на упругий слой, была решена впервые другим методом Г. Я. Поповым [1, 2].

1. Рассмотрим полубесконечную балочную плиту $x \geqslant 0$, $y = 1$ постоянной толщины h, лежащую на упругом слое $0 \leqslant y \leqslant 1$, который в свою очередь лежит на абсолютно жестком и гладком основании. Пусть нагрузка $q(x)$ на плиту, перерезывающая сила P и момент M, приложенные к ее кромке, а также нормальная пригрузка $r(x)$ на свободную часть слоя $x < 0$ не изменяются в направлении кромки балочной плиты; трение на обеих поверхностях слоя отсутствует. Тогда упругий слой подвержен плоской деформации, и граничные условия задачи для соответствующей бесконечной полосы $0 \leqslant y \leqslant 1$, сжимаемой полубесконечной балкой $x \geqslant 0$, $y = 1$, имеют вид

$$\tau_{xy} = v = 0 \ (y = 0), \ \tau_{xy} = 0 \ (y = 1) \tag{1.1}$$

$$\sigma_y = r(x) \ (y = 1, x < 0), \ \eta(x) \equiv D\partial^4 v / \partial x^4 + \sigma_y = q(x) \ (y = 1, x \geqslant 0) \tag{1.2}$$

$$D = {}^1/_{12} E_0 h^3 (1 - \nu_0^2)^{-1}$$

где D — жесткость, E_0 — модуль упругости, ν_0 — коэффициент Пуассона балки.

Решение этой задачи будем искать в форме Папковича — Нейбера

$$u(x, y) = F_2 - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x}(yF_1 + xF_2 + F_3) \tag{1.3}$$

$$v(x, y) = F_1 - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y}(yF_1 + xF_2 + F_3)$$

Положим $F_2 = 0$, $F_1 = \partial F_4 / \partial y$, $F_3 = 4(1 - \nu)(F_4 - F_5)$, где F_4 и F_5 — гармонические функции, и применим к выражениям (1.3) двустороннее преобразование Лапласа. Учитывая условия (1.1), получим

$$u(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-px} dx = C(p) p [\varepsilon(p) - \rho(p)] \tag{1.4}$$

$$v(p, y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{-px} dx = C(p) [\varepsilon'(p) + \rho'(p)]$$

$$\rho(p) = 2(1 - \nu) \sin p \cos py, \ \varepsilon(p) = \sin p \cos py + p(\cos p \cos py + y \sin p \sin py)$$

Здесь штрих означает производную по y, в силу условий (1.2) функция $C(p)$ удовлетворяет уравнениям

$$\sigma^+(p) + \sigma^-(p) = -C(p) p^2 \frac{EN_1(p)}{2(1+\nu)}, \quad \eta^+(p) + \eta^-(p) = -C(p) p^2 \frac{EN_2(p)}{2(1+\nu)} \tag{1.5}$$

где

$$N_1(p) = \sin 2p + 2p,\ N_2(p) = 2ap^3 \sin^2 p + \sin 2p + 2p,\ a = 2(1 - \nu^2) E^{-1} D$$

$$\sigma^+(p) = \int_0^\infty \sigma_y(x, 1) e^{-px} dx, \quad \sigma^-(p) = \int_{-\infty}^0 r(x) e^{-px} dx$$

$$\eta^+(p) = \int_0^\infty q(x) e^{-px} dx, \quad \eta^-(p) = \int_{-\infty}^0 \eta(x) e^{-px} dx$$

Функции $N_1(p)$ и $N_2(p)$ нечетны. Они не имеют вещественных и чисто мнимых нулей, кроме $p = 0$, что следует из неравенств

$$2ap^3 \sin^2 p + \sin 2p + 2p > \sin 2p + 2p > 0 \text{ при } p > 0$$

$$2ap^3 \operatorname{sh}^2 p + \operatorname{sh} 2p + 2p > \operatorname{sh} 2p + 2p > 0 \text{ при } p > 0$$

Комплексные нули функций $N_1(p)$ и $N_2(p)$ в квадранте $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Im} p > 0$ обозначим соответственно через a_k и b_k ($k = 1, 2, \ldots$), введем числа $a_k = -a_{-k}$ и $b_{-k} = -b_k$. При больших значениях k имеют место оценки

$$a_k = k\pi + iO(\ln k) + O(1),\ b_k = k\pi + o(1) \tag{1.6}$$

По теореме обращения Лапласа

$$u = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p)\, p\, [\varepsilon(p) - \rho(p)]\, e^{px} dp, \quad v = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p)\, [\varepsilon'(p) + \rho'(p)]\, e^{px} dp$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{2\pi i(1+\nu)} \int_L C(p)\, p^2 \varepsilon(p)\, e^{px} dp, \quad \sigma_x = -\frac{E}{2\pi i(1+\nu)} \int_L C(p)\, \varepsilon''(p)\, e^{px} dp$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2\pi i(1+\nu)} \int_L C(p)\, p\varepsilon'(p)\, e^{px} dp \tag{1.7}$$

Область изменения параметра p и путь интегрирования L, проходящий в этой области, зависят от характера функций $r(x)$ и $q(x)$ и от вида исследуемых перемещений и напряжений. Пусть нагрузки $q(x)$ и $r(x)$ являются местными или при $|x| \to \infty$ убывают экспоненциально. Тогда функция $u(p, y)$ существует в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \alpha$, трансформанты же перемещения $v(x, y)$ и всех напряжений, а также функции, входящие в соотношения (1.5), существуют в полосе $|\operatorname{Re} p| < \alpha$ и, в частности, на мнимой оси.

Таким образом, уравнение Винера — Хопфа [3]

$$\sigma^+(p) = K(p)\, \eta^-(p) + K(p)\, \eta^+(p) - \sigma^-(p) \tag{1.8}$$

которое получается после исключения из (1.5) функции $C(p)$, можно решать как задачу линейного сопряжения [4] на мнимой оси с коэффициентом $K(p) = N_1(p) / N_2(p)$ и свободным членом $K(p)\, \eta^+(p) - \sigma^-(p)$.

Рассмотрим вначале однородную задачу

$$\sigma^+(p) = K(p)\, \eta^-(p) \tag{1.9}$$

возникающую при приложении усилий только к торцу балки. Уравнение (1.9) запишем в виде

$$X^+(p) = G(p)\, X^-(p) \tag{1.10}$$

$$X^+(p) = a^{1/2}(1 - p)^{3/2}[\eta^-(p)]^{-1}, \quad X^-(p) = a^{-1/2}(1 + p)^{-3/2}[\sigma^+(p)]^{-1}$$

$$G(p) = a(1 - p^2)^{3/2} K(p), \quad -\pi < \arg(1 \pm p) < \pi$$

Функция $G(p)$, удовлетворяющая условию Гельдера на всем контуре, имеет индекс $\varkappa = 0$. По Ф. Д. Гахову решение задачи (1.10) выражается в виде

$$X(p) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(t)\,dt}{t-p}\right\}$$

$$X^{\pm}(i\tau) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(t)\,dt}{t-i\tau} \pm \frac{1}{2}\ln G(i\tau)\right\}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям и учитывая четность функции $K(p)$, получим каноническое решение задачи (1.9)

$$\sigma_0^+(p) = a^{-1/2}(1+p)^{-3/2}\exp\left\{\frac{p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln\left[a(1+t^2)^{3/2}K(it)\right]dt}{t^2+p^2}\right\} \tag{1.11}$$

$$\eta_0^-(p) = [\sigma_0^+(-p)]^{-1} \tag{1.12}$$

причем

$$\sigma^+_0(p) \sim a^{-1/2}p^{-1/2} \text{ при } p\to\infty,\ \operatorname{Re} p \geqslant 0 \tag{1.13}$$

На мнимой оси

$$\sigma_0^+(i\tau) = (1+i\tau)^{-3/2}(1+\tau^2)^{3/4}[K(i\tau)]^{1/2}\exp\left\{\frac{i\tau}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[\frac{(1+t^2)^{3/2}K(it)}{(1+\tau^2)^{3/2}K(i\tau)}\right]\frac{dt}{t^2-\tau^2}\right\} \tag{1.14}$$

Общее решение задачи (1.8) при $r(x) = 0$ имеет вид

$$\sigma^+(p) = -\frac{\sigma_0^+(p)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\eta^+(t)\,dt}{\eta_0^-(t)(t-p)} + \sigma_0^+(p)(Ap+B) \tag{1.15}$$

На мнимой оси

$$\sigma^+(i\tau) = \frac{\sigma_0^+(i\tau)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left[\frac{\eta^+(i\tau)}{\eta_0^-(i\tau)} - \frac{\eta^+(t)}{\eta_0^-(t)}\right]\frac{dt}{t-i\tau} + \frac{1}{2}K(i\tau)\eta^+(i\tau) + \sigma_0^+(i\tau)[Ai\tau+B] \tag{1.16}$$

Из (1.15) и (1.13) следует, что, если $|\eta^+(it)| \sim t^{1/2-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ при $t\to\infty$, то $\sigma^+(p) \sim p^{-5/2}$ при $A = B = 0$ и при $p\to\infty$. Используя эту оценку и соответствующее доказательство из [5], можно заключить, что под краем произвольно нагруженной балки характер нормальных напряжений определяется формулой

$$\sigma_y(x,1) = A(\pi a x)^{-1/2} + BO(x^{1/2}) + O(x^{3/2}) \text{ при } x\to+0 \tag{1.17}$$

Постоянные A и B найдем из условия равновесия. Пусть на единицу торца балочной плиты действуют момент M, направленный против часовой стрелки, и перерезывающая сила P, направленная по оси y. Тогда

$$P = \int_0^\infty \sigma_y(x,1)\,dx - \eta^+(0), \qquad M = \int_0^\infty \sigma_y(x,1)\,x\,dx + \eta^{+*}(0) \tag{1.18}$$

Звездочкой обозначена производная по p.

Подставим в условия (1.18) выражение

$$\sigma_y(x,1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \sigma^+(p)\,e^{px}dp$$

предварительно сместив в нем контур L влево за мнимую ось, и поменяем порядки интегрирования. Интегрируя по x и замыкая контур L справа полуокружностью большого радиуса, в силу оценки (1.13) и регулярности функции $\sigma^+(p)$ в правой полуплоскости, по теореме о вычетах получим

$$P = \sigma^+ (0) - \eta^+ (0), \quad M = -\sigma^{+*} (0) + \eta^{+*} (0)$$

Отсюда, учитывая соотношения

$$\sigma_0^+ (0) = \eta_0^- (0) = K (0) = 1, \quad K^* (0) = 0$$

используя и дифференцируя по p формулы (1.12), (1.14) и (1.16), после некоторых вычислений получим

$$A = -M - \sigma_0^{+*} (0) \left[P + \frac{1}{2} \eta^+ (0)\right] + \frac{1}{2} \eta^{+*} (0) + + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left\{\left[\frac{\eta^+ (t)}{\eta_0^- (t)}\right]^* - \left[\frac{\eta^+ (0)}{\eta_0^- (0)}\right]^*\right\} \frac{dt}{t} \tag{1.19}$$

$$B = P + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\frac{\eta^+ (t)}{\eta_0^- (t)} - \eta^+ (0)\right] \frac{dt}{t} + \frac{\eta^+ (0)}{2}$$

$$\eta_0^{-*} (i\tau) = \eta_0^- (i\tau) \left\{\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{K^* (it)}{K (it)} - \frac{K^* (i\tau)}{K (i\tau)}\right] \frac{tdt}{t^2 - \tau^2} - \frac{K^* (i\tau)}{2K (i\tau)}\right\}$$

$$\sigma_0^{+*} (0) = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \frac{K^* (it)\, dt}{K (it)\, t}$$

В частности, при $q (x) = 0$

$$A = -M - \sigma_0^{+*} (0) P, \quad B = P \tag{1.20}$$

Рассмотрим те отдельные виды нагрузок, которые понадобятся в пп. 2, 3. Пусть $r (x) = 0$, $q (x) = q_k e^{a_k x}$, тогда $\eta^+ (p) = q_k (p - a_k)^{-1}$. Замыкая в (1.15) контур интегрирования слева полуокружностью большого радиуса, по лемме Жордана и теореме о вычетах получим

$$\sigma^+ (p) = \sigma_0^+ (p) \{[(p - a_k) \eta_0^- (a_k)]^{-1} q_k + Ap + B\} \tag{1.21}$$

Если $r (x) = r_k e^{b_k x}$, $q (x) = 0$, то $\sigma^- (p) = r_k (b_k - p)^{-1}$, и теорема Лиувилля, примененная непосредственно к уравнению (1.8), дает

$$\sigma^+ (p) + \sigma^- (p) = \sigma_0^+ (p) \{r_k [(b_k - p) \sigma_0^+ (b_k)]^{-1} + Ap + B\} \tag{1.22}$$

Пусть на балку в точке $x = c$ действует сосредоточенная сила $(-Q)$. Решение задачи в этом случае выражается формулой (1.15), в которой следует положить $\eta^+ (p) = -Qe^{-cp}$.

Построим решение в другой форме. Задачу (1.1), (1.2) при условиях $r (x) = 0$, $P = M = 0$, $q (x) = -Q\delta (x - c)$, где $\delta (x)$ — дельта-функция Дирака, разобьем на основную

$$\tau_{xy} = v = 0 \text{ при } y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 1$$

$$\eta (x) = -Q\delta (x - c) \text{ при } y = 1 \tag{1.23}$$

и смешанную (1.1), (1.2) при условиях

$$q (x) = 0, \quad r (x) = -\sigma_y^{(\delta)} (x, 1), \quad P = -P^{(\delta)}, \quad M = -M^{(\delta)} \tag{1.24}$$

Здесь $\sigma_y^{(\delta)} (x, 1)$ — нормальное напряжение в полосе при $y = 1$, $P^{(\delta)}$ и $M^{(\delta)}$ — перерезывающая сила и момент в точке $y = 1$, $x = 0$ в решении задачи (1.23). Это решение выражается, очевидно, формулами (1.7), причем

$$C (p) = \frac{2Q (1 + \nu) e^{-pc}}{Ep^2 N_2 (p)} \tag{1.25}$$

Разлагая интеграл в формуле (1.7) для σ_y в ряд по вычетам, взятым в нулях функции $N_2(p)$, и интегрируя по x от $-\infty$ до 0, получим

$$\sigma_y^{(\delta)}(x,\ 1)=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{b_k x},\qquad P^{(\delta)}=-\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}c_k b_k^{-1}$$

$$M^{(\delta)}=\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}c_k b_k^{-2},\qquad c_k=2Qe^{-b_k c}N_1(b_k)\,[N_2^*(b_k)]^{-1}\tag{1.26}$$

Решая задачу (1.1), (1.2), (1.24), (1.26) при помощи формулы (1.22) и добавляя решение (1.7), (1.25), получим

$$u=QH\{p\,[\varepsilon(p)-\rho(p)],\ c,\ x\},\quad v=QH\{\varepsilon'(p)+\rho'(p),\ c,\ x\}$$

$$H\{f(p),\ c,\ x\}=\frac{1+\nu}{\pi iE}\int\limits_L\left\{\frac{e^{-pc}}{p^2N_2(p)}-\frac{\sigma_0^+(p)}{N_1(p)}\sum_{k=1}^{\infty}[t_1(b_k,\ p)+t_1(\bar b_k,\ p)]\right\}f(p)\,e^{px}\,dp$$

$$t_m(\tau,\ p)=\frac{N_1(\tau)\,r_m(\tau)}{\tau^2(p-\tau)\,\sigma_0^+(\tau)\,N_2^*(\tau)},\qquad r_1(\tau)=e^{-\tau c}\tag{1.27}$$

Тем же путем строится функция Грина задачи о пригрузке. В отличие от предыдущей задачи применить к ней непосредственно метод Ф. Д. Гахова нельзя, так как при $r(x)\neq 0$ свободный член в уравнении (1.8) не удовлетворяет условию Гельдера.

2. Построим систему кусочно-однородных решений, полагая в условиях (1.1), (1.2) $q(x)=r(x)=0$ и считая, что торец балки свободен от нагрузки. Следуя работе [5], рассмотрим отдельно подсистемы с особенностями в точках $x=\infty$ и $x=-\infty$.

Однородным граничным условиям

$$v=\tau_{xy}=0\quad(y=0),\qquad \eta(x)=\tau_{xy}=0\quad(y=1)$$

удовлетворяет решение

$$u^{k1}(x,\ y)=\Phi^{k1}\{p\,[\varepsilon(p)-\rho(p)]\},\quad v^{k1}(x,\ y)=\Phi^{k1}\{\varepsilon'(p)+\rho'(p)\}$$

$$\Phi^{k1}\{f(p)\}=A_k\operatorname{Re}[f(b_k)\,e^{b_k x}]+B_k\operatorname{Im}[f(b_k)\,e^{b_k x}]$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные, $k=1,2,\ldots$.

Добавив к нему решение смешанной задачи (1.1), (1.2) при условиях

$$q(x)=0,\qquad r(x)=-\sigma_y^{k1}(x,\ 1)$$

$$P=-\frac{E}{2(1+\nu)}\{A_k\operatorname{Re}[b_kN_1(b_k)]+B_k\operatorname{Im}[b_kN_1(b_k)]\},$$

$$M=\frac{E}{2(1+\nu)}[A_k\operatorname{Re}N_1(b_k)+B_k\operatorname{Im}N_1(b_k)]$$

которое в силу формул (1.7), (1.5) и (1.22) имеет вид

$$u^{k2}(x,\ y)=\Phi^{k2}\{p\,[\varepsilon(p)-\rho(p)]\},\qquad v^{k2}(x,\ y)=\Phi^{k2}\{\varepsilon'(p)+\rho'(p)\}$$

$$\Phi^{k2}\{f(p)\}=A_k\operatorname{Re}H_{k2}[f(p),x]+B_k\operatorname{Im}H_{k2}[f(p),x]$$

$$H_{k2}[f(p),\ x]=\frac{N_1(b_k)}{2\pi i\sigma_0^+(b_k)}\int\limits_L\frac{\sigma_0^+(p)\,f(p)\,e^{px}dp}{(p-b_k)\,N_1(p)}$$

получим первую подсистему $(k=1,2,\ldots)$

$$u^{(k)}(x,\ y)=\Phi^{(k)}\{p\,[\varepsilon(p)-\rho(p)]\},\ v^{(k)}(x,\ y)=\Phi^{(k)}\{\varepsilon'(p)+\rho'(p)\}\tag{2.1}$$

$$\Phi^{(k)}\{f(p)\}=A_k\operatorname{Re}H_k[f(p),\ x]+B_k\operatorname{Im}H_k[f(p,\ x)],$$

$$H_k[f(p),\ x]=f(b_k)e^{b_k x}+H_{k2}[f(p),\ x]$$

Вторая, с особенностью при $x = -\infty$, строится аналогичным образом на основе решения (1.21) и имеет вид ($k = -1, -2, \ldots$)

$$u^{(k)}(x, y) = \Phi^{(k)}\{p[\varepsilon(p) - \rho(p)]\}, \qquad v^{(k)}(x, y) = \Phi^{(k)}\{\varepsilon'(p) + \rho'(p)\}$$

$$\Phi^{(k)}\{f(p)\} = A_k \operatorname{Re} H_k[f(p), x] + B_k \operatorname{Im} H_k[f(p), x] \tag{2.2}$$

$$H_k[f(p), x] = f(a_k) e^{a_k x} - \frac{N_2(a_k)}{2\pi i \eta_0^-(a_k)} \int_L \frac{\sigma_0^+(p) f(p) e^{px} dp}{(p - a_k) N_1(p)}$$

Элементы обеих подсистем самоуравновешены. Решение, определяющее равномерное сжатие и жесткое смещение полосы под балкой, имеет вид

$$u^{(0)}(x, y) = A_0 E^{-1} x + B_0, \quad v^{(0)}(x, y) = -A_0 \nu (1 - \nu)^{-1} E^{-1} y \tag{2.3}$$

Система (2.1) — (2.3) может быть использована для решения задач о давлении на упругую полосу или прямоугольник нескольких произвольно нагруженных конечных балок, а также для решения различных периодических задач с несколькими балками в периоде. Определение коэффициентов A_k и B_k всегда сводится к решению нормальных систем алгебраических уравнений, имеющих экспоненциально убывающие по номерам строк и столбцов элементы бесконечных матриц.

3. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. На упругой полосе, опирающейся на плоское недеформируемое основание, периодически лежат одинаковые балки длиной 2λ и высотой h. Расстояние между смежными концами соседних балок равно 2μ, трение на границах полосы отсутствует, к каждой балке симметрично, на расстояниях c от концов, приложены две сосредоточенные силы ($-Q_1$).

Свяжем точку $x = 0$, $y = 1$ с левым концом какой-либо балки и сохраним прежние обозначения для упругих постоянных. Тогда в силу периодичности и симметрии возникает следующая задача для упругого прямоугольника:

$$v = \tau_{xy} = 0 \ (y = 0, \ -\mu \leqslant x \leqslant \lambda), \ \tau_{xy} = 0 \ (y = 1, \ -\mu \leqslant x \leqslant \lambda) \tag{3.1}$$

$$\sigma_y = 0 \ (y = 1, \ -\mu \leqslant x < 0), \ \eta(x) = -Q_1 \delta(x - c) \ (y = 1, \ 0 \leqslant x \leqslant \lambda) \tag{3.2}$$

$$u = \tau_{xy} = 0 \ (x = \lambda, \ x = -\mu, \ 0 \leqslant y \leqslant 1) \tag{3.3}$$

$$\partial v / \partial x = \partial^3 v / \partial x^3 = 0 \ (y = 1, \ x = \lambda) \tag{3.4}$$

Решение ее будем искать в виде

$$u = u^{(\delta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^{(k)}, \qquad v = v^{(\delta)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^{(k)} \tag{3.5}$$

где $u^{(\delta)}$ и $v^{(\delta)}$ — выражающееся формулами (1.27) решение задачи (1.1), (1.2) при граничных условиях

$$P = M = 0, \ r(x) = 0$$

$$q(x) = -Q_1 \delta(x - c) - Q_2 \delta(x + c - 2\lambda)$$

Заметим, что приложение к балке вне рассматриваемого прямоугольника дополнительного произвольного усилия Q_2 дает возможность эффективно удовлетворить второму граничному условию (3.4). Первое условие автоматически следует из (3.3).

Разлагая функцию $u^{(\delta)}$ на торцах прямоугольника в ряды по вычетам в нулях функции $N_2(p)$ при $x = \lambda$ и в нулях функции $N_1(p)$ при $x = -\mu$, получим в силу (1.27)

$$u^{(\delta)}(\lambda, y) = \sum_{m=1}^{2} Q_m \sum_{k=-1}^{-\infty} [t_{m1}(b_k)\chi(b_k) + t_{m1}(\bar{b}_k)\chi(\bar{b}_k)] + t_0$$

$$u^{(\delta)}(-\mu, y) = \sum_{m=1}^{2} Q_m \sum_{k=1}^{\infty} [t_{m2}(a_k)\chi(a_k) + t_{m2}(\bar{a}_k)\chi(\bar{a}_k)] \tag{3.6}$$

$$t_{m1}(p) = \frac{4(1+\nu)e^{p\lambda}}{EN_2^*(p)}\left\{\frac{t_m(p)}{p^3} - \eta_0^-(p)\sum_{s=1}^{\infty}[t_m(b_s, p) + t_m(\bar{b}_s, p)]\right\}$$

$$t_{m2}(p) = \frac{4(1+\nu)\sigma_0^+(p)}{EN_1^*(p)e^{p\mu}}\sum_{s=1}^{\infty}[t_m(b_s, p) + t_m(\bar{b}_s, p)]$$

$$r_1(\tau) = e^{-\tau c}, \qquad r_2(\tau) = e^{-\tau(2\lambda - c)}, \qquad \chi(p) = {}^1/_2\, p[\varepsilon(p) - \rho(p)]$$

$$t_1(p) = -t_2(p) = e^{-pc}, \qquad t_0 = \nu(1+\nu)E^{-1}\sum_{m=1}^{2} Q_m t_m(0)$$

Отсюда и из условий (3.3) следует, что $A_0 = -t_0 E(\lambda + \mu)^{-1}$, $B_0 = -t_0\mu(\lambda + \mu)^{-1}$. Записывая перемещения $u^{(k)}$ из (2.1), (2.2) также в виде рядов по вычетам, получим

при $k = 1, 2, \ldots$

$$u^{(k)}(\lambda, y) = (A_k - iB_k)\left\{e^{b_k\lambda}\chi(b_k) + \sum_{n=-1}^{-\infty}[T_1(b_k, b_n)e^{b_n\lambda}\chi(b_n) + \right.$$
$$\left. + T_1(b_k, \bar{b}_n)e^{\bar{b}_n\lambda}\chi(\bar{b}_n)]\right\} + (A_k + iB_k)\left\{e^{\bar{b}_k\lambda}\chi(\bar{b}_k) + \sum_{n=-1}^{-\infty}[T_1(\bar{b}_k, b_n)e^{b_n\lambda}\chi(b_n) + \right.$$
$$\left. + T_1(\bar{b}_k, \bar{b}_n)e^{\bar{b}_n\lambda}\chi(\bar{b}_n)]\right\} \tag{3.7}$$

$$u^{(k)}(-\mu, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\{(A_k - iB_k)[T_2(b_k, a_n)e^{-a_n\mu}\chi(a_n) + T_2(b_k, \bar{a}_n)e^{-\bar{a}_n\mu}\chi(\bar{a}_n)] +$$
$$+ (A_k + iB_k)[T_2(\bar{b}_k, a_n)e^{-a_n\mu}\chi(a_n) + T_2(\bar{b}_k, \bar{a}_n)e^{-a_n\mu}\chi(\bar{a}_n)]\}$$

$$T_1(\tau, p) = \frac{N_1(\tau)\eta_0^-(p)}{(p-\tau)\sigma_0^+(\tau)N_2^*(p)}, \qquad T_2(\tau, p) = -\frac{N_1(\tau)\sigma_0^+(p)}{(p-\tau)\sigma_0^+(\tau)N_1^*(p)}$$

при $k = -1, -2, \ldots$

$$u^{(k)}(\lambda, y) = \sum_{n=-1}^{-\infty}\{(A_k - iB_k)[T_3(a_k, b_n)e^{b_n\lambda}\chi(b_n) + T_3(a_k\bar{b}_n)e^{\bar{b}_n\lambda}\chi(\bar{b}_n)] +$$
$$+ (A_k + iB_k)[T_3(\bar{a}_k, b_n)e^{b_n\lambda}\chi(b_n) + T_3(\bar{a}_k, \bar{b}_n)e^{\bar{b}_n\lambda}\chi(\bar{b}_n)]\} \tag{3.8}$$

$$u^{(k)}(-\mu, y) = (A_k - iB_k)\left\{e^{-a_k\mu}\chi(a_k) + \sum_{n=1}^{\infty}[T_4(a_k, a_n)e^{-a_n\mu}\chi(a_n) + \right.$$
$$\left. + T_4(a_k, \bar{a}_n)e^{-a_n\mu}\chi(\bar{a}_n)]\right\} + (A_k + iB_k)\left\{e^{-\bar{a}_k\mu}\chi(\bar{a}_k) + \sum_{n=1}^{\infty}[T_4(\bar{a}_k, a_n)e^{-a_n\mu}\chi(a_n) + \right.$$
$$\left. + T_4(\bar{a}_k, \bar{a}_n)e^{-\bar{a}_n\mu}\chi(\bar{a}_n)]\right\}$$

$$T_3(\tau, p) = -\frac{N_2(p)\eta_0^-(p)}{(p-\tau)\eta_0^-(\tau)N_2^*(p)}, \qquad T_4(\tau, p) = \frac{N_2(\tau)\sigma_0^+(p)}{(p-\tau)\eta_0^-(\tau)N_1^* p)}$$

Подставим ряды (3.6) — (3.8) в выражение (3.5) для перемещения u и удовлетворим условиям (3.3), наложенным на u (этого достаточно, чтобы удовлетворить одновременно и условиям для τ_{xy}). В образовавшихся двойных суммах поменяем порядки суммирования и, замечая, что $\chi(-p) = \chi(p)$, приравняем множители при функциях $\chi(a_k)$, $\chi(\bar{a}_k)$, $\chi(b_k)$, $\chi(\bar{b}_k)$. Вводя новые неизвестные

$$X_k - iY_k = (A_k - iB_k)\exp\left[b_k\left({}^3/_2\,\lambda - {}^1/_2\, c\right)\right] \quad \text{при} \quad k \geqslant 1$$

$$X_k - iY_k = (A_k - iB_k)\exp(-a_k\mu) \quad \text{при} \quad k \leqslant -1$$

и отделяя вещественные и мнимые части, получим следующую бесконечную систему алгебраических уравнений:

$$Q_2 \operatorname{Re}\psi_2(d_k) + X_k + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{X_n \operatorname{Re}[\varphi_n(d_k) + \varphi_n(\bar{d}_k)] + Y_n \operatorname{Im}[\varphi_n(d_k) + \varphi_n(\bar{d}_k)]\} = -Q_1 \operatorname{Re}\psi_1(d_k) \tag{3.9}$$

$$-Q_2 \operatorname{Im}\psi_2(d_k) + Y_k + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\{Y_n \operatorname{Re}[\varphi_n(d_k) - \varphi_n(\bar{d}_k)] - X_n \operatorname{Im}[\varphi_n(d_k) - \varphi_n(\bar{d}_k)]\} = Q_1 \operatorname{Im}\psi_1(d_k)$$

Здесь под знаками сумм $n \neq 0$; $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; при $k \geqslant 1$ $d_k = b_k$, при $k \leqslant -1$ $d_k = a$; $\psi_m(a_k) = t_{m2}(-a_k)$

$$\psi_m(b_k) = t_{m1}(-b_k)\exp\left[{}^1/_2\, b_k(\lambda - c)\right] \tag{3.10}$$

$$\varphi_n(a_k) = T_2(b_n, -a_k)\exp\left(\mu a_k - {}^3/_2\,\lambda b_n + {}^1/_2\, c b_n\right) \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\varphi_n(b_k) = T_1(b_n, -b_k)\exp\left[-\lambda\left({}^3/_2\, b_n + {}^1/_2\, b_k\right) + {}^1/_2\, c(b_n - b_k)\right] \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\varphi_n(a_k) = T_4(a_n, -a_k)\exp(\mu a_k + \mu a_n) \qquad (n \leqslant -1)$$

$$\varphi_n(b_k) = T_3(a_n, -b_k)\exp\left(\mu a_n - {}^1/_2\,\lambda b_k - {}^1/_2\, c b_k\right) \qquad (n \leqslant -1)$$

Удовлетворив второму условию (3.4), получим уравнение

$$-Q_2 H\left[2(1-\nu)p^4\sin^2 p,\ 2\lambda - c,\ \lambda\right] + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty}(X_n \operatorname{Re}\gamma_n + Y_n \operatorname{Im}\gamma_n) = Q_1 H\left[2(1-\nu)p^4\sin^2 p,\ c,\ \lambda\right] \tag{3.11}$$

в котором

$$\gamma_n = -H_n\left[2(1-\nu)p^4\sin^2 p, \lambda\right]\exp\left[-b_n\left({}^3/_2\lambda - {}^1/_2 c\right)\right] \quad \text{при} \quad n \geqslant 1$$

$$\gamma_n = -H_n\left[2(1-\nu)p^4\sin^2 p, \lambda\right]\exp(a_n\mu) \quad \text{при} \quad n \leqslant -1 \tag{3.12}$$

Из формул (3.10), (3.12) видно, что внедиагональные элементы системы (3.9), (3.11) убывают экспоненциально как по номерам строк, так и по номерам столбцов. Таким образом, эта система относится к типу нормальных систем Пуанкаре — Коха [6]. Оценивая ее решение (см. п. 2 работы [5]), для больших значений k получим A_k, $B_k \sim O\left(|k|^{5/2} e^{-2\pi|k|\mu}\right)$ при $k < 0$; A_k, $B_k \sim O\left[k^{-5} e^{-k\pi(2\lambda - c)}\right]$ при $k > 0$.

Заметим, что попутно здесь решены еще две задачи. Если в выражениях (3.5) положить $A_k = B_k = 0$ при $k \leqslant -1$ и из четырех блоков системы (3.9) оставить только блок с элементами, имеющими индексы $k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, то получим решение задачи о давлении на упругую полосу одной балки длиной 2λ. Если в (3.5) положить $Q_2 = 0$ и $A_k = B_k = 0$ при $k \geqslant 1$, отбросить уравнение (3.11) и лишние три блока системы (3.9), то выражения (3.5) будут решением задачи о давлении на полосу двух полубесконечных балок, расстояние между торцами которых равно 2μ.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. Я. Попову и А. А. Храпкову за внимание к работе.

Поступила 29 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
2. Попов Г. Я. Об одной плоской контактной задаче теории упругости. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, № 3.
3. Нобл Б. Применение метода Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд. иностр. лит., 1962.
4. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3, М., «Наука», 1968.
5. Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
6. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, 1922.

УДК 624.07 : 534.1+539.374

К ВОПРОСУ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ КРЕСТОВИДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Ю. А. Черняков, Н. Ю. Швайко

(Днепропетровск)

Решается задача о разветвлении форм упруго-пластического равновесия центрально сжатого стержня крестовидного поперечного сечения. При этом используются дифференциально-нелинейные соотношения связи между вариациями напряжений и деформаций при потере устойчивости, полученные в рамках модели линейной анизотропно упрочняющейся плоской среды [1] и постулата изотропии А. А. Ильюшина [2]. Решение сопоставляется с известными результатами [3], вытекающими из теории деформаций и пластического течения. Показана неприменимость указанных теорий к решению рассматриваемой задачи как в постановке Кармана, так и в постановке Шенли.

Известно, что потеря устойчивости тонкостенных элементов сопровождается, как правило, изломом траектории нагружения с произвольной величиной угла излома, т. е. процесс резко отличается от простого нагружения. В окрестности точки излома траектории связь между приращениями напряжений и деформаций существенным образом зависит от угла излома и, следовательно, должна выражаться (в отличие от деформационной теории и теории течения) дифференциально-нелинейными соотношениями. Насколько известно авторам, попытки использования таких соотношений, полученных в определенных вариантах теории пластичности (см. [4, 5] и др.) к решению задач устойчивости встретили на своем пути значительные математические трудности и не привели к положительному результату.

Ниже такая попытка осуществлена при решении в постановке Кармана и Шенли задачи определения точки бифуркации форм равновесия центрально сжатого стержня крестовидного поперечного сечения.

1. О соотношениях между приращениями напряжений и деформаций в задачах устойчивости. Для модели линейной анизотропно упрочняющейся плоской среды [1] связь между приращениями напряжений $\delta\sigma$ и деформаций $\delta\varepsilon$ в малой окрестности угловой точки траектории нагружения установлена в работах [6, 7]. Обобщение на пространственный случай достигнуто на основании постулата изотропии. Указаны три области догрузки $\delta\sigma$, в которых связь между приращениями $\delta\sigma$ и $\delta\varepsilon$ различна (см. фиг. 1, соответствующую рассматриваемому ниже случаю изгибно-крутильной формы потери устой-