УДК 539.376

ОБ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

М. И. Розовский

(Днепропетровск)

Рассматривается задача об ударе абсолютно жесткого штампа с плоским торцом по большой вязкоупругой пластине. Исследуется случай, когда между ударяющим штампом и пластиной находится пружина с линейной характеристикой. Работа представляет собой обобщение более ранних результатов [1].

1. Если учесть, что прогиб $w(t)$ идеально упругой пластины [1] связан с действующей на нее силой $P(t)$ импульсным соотношением

$$w(t) = \beta_0 \int_0^t P(t)\,dt, \qquad \beta_0^2 = \frac{3(1-\nu_0^2)}{16E_0\gamma h^4} \tag{1.1}$$

то для получения соответствующей зависимости при наличии упругого последействия достаточно в формуле (1.1) постоянную β_0 заменить оператором

$$\beta_t = \beta_0(1 + H^*) \tag{1.2}$$

Здесь H^* — положительный интегральный оператор с ядром запаздывания $H(t-\tau) > 0$, причем

$$H^*\zeta = \int_0^t H(t-\tau)\,\zeta(\tau)\,d\tau \tag{1.3}$$

Здесь ν_0 — коэффициент Пуассона, E_0 — модуль упругости, h — толщина, γ — плотность материала пластины, $\zeta(t)$ — некоторая функция времени.

Таким образом, в рассматриваемой задаче исходным соотношением при выводе уравнения, определяющего искомую силу $P(t)$, будет

$$w(t) = \beta_0 y(t) + \beta_0 \int_0^t H(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau, \quad y(t) = \int_0^t P(\xi)\,d\xi \tag{1.4}$$

Полное перемещение штампа равно $s + w$, где s — сжатие пружины, поэтому из уравнения количества движения для штампа

$$mv(t) = mv_0 - y(t)$$

где $v(t)$ — скорость штампа с массой m, v_0 — начальная скорость штампа, при учете соотношения $P = ks$, где k — жесткость пружины, следует

$$\frac{1}{k}\frac{d^2P}{dt^2} + \frac{d^2w}{dt^2} + \frac{P(t)}{m} = 0 \tag{1.5}$$

Начальные условия имеют вид

$$P(0) = 0, \qquad \left(\frac{dP}{dt}\right)_{t=0} = kv_0 \tag{1.6}$$

Дифференцируя последовательно дважды по t уравнение (1.4), получим

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \beta_0 \frac{dP}{dt} + \beta_0 \int_0^t H(t-\tau)\,\frac{dP}{d\tau}\,d\tau \tag{1.7}$$

Справедливость (1.7) вытекает из следующих соотношений при учете условий $y(0) = 0$, $P(0) = 0$:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t H(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t H(\xi)\,y(t-\xi)\,d\xi = \int_0^t H(\xi)\frac{d}{dt}\,y(t-\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^t H(t-\tau)\frac{dy}{d\tau}\,d\tau = \int_0^t H(t-\tau)\,P(\tau)\,d\tau$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^t H(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau = \frac{d}{dt}\int_0^t H(t-\tau)\,P(\tau)\,d\tau = \int_0^t H(t-\tau)\frac{dP}{d\tau}\,d\tau$$

Подставляя в соотношение (1.5) вместо $d^2w\,/\,dt^2$ его выражение из (1.7), получим интегро-дифференциальное уравнение, определяющее искомую силу. Учитывая формулы (1.2) и (1.3), представим это уравнение в операторной форме

$$\frac{d^2P}{dt^2} + k\beta_t\frac{dP}{dt} + \frac{k}{m}P = 0 \qquad (1.8)$$

2. Согласно интегральному операторному методу [2], искомую силу $P(t)$, определяемую уравнением (1.8), представим в виде

$$P(t) = v_0kt + \Phi\,\{A_t^{\,i}B_t^{\,2n}\} \qquad (2.1)$$

$$\Phi\,\{\cdot\} \equiv v_0k\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+i}\{\cdot\}\,t^{2n+i+1}}{(2n+1)!\,i!}$$

Здесь операторы $A_t = A_0(1 + H^*)$, $B_t^2 = l - A_t^2$; параметры $A_0 = \beta_0 k\,/\,2$, $l = k/m$. Выражая оператор $A_t^{\,i}B_t^{\,2n}$ через интегральный оператор H^*, из (2.1) получим

$$P(t) = P_0(t) + \Phi\,\{R^*\} \qquad (2.2)$$

Здесь

$$P_0(t) = v_0kt + \Phi\,\{A_0^{\,i}B_0^{\,2n}\},\quad B_0^2 = l - A_0^2,\quad \mu_0 = mk\beta_0^2\,/\,4$$

$$R^* = A_0^{\,i}\,l^n\sum_{j=1}^{i}\binom{i}{j}H^{*j} + A_0^{\,i}\,l^n\sum_{j=1}^{n}(-\mu_0)^j\sum_{q=1}^{2j+i}\binom{2j+i}{q}H^{*q}$$

$$H^{*r}\zeta = \int_0^t H_r(t-\tau)\,\zeta(\tau)\,d\tau \qquad (r = j,\ q) \qquad (2.3)$$

где $H_r(t-\tau)$ — повторные ядра исходного ядра запаздывания $H(t-\tau)$.

Ряд, определяющий функцию $P(t)$, сходится равномерно на всяком конечном отрезке изменения t, если ядро $H(t-\tau)$ регулярно или слабо сингулярно.

Можно проверить, что функция $P(t)$, определяемая формулой (2.1), удовлетворяет уравнению (1.8) и начальным условиям (1.6), поскольку

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}A_t^{\,i}B_t^{\,2n}t^{2n+i+1} = A_t^{\,i}B_t^{\,2n}\frac{d^\nu}{dt^\nu}\,t^{2n+i+1} \qquad (\nu = 1,\ 2,\ i \geqslant 1) \qquad (2.4)$$

Свойство переместительности (2.4) следует из выражения R^*, поскольку, как было установлено в п. 1, оператор H^* обладает свойством переместительности с дифференциальными операторами $d^\nu\,/\,dt^\nu$ при воздействии на функцию, которая вместе со своей первой производной обращается в нуль при $t = 0$.

Пусть оператор H^* выражается через резольвентный оператор $Q^*(-\eta)$ по формуле $H^* = \chi Q^*(-\eta)$, где $\chi > 0$ и $\eta > 0$ — реологические константы. В этом случае нахождение повторных ядер $H_r(t-\tau)$ заменяется более простой операцией [2], так как степень оператора

$$H^{*r} = \chi^r \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1} Q^*(-\eta)}{\partial \eta^{r-1}} \qquad (r = 2, 3, \ldots) \tag{2.5}$$

при воздействии на t^{2n+i+1} приводит к выражению

$$H^{*r} t^{2n+i+1} = \chi^r \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1}}{\partial \eta^{r-1}} \int_0^t Q(-\eta;\ t-\tau)\, \tau^{2n+i+1}\, d\tau$$

Заметим, что по физическому смыслу отношение χ / η безразмерно и может принимать любые положительные значения.

Из разложения (2.3) для $P_0(t)$ следует, что

$$P_0(t) = \begin{cases} \dfrac{v_0 k}{B_0} e^{-A_0 t} \sin B_0 t, & mk\beta_0^2 < 4,\ B_0^2 > 0 \\ v_0 k t\, e^{-A_0 t}, & mk\beta_0^2 = 4,\ B_0^2 = 0 \\ \dfrac{v_0 k}{q_0} e^{-A_0 t} \operatorname{sh} q_0 t, & mk\beta_0^2 > 4,\ B_0^2 < 0,\ q_0^2 = A_0^2 - l > 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

При $\chi = 0$ имеем $P(t) = P_0(t)$. Таким образом, функция $\Phi\{R^*\}$ учитывает влияние наследственного фактора на силу $P(t)$, тогда как функция $P_0(t)$ соответствует лишь идеально упругим свойствам пластины.

Из представления оператора $B_t^2 = B_0^2 - A_0^2(2H^* + H^{*2})$ видно, что неравенство $B_t^2 < 0$ — следствие условия $B_0^2 \leqslant 0$. Таким образом, условие $B_0^2 \leqslant 0$ является достаточным для реализации апериодичности изменения силы $P(t)$.

Положительность оператора B_t^2 — необходимое и достаточное условие того, что изменение силы $P(t)$ будет иметь периодический характер, тогда как неравенство $B_0^2 > 0$ — лишь необходимое условие для реализации периодичности, поскольку условие $B_t^2 > 0$ влечет за собою условие $B_0^2 > 0$.

Наконец, если $B_0^2 = 0$ и $B_t^2 = 0$ одновременно, то $l - A_0^2 = 0$ и $l - A_t^2 = 0$, следовательно, $A_t^2 = A_0^2$. Последнее возможно лишь при $H^* \equiv 0$. В исходной модели заложено влияние последействия, поэтому указанный случай должен быть исключен из рассмотрения, хотя он и не противоречит выводу, что только условие $B_t^2 > 0$ гарантирует периодический характер изменения силы $P(t)$ с непременным появлением составляющей вида (2.6) при $mk\beta_0^2 < 4, B_0^2 > 0$.

3. Более детальный анализ решения рассматриваемой задачи с последействием возможен лишь при конкретизации оператора $Q^*(-\eta)$ и соответствующей аппроксимации.

Оператор $\Im_\alpha^*(-\eta)$ Ю. Н. Работнова [3] принадлежит к классу резольвентных операторов. Следовательно, принимая во внимание аппроксимацию

$$\Im_\alpha^*(-\eta)\, t^\delta \approx \frac{q t^\delta}{1 + q\eta} \tag{3.1}$$

отвечающую результатам, полученным в работе [4], и представление (2.5), получим

$$H^{*r} t^\delta \approx \left(\frac{\chi}{\eta}\right)^r L^r t^\delta \tag{3.2}$$

$$q = \frac{t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)}, \qquad L = \frac{q\eta}{1+q\eta}, \qquad \delta = 2n + i + 1$$

$$0 < q\eta < 1, \qquad -1 < \alpha \leqslant 0, \qquad 0 < L \leqslant 1/2$$

Выражение (3.2) позволяет выразить степень оператора H^* через обычную степень. Поэтому ряд (2.1) можно просуммировать и таким образом получить явное выражение функции $P(t)$ в замкнутом виде.

В случае, представляющем интерес при изучении механизма печатания, когда оператор $B_t^2 > 0$, имеем

$$P(t) \approx \frac{v_0 k}{B_1} e^{-A_1 t} \sin B_1 t \tag{3.3}$$

$$A_1(t) = A_0\left(1 + \frac{\chi}{\eta} L\right), \qquad B_1^2(t) = \frac{k}{m} - A_1^2(t)$$

Здесь $A_1 > A_0$, тогда как $B_1^2 < B_0^2$ и, кроме того

$$\frac{k}{m}\left[1 - \mu\left(1 + \frac{\chi}{2\eta}\right)^2\right] < B_1^2 < \frac{k}{m}(1 - \mu) \tag{3.4}$$

поскольку $0 < L \leqslant 1/2$, $\mu = mk\beta_7^2 / 4 < 1$.

Длительность удара определяется из уравнения

$$tB_1(t) = \pi, \quad \text{если } mA_1^2(t) < k \tag{3.5}$$

Отскок штампа от вязкоупругой пластины происходит в момент $t = t_*$, где t_* — корень уравнения (3.5), причем $t_* > t_1$, где $t_1 = \pi / B_0$ — момент отскока штампа от идеально упругой пластины. Таким образом, длительность удара при последействии больше, чем в случае его отсутствия.

Из неравенств (3.4) следует, что первое условие (2.6), обеспечивающее отскок штампа от идеально упругой пластины, не может гарантировать отскок штампа от вязкоупругой пластины.

Заметим, что реологические свойства пластины здесь играют решающую роль, поскольку изменение отношения χ/η, фигурирующего в формулах (3.3), может быть весьма велико (при соблюдении, разумеется, условия $B_1^2 > 0$), тогда как дробный безразмерный множитель L ограничен неравенствами $0 < L < 1/2$. Формально $0 < \chi/\eta < \infty$, поэтому не исключен неблагоприятный случай, когда практически нельзя довести величину отношения k/m до значения, обеспечивающего отскок штампа, т. е. добиться условия $B_1^2 > 0$, если нельзя соответствующим образом уменьшить значение L.

Коэффициент восстановления $k^{-1}(dP / dt)_{t=t_*}$ при последействии меньше, чем при отсутствии такового.

Наконец, влияние последействия приводит к увеличению перемещения пластины, причем относительный прирост его максимального значения определяется величиной отношения $\chi/2\eta$.

Если в силу каких-либо причин требуется, чтобы штамп не отскакивал от вязкоупругой пластины при наличии пружины между ними, то в этом случае следует исходить из решения, отвечающего условию $B_0^2 < 0$. Тогда сила $P(t)$ будет изменяться по апериодическому закону, причем, в соответствии с разработанной методикой, ее приближенное выражение может быть представлено в виде

$$P(t) \approx \frac{v_0 k}{q_1} e^{-A_1 t} \operatorname{sh} q_1 t, \qquad q_1(t) = A_1^2 - l > 0 \tag{3.6}$$

Кривая (3.6) имеет один максимум и горизонтальную асимптоту, совпадающую с осью t.

Влияние упругого последействия приводит к снижению $P_{\max}$ и ординаты точки перегиба, а также приводит к смещению их вправо по сравнению с идеально упругим случаем, когда интенсивность убывания $P(t)$ при $t \to \infty$ меньшая, чем при наличии упругого последействия.

Случай $B_0^2 = 0$ и $B_t^2 = 0$ также отвечает апериодическому изменению силы $P(t) > 0$, причем $\lim P(t) = 0$ при $t \to \infty$. Ее выражение $P(t) = P_0(t)$ определяется формулой (2.5). По отношению к явлению упругого последействия этот случай может быть истолкован как нейтральный, поскольку через него идет возврат от апериодичности к периодическому закону изменения силы $P(t)$, если произойдет нарушение условий, обеспечивающих существование неравенства $B_0^2 < 0$. Такую ситуацию можно исключить, если увеличить массу штампа m практически настолько, что вместо уравнения (1.8) можно использовать его следствие при $m \to \infty$, т. е.

$$\frac{d^2P}{dt^2} + k\beta_t \frac{dP}{dt} = 0 \tag{3.7}$$

Решение уравнения (3.7) с учетом начальных условий (1.6) имеет вид

$$\begin{gathered} P(t) = \frac{1}{\beta_0}(1 - e^{-\beta_0 kt}) - k\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\beta_0 k)^{n-1}}{n!} R_{n-1} \\ R_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{(-\chi)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1}}{\partial\eta^{i-1}} \int_0^t \mathcal{Э}_\alpha(-\eta;\ t-\tau)\tau^n\, d\tau \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $\mathcal{Э}_\alpha(-\eta;\ t-\tau)$ — ядро запаздывания Ю. Н. Работнова [4].

При $\chi = 0$ кривая (3.8) имеет горизонтальную асимптоту, отстоящую от оси t на расстояние $1/\beta_0$. При $\chi \neq 0$ эта асимптота снижается.

Полученный результат можно интерпретировать более детально, если воспользоваться аппроксимацией (3.1). Тогда

$$\begin{gathered} P(t) \approx \frac{1}{\beta_1}(1 - e^{-\beta_1 kt}) \\ \beta_1(t) = \beta_0\left(1 + \frac{\chi t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha) + \eta t^{1+\alpha}}\right) \end{gathered} \tag{3.9}$$

Из представления (3.9) следует, что расположение горизонтальной асимптоты кривой (3.8) определяется величиной $(\eta/\beta_0)(\chi+\eta)^{-1}$, причем степень снижения асимптоты по сравнению с идеально упругим случаем зависит от величины отношения χ/η. Так, при $\chi = \eta$ влияние упругого последействия снижает асимптоту вдвое по сравнению со случаем упругой пластины.

Поступила 17 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Conway H. D., Lee H. C., Impact of an Indenter on a Large Plate. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1970, vol. 37, No. 1.
2. Розовский М. И. Интегрально-операторный метод в наследственной теории ползучести. Докл. АН СССР. 1965, т. 160, № 4.
3. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последействием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
4. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 2.