Действительно, в области $V_1 > 0$ производная функции (2.10) в силу уравнений возмущенного движения (2.4) представляет собой форму [3]

$$V_1^{\cdot} = x_1^{\cdot} y_2 + x_1 y_2^{\cdot} - x_2^{\cdot} y_1 - x_2 y_1^{\cdot} = x_1^2 - \nu r_0 x_1 y_1 + [a(t) - \mu(1-\nu)]\, y_1^2 + x_2^2 - \\ - \nu r_0 x_2 y_2 + [a(t) - \mu(1-\nu)]\, y_2^2$$

знак которой совпадает со знаком V_1 при условиях

$$A < C,\ C^2 r_0^2 - 4 m z_0 A (g - \alpha k^2) - 4\mu (A - C) < 0 \tag{2.11}$$

$$A > C,\ C^2 r_0^2 - 4 m z_0 A (g - \alpha k^2) < 0 \tag{2.12}$$

Поэтому неравенства (2.11) или (2.12) представляют собой условия неустойчивости невозмущенного движения (2.2) [2].

Поступила 21 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., «Наука», 1965.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Гостехиздат, 1962.

УДК 531.31

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

До Шань

(Ханой)

Дается вывод уравнений движения систем с нелинейными неголономными связями второго порядка. За основу берется принцип Гаусса, согласно которому в каждый момент времени действительные ускорения обеспечивают минимум функции Гаусса в классе всех возможных ускорений, допускаемых связями системы.

1. Различные формы уравнения движения системы с нелинейными неголономными связями. Рассмотрим систему материальных точек M_k с массами m_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$, положение которой определено обобщенными координатами q_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Предположим, что на систему наложены неголономные нелинейные связи второго порядка, т. е. связи, уравнения которых [1]

$$f_\alpha (k, q_i, q_i^{\cdot}, q_i^{\cdot\cdot}) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Для вывода уравнений движения систем со связями (1.1) применим принцип Гаусса. Для этого составим функцию Гаусса

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{F}_k / m_k)^2$$

Здесь $\mathbf{w}_k$ — вектор ускорения материальной точки M_k, $\mathbf{F}_k$ — заданная сила, действующая на материальную точку M_k.

Раскрываем функцию Гаусса

$$U = S - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \mathbf{w}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^2 / m_k, \qquad S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{w}_k^2 \tag{1.2}$$

Положение материальной точки M_k определяется вектором $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k\,(t,\, q_i)$, ее скорость и ускорение

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{r}_k^{\boldsymbol{\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} q_i^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial t}$$

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{r}_k^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} + A$$

где A — совокупность членов, не зависящих от $q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$. Следовательно

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k\,(t,\, \mathbf{r}_k,\, \mathbf{v}_k) = \mathbf{F}_k\,(t,\, q_i,\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}}) \tag{1.3}$$

$$S = S\,(t,\, q_i,\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}},\, q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}) \tag{1.4}$$

$$\partial \mathbf{w}_k \,/\, \partial q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} = \partial \mathbf{r}_k \,/\, \partial q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} \tag{1.5}$$

Используя различные приемы минимизации функции Гаусса, получим различные (эквивалентные) формы уравнений движения.

1°. Составим функцию

$$\Phi = U + \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha f_\alpha$$

Здесь λ_α — неопределенные множители, f_α — уравнения связей вида (1.1). Условие минимума функции U по отношению к переменным $q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ будет $\partial\Phi \,/\, \partial q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}} = 0$. Отсюда уравнение движения системы

$$\frac{\partial S}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}} = Q_i - \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}}, \qquad Q_i = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_i} \tag{1.6}$$

$$(i = 1,\, 2, \ldots,\, n)$$

Здесь Q_i — обобщенная сила, а S имеет вид (1.4). К уравнениям (1.6) следует присоединить систему уравнений связей (1.1).

2°. Рассмотрим случай, когда якобиан

$$\frac{D\,(f_1,\, f_2,\, \ldots,\, f_s)}{D\,(\ddot{q}_{p+1},\, \ddot{q}_{p+2},\, \ldots,\, \ddot{q}_n)} \neq 0 \tag{1.7}$$

где $p = n - s$ — число независимых обобщенных ускорений. Тогда можно выразить величины $q_h^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ через $q_\nu^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$

$$\ddot{q}_h = \ddot{q}_h\,(t,\, q_i,\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}},\, \ddot{q}_\nu), \qquad d^*\ddot{q}_h = \sum_{\nu=1}^{p} g_{h\nu} d^* \ddot{q}_\nu \tag{1.8}$$

$$(\nu = 1,\, 2, \ldots,\, p; \;\; h = p + 1,\;\; p + 2, \ldots,\;\; n)$$

Здесь $g_{h\nu} = g_{h\nu}\,(t,\, q_i,\, q_i^{\boldsymbol{\cdot}},\, q_\nu^{\boldsymbol{\cdot\cdot}})$ и дифференциальный оператор d^* действует лишь на переменные $q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ (а переменные t, q_i, $q_i^{\boldsymbol{\cdot}}$ должны считаться постоянными).

Из условия минимума функций U по отношению к переменным $q_i^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}$ следует

$$\sum_{\nu=1}^{p} \left[\frac{\partial u}{\partial \ddot{q}_\nu} + \sum_{h=p+1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \ddot{q}_h} g_{h\nu} \right] d^* \ddot{q}_\nu = 0$$

Учитывая (1.2), имеем уравнения движения в форме

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\nu} + \sum_{h=p+1}^{n} \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_h} g_{h\nu} = Q_\nu + \sum_{h=p+1}^{n} g_{h\nu} Q_h \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p) \tag{1.9}$$

$$Q_\nu = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_\nu}, \qquad Q_h = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial q_h} \tag{1.10}$$

Здесь S имеет вид (1.4).

3°. Подставив (1.8) в функцию U, получим уравнения движения рассматриваемой системы

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_\nu} = Q_\nu + \sum_{h=p+1}^{n} g_{h\nu} Q_h \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p) \tag{1.11}$$

где $S = S(t, q_i, q_i^{\cdot}, q_\nu^{\cdot\cdot})$, а Q_ν и Q_h должны вычисляться по формулам (1.10).

4°. Пусть

$$\pi_\nu^{\cdot\cdot} = g_\nu(t, q_i, q_i^{\cdot}, \ddot{q}_i) \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p)$$

и выполнено условие

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_s, g_1, g_2, \ldots, g_p)}{D(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n)} \neq 0 \tag{1.12}$$

Тогда условие минимума функции U можно записать в виде $\partial U / \partial \pi_\nu^{\cdot\cdot} = 0$. Учитывая (1.5) и соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \ddot{\pi}_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial \ddot{q}_i} \frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{\pi}_\nu}$$

получим уравнения движения системы

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\nu} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial \ddot{q}_i}{\partial \ddot{\pi}_\nu} = \Pi_\nu \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p) \tag{1.13}$$

где $S = S(t, q_i, q_i^{\cdot}, \pi_\nu^{\cdot\cdot})$, а π_ν — обобщенная сила, соответствующая обобщенной псевдокоординате.

Пример. Рассмотрим сферическое движение твердого тела с неголономной связью [1]. Условие обобщенной прецессии вектора ω как неголономная связь имеет вид [1]

$$(pq^{\cdot} - dp^{\cdot}) + r(p^2 + q^2) - \lambda (p^2 + q^2)^{3/2} = 0$$

Энергия ускорения тела имеет вид [1]

$$S = \frac{1}{2} [Ap^{\cdot 2} + Bq^{\cdot 2} + Cr^{\cdot 2} + 2(C - B) qrp^{\cdot} + 2(A - C) rpq^{\cdot} + 2(B - A) pqr^{\cdot} + \ldots]$$

Здесь и ниже отброшенные члены не содержат $\psi^{\cdot\cdot}$, $\theta^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$.

Используя формулы Эйлера, имеем

$$p^{\cdot} = \psi^{\cdot\cdot} \sin\theta \sin\varphi + \theta^{\cdot\cdot} \cos\varphi + \ldots$$
$$q^{\cdot} = \psi^{\cdot\cdot} \sin\theta \cos\varphi - \theta^{\cdot\cdot} \sin\varphi + \ldots$$
$$r^{\cdot} = \psi^{\cdot\cdot} \cos\theta + \varphi^{\cdot\cdot} + \ldots$$

Введем псевдоускорения $\pi_1^{\cdot\cdot}$, $\pi_2^{\cdot\cdot}$, полагая $\theta^{\cdot\cdot} = \theta^{\cdot}\pi_1^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot} = \pi_2^{\cdot\cdot}$. Тогда

$$\psi^{\cdot\cdot} = \psi^{\cdot}\pi_1^{\cdot\cdot} + \ldots$$
$$p^{\cdot} = \pi_1^{\cdot\cdot} p + \ldots, \quad q^{\cdot} = \pi_1^{\cdot\cdot} q + \ldots, \quad r^{\cdot} = \pi_1^{\cdot\cdot} \psi^{\cdot} \cos\theta + \pi_2^{\cdot\cdot} + \ldots$$

В правых частях этих формул отброшены члены, не содержащие $\pi_1^{\cdot\cdot}$, $\pi_2^{\cdot\cdot}$. Замечая, что

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_j^{\cdot\cdot}} = \frac{\partial S}{\partial p^{\cdot}}\frac{\partial p^{\cdot}}{\partial \pi_j^{\cdot\cdot}} + \frac{\partial S}{\partial q^{\cdot}}\frac{\partial q^{\cdot}}{\partial \pi_j^{\cdot\cdot}} + \frac{\partial S}{\partial r^{\cdot}}\frac{\partial r^{\cdot}}{\partial \pi_j^{\cdot\cdot}} \qquad (j = 1,2)$$

получим уравнения движения

$$Cr^{\cdot} - (A - B)\, pq = Q_\varphi$$

$$Cr^{\cdot}\psi^{\cdot}\cos\theta + App^{\cdot} + Bqq^{\cdot} + (A - B)\, pq\varphi^{\cdot} = \psi^{\cdot}Q_\psi + \theta^{\cdot}Q_\theta$$

Итак, более простым путем приходим к результату, который следует из уравнений Ценова [1].

5°. Пользуясь тождествами

$$\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \tag{1.14}$$

где $T = T(t, q_i, q_i^{\cdot})$ — кинетическая энергия системы, а S имеет вид (1.4), запишем уравнение (1.6) в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} \qquad (i = 1,2,\ldots, n) \tag{1.15}$$

6°. Учитывая соотношения (1.14), уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\nu^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \sum_{n=p+1}^{n} g_{h\nu}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_h^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_h}\right) =$$

$$= Q_\nu + \sum_{h=p+1}^{n} g_{h\nu}Q_h \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p) \tag{1.16}$$

Здесь $T = T(t, q_i, q_i^{\cdot})$.

Пример Аппеля (см. [2, 3]). Учитывая замечание в [3], можно записать выражения для кинетической и потенциальной энергий и уравнение связей в виде

$$T = {}^1/_2 m\,(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}), \qquad \Pi = -\,mgz$$

$$z^{\cdot 2} - a^2\,(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}) = 0$$

Отсюда

$$f\,(x, y, z, x^{\cdot}, y^{\cdot}, z^{\cdot}, x^{\cdot\cdot}, y^{\cdot\cdot}, z^{\cdot\cdot}, t) = z^{\cdot}z^{\cdot\cdot} - a^2\,(x^{\cdot}x^{\cdot\cdot} + y^{\cdot}y^{\cdot\cdot}) = 0$$

Из уравнений (1.16) после простых преобразований имеем

$$x^{\cdot\cdot} + \frac{a^2x^{\cdot}\,(x^{\cdot}x^{\cdot\cdot} + y^{\cdot}y^{\cdot\cdot})}{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}} = -\,ga\frac{x^{\cdot}}{\sqrt{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}}}$$

$$y^{\cdot\cdot} + \frac{a^2y^{\cdot}\,(x^{\cdot}x^{\cdot\cdot} + y^{\cdot}y^{\cdot\cdot})}{x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2}} = -\,ga\frac{y^{\cdot}}{\sqrt{x^{\cdot 2} + y^{2}}}$$

Полученные уравнения совпадают с установленными в [3].

7°. Используем соотношения

$$\frac{\partial S}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}}\frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}}$$

Тогда из (1.13) имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} Q_i\frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}} \qquad (\nu = 1,2,\ldots, p) \tag{1.17}$$

Здесь

$$T = T\,(t, q_i, q_i^{\cdot})$$

Пример. Рассмотрим движение материальной точки в центральном поле силы ньютонова притяжения. Модуль скорости точки постоянен.

Рассматривая движение в сферических координатах r, φ, θ с началом в притягивающем центре, представим уравнение связи в форме [1]

$$f(r, \theta, \varphi, r^{\cdot}, \theta^{\cdot}, \varphi^{\cdot}) = \frac{1}{2} m (r^{\cdot 2} + r^2 \cos^2 \theta \varphi^{\cdot 2} + r^2 \theta^{\cdot 2}) = \text{const} \tag{1.18}$$

Это уравнение можно записать в виде

$$r^{\cdot} r^{\cdot\cdot} + r^2 \cos^2 \theta \varphi^{\cdot} \varphi^{\cdot\cdot} + r^2 \theta^{\cdot} \theta^{\cdot\cdot} + \ldots = 0$$

где невыписанные члены не содержат $r^{\cdot\cdot}$, $\theta^{\cdot\cdot}$, $\varphi^{\cdot\cdot}$.

Введем псевдоускорения $\pi_1^{\cdot\cdot}$, $\pi_2^{\cdot\cdot}$, полагая $\pi_1^{\cdot\cdot} = r^2 \theta^{\cdot} \theta^{\cdot\cdot}$, $\pi_2^{\cdot\cdot} = r^{\cdot} r^{\cdot\cdot}$. Тогда

$$\varphi^{\cdot\cdot} = \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta \varphi^{\cdot}} (\pi_1^{\cdot\cdot} + \pi_2^{\cdot\cdot}) + \ldots$$

где отброшенные члены не содержат $\pi_1^{\cdot\cdot}$, $\pi_2^{\cdot\cdot}$. Из уравнений (1.17) после простых преобразований имеем

$$r^{\cdot\cdot} - r\theta^{\cdot 2} - \frac{r^{\cdot}}{\varphi^{\cdot}} \varphi^{\cdot\cdot} - 2 \frac{r^{\cdot 2}}{r} + 2\theta^{\cdot} r^{\cdot} \operatorname{tg} \theta - 2\varphi^{\cdot 2} \cos^2 \theta = -\gamma \frac{M}{r^2}$$

$$r\theta^{\cdot\cdot} + r^2 \varphi^{\cdot 2} \sin \theta \cos \theta - r^2 \frac{\theta^{\cdot}}{\varphi^{\cdot}} \varphi^{\cdot\cdot} + 2r^2 \theta^{\cdot 2} \operatorname{tg} \theta = 0$$

Эти уравнения вместе с уравнением связи (1.18) позволяют найти искомые неизвестные. Полученные уравнения имеют тот же вид, что и в [3], если в последних исключить множители.

Замечания. Выписанные уравнения, очевидно, применимы и для систем с голономными, линейными неголономными связями и нелинейными неголономными связями первого порядка.

Уравнения (1.16), (1.17) упрощают вычисления при составлении уравнений движения. Если обобщенные скорости входят линейно в уравнения связей, то эти уравнения совпадают с уравнением Маджи [1, 2].

2. Уравнение Нильсена для систем с нелинейными неголономными связями второго порядка. При помощи соотношений

$$T^{\cdot} = \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k \mathbf{w}_k, \qquad \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial q_i^{\cdot}} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial \mathbf{w}_k}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i^{\cdot}}$$

легко доказать тождество

$$\frac{\partial S}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = \frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_i^{\cdot}} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad T = T(t, q_i, q_i^{\cdot}), \quad T^{\cdot} = dT / dt \tag{2.1}$$

Здесь S имеет вид (1.4). Уравнения движения системы принимают одну из следующих форм:

$$\frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_i^{\cdot}} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i^{\cdot\cdot}}$$

$$\frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_\nu^{\cdot}} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \sum_{h=p+1}^{n} g_{h\nu} \left(\frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_h^{\cdot}} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_h} \right) = Q_\nu + \sum_{h=p+1}^{n} Q_h g_{h\nu} \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_i^{\cdot}} - 2 \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}} = \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}}$$

Рассмотрим движение системы с неголономными связями первого порядка

$$\Phi_\alpha (t, q_i, q_i^{\cdot}) = 0 \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) можно записать в виде

$$f_\alpha(t, q_i, q_i^{\cdot}, q_i^{\cdot\cdot}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i^{\cdot}} q_i^{\cdot\cdot} + \ldots = 0 \tag{2.4}$$

где ненаписанные члены не содержат $q_i^{\cdot\cdot}$. Из (2.4) следует соотношение $\partial f_\alpha / \partial q_i^{\cdot\cdot} = \partial \Phi_\alpha / \partial q_i^{\cdot}$, и, следовательно, первое уравнение (2.2) будет

$$\frac{\partial T^{\cdot}}{\partial q_i^{\cdot}} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i - \sum_{\alpha=1} \lambda_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial q_i^{\cdot}} \tag{2.5}$$

Наконец, если на систему наложены голономные связи, то в (2.5) $\lambda_\alpha \equiv 0$.

Полученные уравнения (2.5) совпадают с приведенными в [1].

3. Уравнение Ценова второго рода. Можно показать, что

$$T^{\cdot\cdot} = 2S + 3\sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{v}_k \mathbf{w}_k^{\cdot} + B \tag{3.1}$$

где B — совокупность членов, не содержащих производных первого порядка от ускорения точек.

Так как

$$\frac{\partial \mathbf{w}_k^{\cdot}}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i}, \qquad \mathbf{w}_k^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial q_i} q_i^{\cdot\cdot} + C$$

то из (3.1) получим

$$S = p + D, \qquad p = \frac{1}{2}\left[T^{\cdot\cdot} - 3\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i} q_i^{\cdot\cdot}\right]$$

Здесь C, D — совокупности членов, не содержащих $q_i^{\cdot\cdot}$.

Теперь уравнения движения системы примут одну из следующих трех форм:

$$\frac{\partial R}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} - \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_i^{\cdot\cdot}} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_\nu^{\cdot\cdot}} \frac{\partial q_i^{\cdot\cdot}}{\partial \pi_\nu^{\cdot\cdot}} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial q_\nu^{\cdot\cdot}} + \sum_{h=p+1}^{n} \frac{\partial R}{\partial q_h^{\cdot\cdot}} g_{h\nu} = 0 \qquad \left(R = p - \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i^{\cdot\cdot}\right)$$

Последнее уравнение совпадает с приведенным в [1].

Поступила 24 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1971.
2. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.
3. Новоселов В. С. Вариационные методы в механике. Изд-во МГУ, 1966.