

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ПО УГЛАМ В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Т. Б. Малявина

(Москва)

Предлагается метод решения нестационарной газодинамической задачи с учетом лучистого теплообмена, при котором не требуется использования углового распределения на каждом шаге по времени. Выписывается система осредненных по углам уравнений переноса излучения для случая цилиндрической симметрии, эквивалентная исходной системе уравнений переноса, т. е. приводящая к тому же значению спектральной плотности потока излучения в момент осреднения.

Аналогичная проблема для одномерного случая рассмотрена в работах [1-4].

Решение нестационарных газодинамических задач с учетом лучистого теплообмена связано с большим объемом вычислительной работы в связи с тем, что уравнение переноса, описывающее поле излучения, формулируется для спектральной интенсивности излучения, распространяющегося в определенном направлении, характеризуемом двумя углами. Вместе с тем, в уравнения газодинамики входит лишь интегральная характеристика поля излучения — плотность потока излучения.

Ниже получены осредненные уравнения для случая, когда параметры вещества постоянны на цилиндрических поверхностях, имеющих общую ось симметрии.

Уравнение переноса излучения в случае цилиндрической симметрии в пренебрежении рассеянием и временем распространения излучения по нагреваемому и охлаждаемому объему имеет вид

$$\sin \theta \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial I}{\partial \varphi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial I}{\partial z} \cos \theta = -K(I - B) \quad (1)$$

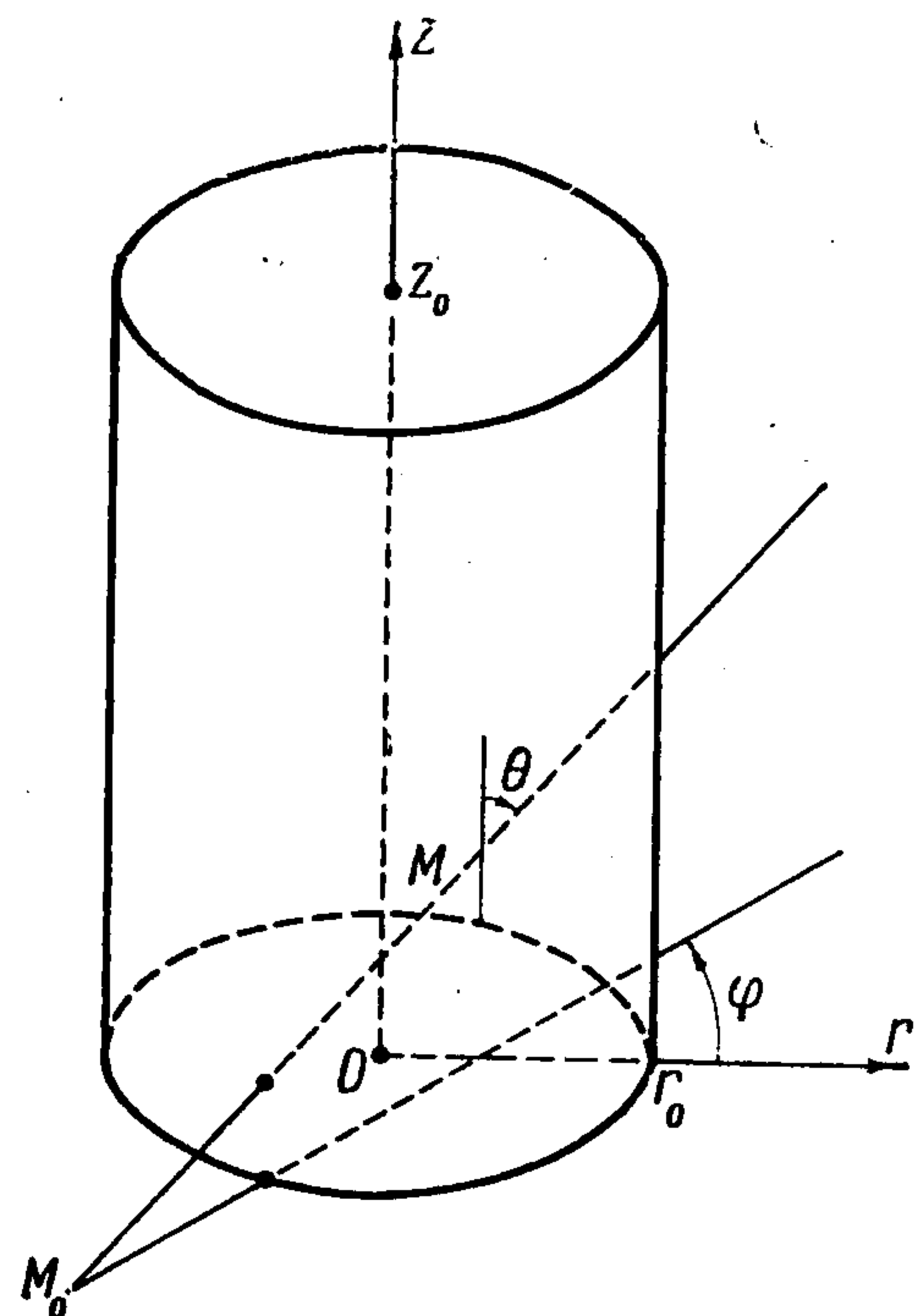
Здесь r, z, φ — цилиндрические координаты точки M (фиг. 1), θ — угол, который составляет луч M_0M с осью z , φ — угол между проекцией луча M_0M и проекцией радиус-вектора точки M на плоскость $z = 0$, M_0 — точка пересечения луча с плоскостью $z = 0$, I — увеличенная в π раз интенсивность излучения, отнесенная к единичному интервалу энергий квантов ϵ , K — линейный спектральный коэффициент поглощения, исправленный на вынужденное испускание, B — функция Планка.

Получим осредненные уравнения для спектральной плотности потока излучения \mathbf{q}

$$\mathbf{q} = \int_{\Omega} I d\Omega, \quad \mathbf{q} = \{q_r, q_z, 0\} \quad (2)$$

Здесь Ω — сфера единичного радиуса с центром в точке $M(r, z, \varphi)$, $I(r, z, \varphi, \theta)$ имеет направление (φ, θ) и $|I(r, z, \varphi, \theta)| = I(r, z, \varphi, \theta)$.

Для простоты выкладок рассмотрим задачу для прямого цилиндра. Тогда функция I определена в области $G = \{r \in (0, r_0), z \in (0, z_0), \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)\}$. Здесь r_0, z_0 — размеры цилиндра (фиг. 1).



Фиг. 1

Сначала рассмотрим q_r . Разобьем q_r на q_r^+ и q_r^-

$$q_r = q_r^+ + q_r^-, \quad q_r^\pm = \int_{\sigma^\pm} I \sin \theta \cos \varphi d\Omega$$

$$\sigma^+ = \{\theta \in (0, \pi), \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\}, \quad \sigma^- = \{\theta \in (0, \pi), \varphi \in (\pi/2, 3/2\pi)\}$$

Введем в G функцию $\psi_r^\pm = I / q_r^\pm$. Здесь q_r^\pm определена в области $D = \{r \in (0, r_0), z \in (0, z_0)\}$. Подставим $I = q_r^\pm \psi_r^\pm$ в (1) и проинтегрируем по полусферам σ^\pm . Получим два уравнения гиперболического типа

$$\partial q_r^\pm / \partial r + c_{12}^\pm \partial q_r^\pm / \partial z + c_1^\pm q_r^\pm = 2\pi B \quad (3)$$

Здесь

$$c_{12}^\pm = \int_{\sigma^\pm} \psi_r^\pm \cos \theta d\Omega, \quad c_1^\pm = \frac{\partial c_{12}^\pm}{\partial z} - \frac{1}{r} \int_{\sigma^\pm} \frac{\partial \psi_r^\pm}{\partial \varphi} \sin \theta \sin \varphi d\Omega + K \int_{\sigma^\pm} \psi_r^\pm d\Omega$$

Уравнения характеристик

$$dz^\pm / dr = c_{12}^\pm \quad (4)$$

Граничные условия

$$q_r^-(r_0, z) = 0, \quad q_r^+(0, z) = -q_r^-(0, z) \quad (5)$$

Видно, что разбиение q_r на q_r^+ и q_r^- позволяет получить систему двух независимых уравнений для q_r^\pm и выписать граничные условия для них.

Система (3) определена в D , а граничные условия (5) заданы на Γ (часть границы D : $r = r_0, r = 0$). Покажем, что систему (3) с граничными условиями (5) можно доопределить и разрешить в $D \cup \Gamma$. Для этого нужно доказать следующие утверждения.

1°. Существует и единственно решение уравнения (4) с начальными условиями

$$z(r) |_{r=r_0} = z_*, \quad z_* \in [\delta, z_0 - \delta] \quad (\delta > 0) \quad (6)$$

2°. Решения уравнения (4) с начальными условиями (6) заполняют всю область D .

3°. Существует и единственно решение уравнения

$$dq_r^\pm / dr = f^\pm(q_r^\pm, r), \quad f^\pm = -c_1^\pm(r, z^\pm(r)) q_r^\pm + 2\pi B \quad (7)$$

с начальными условиями

$$q_r^- |_{r=r_0} = 0, \quad q_r^+ |_{r=0} = -q_r^- |_{r=0} \quad (8)$$

Докажем утверждения 1° — 3° для случая равномерно нагретого цилиндра при отсутствии внешних источников излучения. В этом случае

$$I(s) = B(1 - e^{-Ks})$$

$$\lim_{r \rightarrow r_0} c_{12}^- = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} c_{12}^+ = -\lim_{r \rightarrow 0} c_{12}^- < \infty$$

$$|\partial c_{12}^- / \partial z| \leq \text{const} (r_0 - r)^{-1/2} \text{ в } d_0 \quad (9)$$

$$d_0 = \{z \in [\delta, z_0 - \delta], r \in [r_0 - \delta_0, r_0]\} \quad \delta > 0, \delta_0 > 0$$

где s — расстояние от M до M_0 (фиг. 1)

Из непрерывности $c_{12}^\pm, \partial c_{12}^\pm / \partial z$ в D и свойств (9) следует, что для (4) выполняются достаточные условия существования и единственности [5].

Справедливость утверждения 2° следует из некоторых простых топологических соображений и свойств c_{12}^\pm

$$\mp c_{12}^\pm \geq 0, \quad c_{12}^+(r, z_0/2 - z) = -c_{12}^+(r, z + z_0/2)$$

$$|\lim_{r \rightarrow 0} c_{12}^-| < \infty, \quad |c_{12}^+ |_{r=r_0}| < \infty, \quad z \in [0, z_0/2]$$

$$c_{12}^+ |_{r=0} = -c_{12}^- |_{r=0}, \quad \lim_{r \rightarrow r_0} c_{12}^- = 0$$

Справедливость утверждения 3° вытекает [5] из непрерывности c_1^\pm в D и следующих свойств c_1^\pm :

$$\begin{aligned} |c_1^-| &\leq \text{const} (r_0 - r)^{-1/2} \text{ в } d_0 \\ |\lim_{r \rightarrow 0} c_1^+| &< \infty, \quad \lim_{r \rightarrow r_0} (c_1^- q r^-) = 0 \end{aligned}$$

Повторяя для q_z все, что было сделано для q_r , получим уравнения для q_z^\pm

$$c_{21}^\pm \partial q_z^\pm / \partial r + \partial q_z^\pm / \partial z + c_2^\pm q_z^\pm = 2\pi B \quad (10)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_{21}^\pm &= \int_{\Delta^\pm} \psi_z^\pm \sin \theta \cos \varphi d\Omega \\ c_2^\pm &= \frac{\partial c_{21}^\pm}{\partial r} - \frac{1}{r} \int_{\Delta^\pm} \frac{\partial \psi_z^\pm}{\partial \varphi} \sin \theta \sin \varphi d\Omega + K \int_{\Delta^\pm} \psi_z^\pm d\Omega \\ q_z^\pm &= \int_{\Delta^\pm} I \cos d\Omega \end{aligned}$$

$$\Delta^+ = \{\theta \in (0, \pi/2), \varphi \in (0, 2\pi)\}, \quad \Delta^- = \{\theta \in (\pi/2, \pi), \varphi \in (0, 2\pi)\}$$

Характеристические направления задаются уравнениями

$$dr^\pm / dr = c_{12}^\pm \quad (11)$$

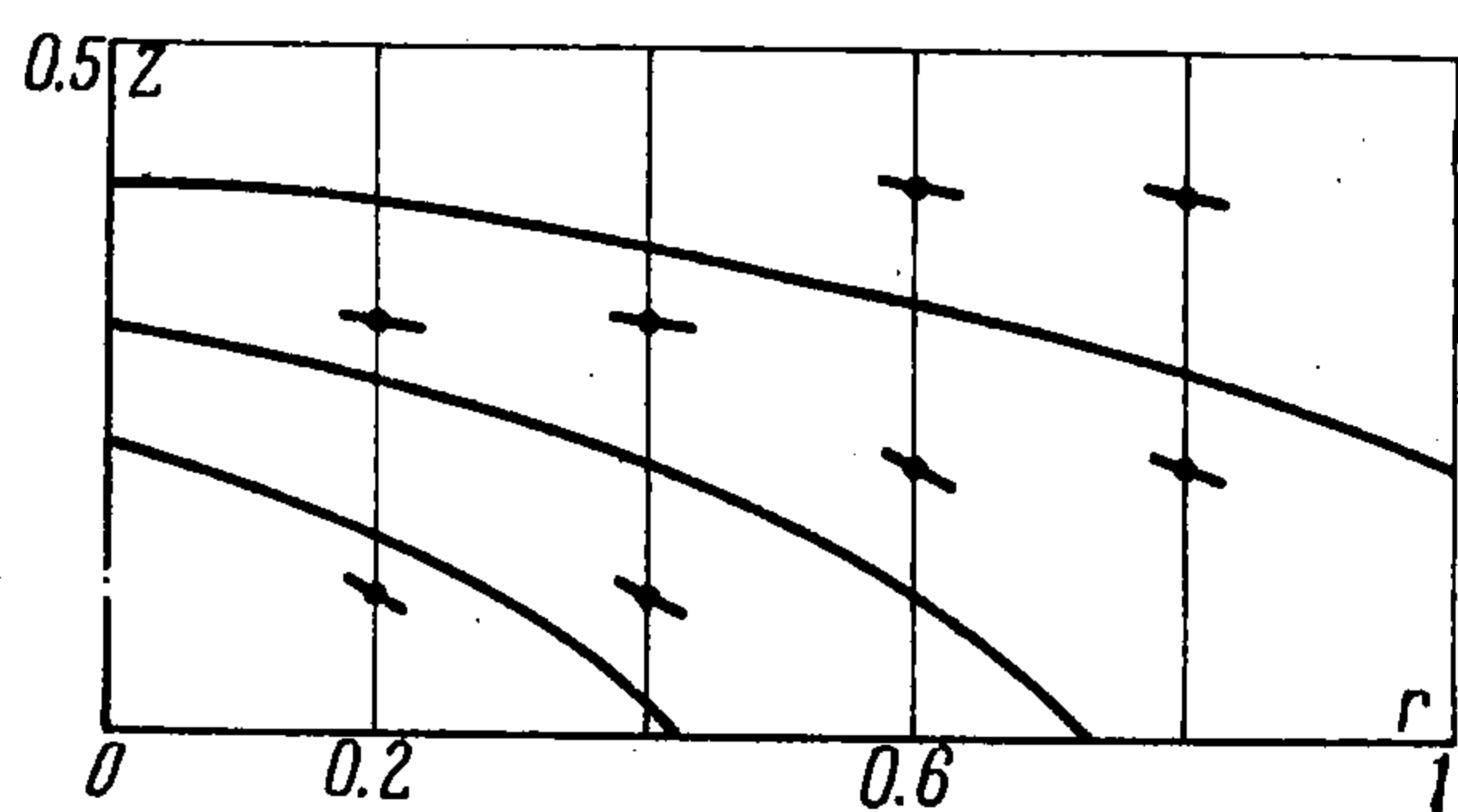
Граничные условия

$$q_z^+ |_{z=0} = q_z^- |_{z=z_0} = 0 \quad (12)$$

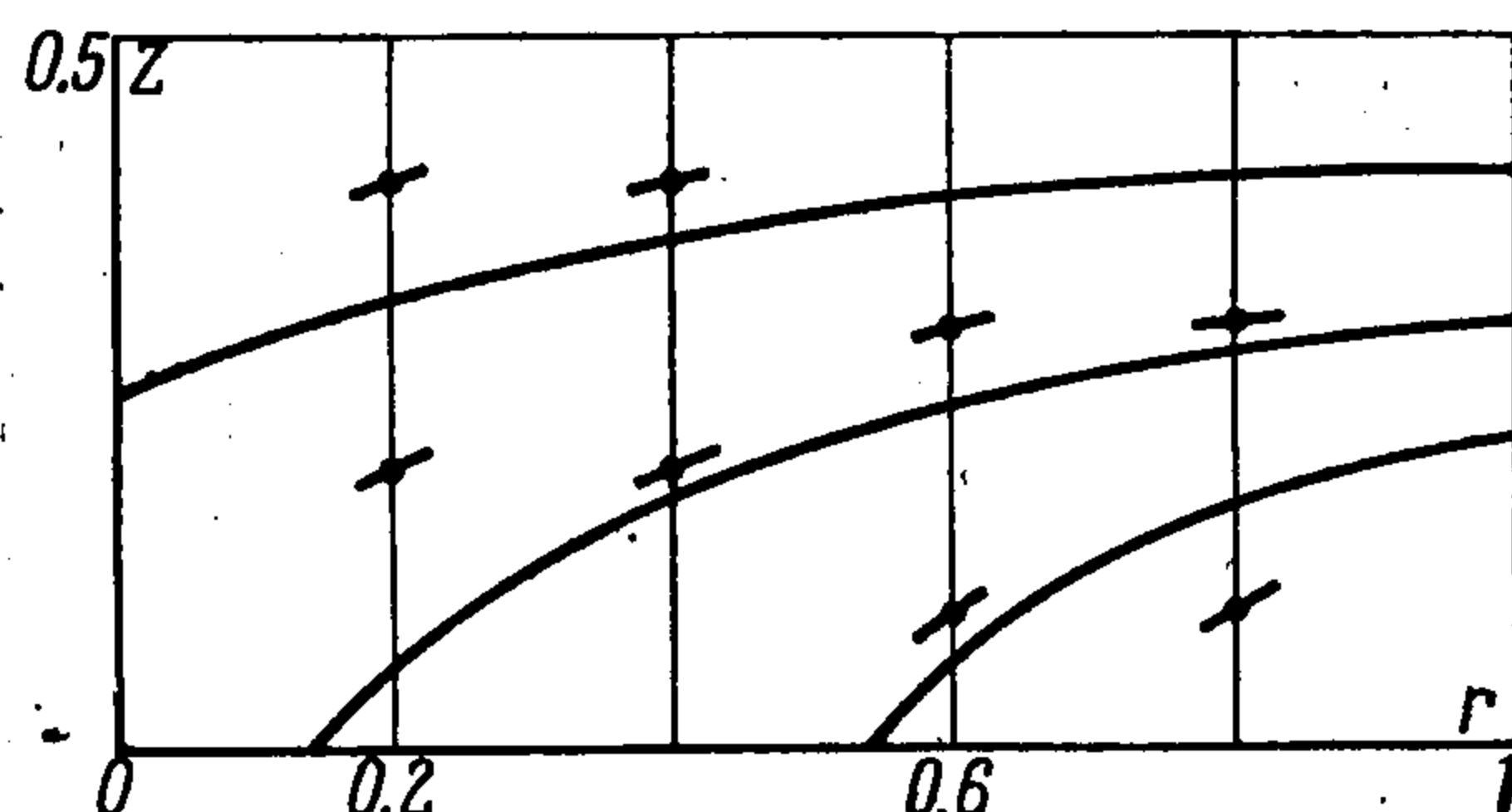
Система (10) с граничными условиями (12) так же, как и задача (3), (5), разрешима в D .

Получение коэффициентов $c_{i,j}$, c_i ($i, j = 1, 2$) назовем осреднением.

В случае непостоянных K , B и при отсутствии внешних источников излучения утверждения 1° — 3° справедливы при достаточно гладких K , B .



Фиг. 2



Фиг. 3

Итак, решив уравнение переноса (1) для всех точек (r, z) внутри цилиндра по всем направлениям, можно вычислить коэффициенты $c_{i,j}$, c_i в уравнениях (3), (10), по которым потом можно найти q_r^\pm , q_z^\pm независимо от уравнения переноса. В предположении, что $c_{i,j}$, c_i слабо меняются при изменении K , B (со временем или в разных вариантах стационарной задачи) в некоторых пределах, можно положить их неизменными в каждой точке и считать q_r^\pm , q_z^\pm по (3), (10) для изменившихся (в соответствующих пределах) K , B . Используя определяемые из осредненных уравнений переноса величины q_r^\pm и q_z^\pm в уравнении энергии, решаемом совместно с остальными уравнениями газодинамики, можно найти величины температуры и плотности в следующие моменты времени, а по ним — значения K и B . После чего можно, снова решив (1), вычислить $c_{i,j}$, c_i и пересчитать q_r^\pm , q_z^\pm по (3), (10) с некоторыми средними коэффициентами $c_{i,j}^*$, c_i^* ($c_{i,j}^*$, c_i^* — средние между коэффициентами $c_{i,j}$, c_i в двух последовательных моментах осреднения).

На фиг. 2—4 построены поля направлений для (4), (11) в случае равномерно нагретого цилиндра ($K = 1$, $r_0 = z_0 = 1$). На фиг. 2, 3 построено поле c_{12}^+ , c_{12}^- соответ-

венно, на фиг. 4 — c_{21}^+ . С учетом симметрии c_{12}^\pm относительно прямой $z = z_0 / 2$ на фиг. 2—3 изображены области, где $z \leq z_0 / 2$. Так как выполняется соотношение $c_{21}^\pm(r, z) = -c_{21}^\mp(r, z_0 - z)$, то представлены фигуры только для c_{21}^+ .

Учитывая вид коэффициентов c_{ij}

$$c_{ij} = \int_{\Omega_i} I g_{ij} d\Omega / \int_{\Omega_i} I f_{ij} d\Omega \quad (13)$$

где Ω_i — соответствующая полусфера, g_{ij}, f_{ij} — функции φ, θ , получим, что внутри цилиндра, за исключением точек, находящихся на расстоянии $\sim 1/r_0, 1/z_0$ (от торцов и стенок цилиндра соответственно)

$$c_{ij} \approx \int_{\Omega_i} g_{ij} d\Omega / \int_{\Omega_i} f_{ij} d\Omega$$

$$\text{при } Kr_0 \gg 1, \quad Kz_0 \gg 1 \quad (14)$$

$$c_{ij} \approx \int_{\Omega_i} s g_{ij} d\Omega / \int_{\Omega_i} s f_{ij} d\Omega$$

$$\text{при } Kr_0 \ll 1, \quad Kz_0 \ll 1 \quad (15)$$

Выражение (14) показывает, что в каждом из случаев поле направлений практически остается неизменным. Подставив конкретный вид функции g_{ij} и f_{ij} в (14), получим, что для оптически толстых объемов $c_{ij} \approx 0, i \neq j$ внутри цилиндра за исключением краев.

Проведенные расчеты для различных значений K показывают, что поле направлений «слабо» зависит от оптической толщины объема, что дает возможность надеяться провести осреднение и по частотам, т. е. получить, как в [4], осредненные уравнения для интегральной плотности потока излучения.

Приведенные поля направлений для определенного размера цилиндра можно использовать для цилиндров с другими размерами, если выполняются следующие условия:

$$B^*(r, z) = B(r\beta, z\beta), \quad K^*(r, z) = \beta K(r\beta, r\beta) \\ \beta = z_0 / z_* = r_0 / r_* \quad (16)$$

Здесь B^*, K^* определены в цилиндре радиуса r_* , высоты z_* , B, K — в цилиндре радиуса r_0 , высотой z_0 . Если выполнены условия (16), то можно показать, используя (1), (13), что выполняется соотношение

$$c_{ij}^*(r, z) = c_{ij}(r\beta, z\beta)$$

Автор благодарит И. В. Немчинова за предоставление темы исследования и обсуждения результатов.

Поступила 2 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д и н В. Я. Квазициффузионный метод решения кинетического уравнения. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 6.
2. Г о л ь д и н В. Я., Д а н и л о в а Г. В., Ч е т в е р у ш к и н Б. Н. Приближенный метод расчета нестационарного кинетического уравнения. В сб.: Вычислительные методы в теории переноса. М., Атомиздат, 1969, стр. 50—53.
3. Г е р м о г е н о в а Т. А., С у ш к е в и ч Т. А. Решение уравнения переноса методом средних погоков. В сб.: Вопросы физики защиты реакторов, вып. 3. М., Атомиздат, 1969, стр. 34—45.
4. Н е м ч и н о в И. В. Об осредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
5. П е т р о в с к и й И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд. 5. М., «Наука», 1964.