УДК 531.31

# ОБ ОДНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Г. Апыхтин, А. А. Пионтковский, В. М. Сафрай

(Москва)

Рассматривается вопрос о применении функции Ляпунова в виде квадратичной формы с коэффициентами, представляющими собой функции времени, для исследования устойчивости перманентных вращений твердого тела с одной закрепленной на подвижном основании точкой.

При исследовании устойчивости перманентных вращений твердого тела с одной неподвижной точкой в потенциальном поле сил, как правило, в качестве функции Ляпунова берется связка интегралов уравнений возмущенного движения, начинающаяся с членов второго порядка относительно возмущений (см., например, [1]). Производная этой функции в силу уравнений возмущенного движения равна нулю, поэтому положительная определенность квадратичной формы указанной функции обеспечивает устойчивость невозмущенного движения. Если же закрепленная точка твердого тела находится на подвижном основании (совершает определенное движение), то построение функции Ляпунова в виде связки первых интегралов уравнений движения невозможно из-за отсутствия интеграла энергии. Поэтому приходится изыскивать иные пути построения функции Ляпунова; один из способов такого построения рассматривается ниже.

1. Рассмотрим функцию

$$V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma a_{ij}(t)\, x_i x_j \tag{1.1}$$

заданную в области

$$t \geqslant t_0 > 0, \ |x_s| < h \ (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

где $t_0$ и $h$ — постоянные.

Пусть коэффициенты квадратичной формы (1.1) имеют вид

$$a_{ij}(t) = a_{ji}(t) = f(t)\, c_{ij}$$

Здесь $c_{ij}$ — постоянные параметры системы, а $f(t)$ — положительная периодическая функция времени с периодом $\varepsilon < 1/2$, допускающая в точках $t_m = t_0 + m\varepsilon$ ($m = 1, 2, \ldots$) разрывы первого рода. В промежутке $t_{m-1} < t < t_m$ график функции $f(t)$ представляет собой прямую линию, параллельную биссектрисе второго и четвертого координатных углов.

Очевидно, что введенная функция $f(t)$ и коэффициенты квадратичной формы (1.1) обладают везде, кроме точек $t_m$, свойствами

$$1 - \varepsilon < f(t) < 1, \ f^{\cdot}(t) = 1$$

$$(1 - \varepsilon)\, |c_{ij}| \leqslant |a_{ij}(t)| \leqslant c_{ij}, \ a_{ij}^{\cdot}(t) = -c_{ij}$$

Функция (1.1) обращается в нуль в начале координат пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и принимает только положительные значения в окрестности начала координат, если будет определенно-положительной квадратичная форма с постоянными коэффициентами

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1 - 2\varepsilon)\, \Sigma c_{ij} x_i x_j$$

т. е. при выполнении неравенств

$$C_s = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1s} \\ c_{s1} & \ldots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$

В самом деле, в этом случае функция

$$V - W = \sum b_{ij}(t)\, x_i x_j, \qquad b_{ij}(t) = c_{ij}\,[f(t) - (1 - 2\varepsilon)]$$

представляет собой квадратичную форму, все диагональные миноры которой

$$B_s = [f(t) - (1 - 2\varepsilon)]^s\, C_s \tag{1.4}$$

положительные функции времени при всех $t \geqslant t_0 > 0$, так как в выражении (1.4) функция времени, стоящая в квадратных скобках, заключена между $\varepsilon$ и $2\varepsilon$ и, следовательно, является функцией положительной, а постоянные $C_s > 0$ на основании условий (1.3).

Таким образом, при условиях (1.3) имеет место соотношение

$$V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) > W(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \tag{1.5}$$

т. е. форма (1.1) в области (1.2) — определенно-положительная, зависящая от $t$ функция.

Аналогично рассуждая, можно показать, что функция $V$ удовлетворяет условию $V < W_1$, где $W_1$ — определенно-положительная квадратичная форма с постоянными коэффициентами.

Поэтому можно сделать заключение о том, что однопараметрическое семейство циклов $V = c > 0$ в пространстве переменных $x_s$ заключено между двумя постоянными циклами $W = c$ и $W_1 = c$.

Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения возмущенного движения вида

$$x_s^\cdot = X_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Пусть полная производная по времени функции $V$, составленная в силу этих уравнений, т. е. выражение, существующее при всех $t$, кроме точек разрыва функции $f(t)$, и доопределенное в этих точках

$$V^\cdot = \partial V / \partial t + \Sigma X_s \partial V / \partial x_s$$

есть функция отрицательная, или тождественно равна нулю. Тогда имеет место устойчивость по Ляпунову невозмущенного движения; т. е. траектория движения изображающей точки, исходящая из положений $\Sigma x_{s0}^2 = \Sigma x_s^2(t_0) \leqslant \lambda$, не выйдет за пределы сферы $\Sigma x_s^2 = \delta$, где $\delta$ — произвольное положительное число, $\lambda = \lambda(\delta)$.

В самом деле, очевидно, что на любой сфере $\Sigma x_s^2 = \delta$ в области (1.2) пространства переменных $x_s$ имеет место условие $W(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant l$, где $l$ — точный нижний предел функции $W$ на этой сфере. Тогда на основании неравенства (1.5) на сфере $\Sigma x_s^2 = \delta$ будет выполняться и условие $V(t, x_1, \ldots, x_n) > l$.

С другой стороны, можно указать такие точки $x_{s0}$ пространства переменных $x_s$, расположенные в области $\Sigma x_{s0}^2 \leqslant \lambda < \delta$, чтобы выполнялось условие $V(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) < l$ (это возможно, так как $V(t_0, 0, 0, \ldots, 0) = 0$).

Согласно условию $V^\cdot \leqslant 0$, имеем $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant V(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) < l$, т. е. попадание изображающей точки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на сферу $\Sigma x_s^2 = \delta$ невозможно.

Таким образом, для функции (1.1) с указанными свойствами верна теорема Ляпунова об устойчивости, и она может быть взята в качестве функции Ляпунова [2].

2. При помощи функции Ляпунова (1.1) исследуем устойчивость вращательного движения волчка Лагранжа, закрепленного одной точкой на подвижном основании и находящегося в центральном ньютоновском поле сил.

Рассмотрим твердое тело, главные моменты инерции которого $A = B \neq C$, центр масс находится на оси $Oz$ динамической симметрии: $x_c = y_c = 0$, $z_c = z_0 > 0$, в центральном ньютоновском поле сил с силовой функцией

$$U = -mg(x_0\gamma_1 + y_0\gamma_2 + z_0\gamma_3) - \mu(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) / 2$$

Здесь $x_0$, $y_0$, $z_0$ — координаты центра масс в осях $Oxyz$, направленных по главным осям эллипсоида инерции твердого тела, $\mu$ — постоянная, зависящая от гравитационной постоянной и расстояния тела до притягивающего центра, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ — направляющие косинусы оси $z_1$ «притягивающий центр — центр эллипсоида инерции твердого тела» в системе координат $Oxyz$.

Пусть центр $O$ эллипсоида инерции совершает гармоническое колебание вдоль оси $z_1$ по закону

$$z_{10} = a \sin kt, \qquad a, k > 0$$

Тогда уравнения движения твердого тела, отнесенные к системе $Oxyz$, имеют вид

$$\begin{aligned}
p^{\cdot} &= (1-\nu)\, qr + a(t)\, \gamma_2 - \mu (1-\nu)\, \gamma_2\gamma_3, \quad \gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2 - q\gamma_3 \\
q^{\cdot} &= -(1-\nu)\, pr - a(t)\, \gamma_1 + \mu (1-\nu)\, \gamma_1\gamma_3, \quad \gamma_2^{\cdot} = p\gamma_3 - r\gamma_1 \\
r^{\cdot} &= 0, \qquad \gamma_3^{\cdot} = q\gamma_1 - p\gamma_2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $p$, $q$, $r$ — проекции мгновенной угловой скорости твердого тела на оси $x$, $y$, $z$ соответственно: $\nu = C / A$ — постоянная, $a(t) = mz_0 (g - \alpha k^2 \sin kt) / A$ — известная функция времени.

Уравнения (2.3) допускают частное решение

$$p = q = 0,\ r = r_0,\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1 \tag{2.2}$$

что соответствует вращению твердого тела с угловой скоростью $r_0$ вокруг оси динамической симметрии, направленной по оси «притягивающий центр — центр эллипсоида инерции».

Исследуем устойчивость невозмущенного движения (2.2) по отношению к переменным $p$, $q$, $r$, $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$. Положим в возмущенном движении

$$p = x_1,\ q = x_2,\ r = r_0 + x_3,\ \gamma_1 = y_1,\ \gamma_2 = y_2,\ \gamma_3 = 1 + y_3 \tag{2.3}$$

Тогда уравнения возмущенного движения принимают вид

$$\begin{aligned}
x_1^{\cdot} &= (1-\nu)(r_0 + x_3)\, x_2 + a(t)\, y_2 - \mu(1-\nu)(1 + y_3)\, y_2, \quad x_2^{\cdot} = -(1-\nu)(r_0 + {} \\
&+ x_3)\, x_1 - a(t)\, y_1 + \mu(1-\nu)(1 + y_3)\, y_1, \quad x_3^{\cdot} = 0, \quad y_1^{\cdot} = (r_0 + x_3)\, y_2 - x_2(1 + y_3) \\
y_2^{\cdot} &= x_1(1 + y_3) - (r_0 + x_3)\, y_1, \quad y_3^{\cdot} = x_2 y_1 - x_1 y_2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Достаточные условия устойчивости движения (2.2) получим рассмотрением функции Ляпунова типа формы (1.1)

$$\begin{aligned}
V = f(kt)\, \{x_1^2 &- \nu r_0 x_1 y_1 + [\nu^2 r_0^2 / 2 - a(t) + \mu(1-\nu)]\, y_1^2 + x_2^2 - \nu r_0 x_2 y_2 + {} \\
&+ [\nu^2 r_0^2 / 2 - a(t) + \mu(1-\nu)]\, y_2^2 + \nu^2 x_3^2 - \nu^2 r_0\, x_3 y_3 + [\nu^2 r_0^2 / 2 - a(t)]\, y_3^2\}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В данном случае при условиях (2.6) или (2.7)

$$A > C,\ C^2 r_0^2 - 4mz_0 A (g + \alpha k^2) - 4\mu (A - C) > 0 \tag{2.6}$$

$$A < C,\ C^2 r_0^2 - 4mz_0 A (g + \alpha k^2) > 0 \tag{2.7}$$

функция (2.5) будет определенно-положительной квадратичной формой переменных $x_i$, $y_i$, которая удовлетворяет условию (1.3). Производная функции (2.5) в силу уравнений возмущенного движения (2.4) представляет собой квадратичную форму

$$\begin{aligned}
-V^{\cdot} / k &= x_1^2 - \nu r_0 x_1 y_1 + [\nu^2 r_0^2 / 2 - a(t) + \mu(1-\nu) + {} \\
&+ a^{\cdot}(t) f(kt) / k]\, y_1^2 + x_2^2 - \nu r_0 x_2 y_2 + [\nu^2 r_0^2 / 2 - a(t) + {} \\
&+ \mu(1-\nu) + a^{\cdot}(t) f(kt) / k]\, y_2^2 + \nu^2 x_3^2 - \nu^2 r_0 x_3^2 y_3 + {} \\
&+ [\nu^2 r_0^2 / 2 - a(t) + a^{\cdot}(t) f(kt) / k]\, y_3^2
\end{aligned}$$

которая принимает отрицательные значения при условиях

$$A > C,\ C^2 r_0^2 - 4mz_0 A (g + 2\alpha k^2) - 4\mu (A - C) > 0 \tag{2.8}$$

$$A < C,\ C^2 r_0^2 - 4\, mz_0 A (g + 2\, \alpha k^2) > 0 \tag{2.9}$$

Очевидно, что при выполнении условий (2.9) или (2.8) выполняются условия (2.6) или (2.7). Другими словами, достаточными условиями устойчивости невозмущенного движения (2.2) являются неравенства (2.8) или (2.9).

В случае $\alpha = 0$ ($k = 0$) неравенство (2.9) переходит в известное в литературе условие устойчивости Н. В. Маиевского [3].

Вопрос о том, насколько близки условия (2.8) или (2.9) к необходимым условиям устойчивости движения (2.2), решается рассмотрением функции

$$V_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \tag{2.10}$$

Действительно, в области $V_1 > 0$ производная функции (2.10) в силу уравнений возмущенного движения (2.4) представляет собой форму [3]

$$V_1^{\cdot} = x_1^{\cdot} y_2 + x_1 y_2^{\cdot} - x_2^{\cdot} y_1 - x_2 y_1^{\cdot} = x_1^2 - \nu r_0 x_1 y_1 + [a(t) - \mu(1-\nu)] y_1^2 + x_2^2 - \\ - \nu r_0 x_2 y_2 + [a(t) - \mu(1-\nu)] y_2^2$$

знак которой совпадает со знаком $V_1$ при условиях

$$A < C, \; C^2 r_0^2 - 4mz_0 A (g - \alpha k^2) - 4\mu (A - C) < 0 \tag{2.11}$$

$$A > C, \; C^2 r_0^2 - 4mz_0 A (g - \alpha k^2) < 0 \tag{2.12}$$

Поэтому неравенства (2.11) или (2.12) представляют собой условия неустойчивости невозмущенного движения (2.2) [2].

Поступила 21 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., «Наука», 1965.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Гостехиздат, 1962.

---

УДК 531.31

# УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**До Шань**

(Ханой)

Дается вывод уравнений движения систем с нелинейными неголономными связями второго порядка. За основу берется принцип Гаусса, согласно которому в каждый момент времени действительные ускорения обеспечивают минимум функции Гаусса в классе всех возможных ускорений, допускаемых связями системы.

**1. Различные формы уравнения движения системы с нелинейными неголономными связями.** Рассмотрим систему материальных точек $M_k$ с массами $m_k$ ($k = 1, 2, \ldots, N$), положение которой определено обобщенными координатами $q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Предположим, что на систему наложены неголономные нелинейные связи второго порядка, т. е. связи, уравнения которых [1]

$$f_\alpha (k, q_i, q_i^{\cdot}, q_i^{\cdot\cdot}) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s; \; i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Для вывода уравнений движения систем со связями (1.1) применим принцип Гаусса. Для этого составим функцию Гаусса

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k (\mathbf{w}_k - \mathbf{F}_k / m_k)^2$$

Здесь $\mathbf{w}_k$ — вектор ускорения материальной точки $M_k$, $\mathbf{F}_k$ — заданная сила, действующая на материальную точку $M_k$.

Раскрываем функцию Гаусса

$$U = S - \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k \mathbf{w}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k^2 / m_k, \qquad S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} m_k \mathbf{w}_k^2 \tag{1.2}$$