Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.4

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ УПРУГОГО ПОЛЯ КВАЗИИЗОТРОПНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕИЗОТРОПНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

А. Г. Фокин, Т. Д. Шермергор

(Москва)

Найдены бинарные корреляционные функции тензоров напряжений и деформаций для композиционных материалов, составленных из изотропных компонентов. Принимается, что осредненное поле деформаций обладает произвольной анизотропией. Получен явный вид разложения корреляционных функций упругого поля по произведениям единичного тензора второго ранга, тензора осредненных деформаций и направляющих косинусов, задающих ориентировку прямой, соединяющей точки, между которыми ищется корреляционная связь. Вычислены дисперсии напряжений и деформаций. Показано, что соответствующие тензоры четвертого ранга изотропны при объемном деформировании, имеют тетрагональную симметрию при чистом сдвиге и трансверсальную изотропию при растяжении. Числовые оценки проведены для материала, каждая из фаз которого характеризуется отношением объемного и сдвигового модулей упругости, равным $^8/_3$.

1. В работе [1] были вычислены корреляционные функции второго порядка полей напряжений и деформаций квазиизотропных твердых тел — однофазных поликристаллов и композиционных материалов в изотропном приближении. Физический смысл приближения изотропии состоит в том, что свертка дисперсии тензора коэффициентов упругости со средними тензорами деформаций $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$ принимается в виде (строго говоря, справедливом лишь для изотропных полей $\langle\varepsilon_{ij}\rangle$)

$$\langle\lambda'_{ijpq}\lambda'_{klmn}\rangle\langle\varepsilon_{pq}\rangle\langle\varepsilon_{mn}\rangle = 3F_1V_{ijkl} + 2F_2D_{ijkl} \tag{1.1}$$
$$I_{ijkl} = {}^1/_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \qquad V_{ijkl} = {}^1/_3\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$D_{ijkl} = I_{ijkl} - V_{ijkl}$$

Здесь V_{ijkl} и D_{ijkl} — объемная и девиаторная составляющие единичного тензора четвертого ранга I_{ijkl}.

Как будет показано ниже, приближение изотропии приводит к правильному значению объемной и девиаторных сверток тензора дисперсии полей напряжений и деформаций. Однако приближение изотропии макроскопического поля и его однородности сильно ограничивает область применимости полученных результатов. В связи с этим возникает необходимость обобщения расчетной модели. Учет неоднородности макроскопического поля может быть выполнен, например, по схеме, предложенной В. В. Новожиловым [2]. Ниже показано, каким образом можно учесть анизотропию макроскопического упругого поля. Вычисления для произвольной микронеоднородной среды весьма громоздки, поэтому ограничимся случаем, когда каждая из фаз может считаться изотропной.

Такими свойствами обладают не только стеклопластики, но и системы металл — металл, металл — полимер, керметы и др., в которых анизотропия металлической фазы мала либо за счет специфики данного металла (например коэффициент анизотропии вольфрама и алюминия равен 1.0 и 1.2 соответственно), либо если каждая из фаз представляет собой нетекстурированный поликристалл с размером зерна намного меньшим размеров области неоднородности. В этом случае мелкомасштабные пространственные флуктуации упругого поля, связанные с поликристалличностью, игнорируются, а учитываются лишь крупномасштабные флуктуации, связанные с многофазностью композита.

2. Случайная составляющая поля деформаций ε_{ij}' может быть представлена через ее полное значение при помощи тензора Грина G_{kl} уравнения равновесия для среды с осредненными модулями упругости

$$\varepsilon_{ij}' = G_{i)k,l(j} * \lambda_{klmn}'\varepsilon_{mn} \tag{2.1}$$

Здесь звездочкой обозначена операция свертки, а по индексам, заключенным в скобки, проводится симметризация. Если макроскопическое поле однородное, то при помощи интегрального преобразования Фурье

$$\varphi^* (\mathbf{k}) \equiv \int \varphi (\mathbf{r})\, e^{-i\mathbf{kr}} d\mathbf{r} \tag{2.2}$$

выражение (1.1) можно привести к виду

$$\varepsilon_{ij}'^* = g_{ijkl}^* \lambda_{kl}'^* \tag{2.3}$$

$$\langle\mu\rangle g_{ijkl}^* = \varkappa \nu_{ijkl} - \delta_{i)(k}\nu_{l)(j}, \qquad \varkappa = \langle 3K + \mu\rangle / \langle 3K + 4\mu\rangle$$

$$\nu_{ij\ldots l} \equiv \nu_i\nu_j \ldots \nu_l, \quad \nu_i = k_i / k, \quad \lambda_{ij}^* = K^*\varepsilon\delta_{ij} + 2\mu^* e_{ij} \tag{2.4}$$
$$\varepsilon \equiv \langle\varepsilon_{ii}\rangle, \qquad e_{ij} \equiv \langle\varepsilon_{ij} - {}^1/_3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\rangle$$

Здесь опущены слагаемые второго порядка малости $\lambda_{klmn}'\varepsilon_{mn}'$. Из равенств (2.3) и (2.4) находим

$$-\varepsilon_{ij}'^* = \xi'^*\nu_{ij} + 2\eta'^*\beta_{ij} \tag{2.5}$$

$$\xi^* = \chi^* - 2\varkappa\eta^*\beta, \quad \chi = \frac{3K\varepsilon}{\langle 3K + 4\mu\rangle}, \quad \eta = \frac{\mu}{\langle\mu\rangle}$$
$$\beta_{ij} \equiv \nu_{(i}e_{j)k}\nu_k, \qquad \beta \equiv \beta_{ii} \tag{2.6}$$

Аналогично находится случайная составляющая поля напряжений. В том же приближении, что и прежде, имеем

$$\sigma_{ij}' = \lambda_{ijkl}' \langle\varepsilon_{kl}\rangle + \langle\lambda_{ijkl}\rangle \varepsilon_{kl}' \tag{2.7}$$

Отсюда, используя выражение (2.5), находим Фурье-образ случайной составляющей поля напряжений

$$\sigma_{ij}'^* = 2\langle\mu\rangle\, [\xi'^* (\delta_{ij} - \nu_{ij}) + \eta'^* (\beta\delta_{ij} + e_{ij} - 2\beta_{ij})] \tag{2.8}$$

Выражения (2.5) и (2.8) позволяют найти корреляционные функции полей напряжений и деформаций. Для этой цели воспользуемся равенствами

$$
\begin{aligned}
S_{ijkl}(\mathbf{r}) &\equiv \langle \sigma'_{ij}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\,\sigma'_{kl}(\mathbf{r}_1)\rangle \\
E_{ijkl}(\mathbf{r}) &\equiv \langle \varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\,\varepsilon'_{kl}(\mathbf{r}_1)\rangle
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \sigma'^*_{ij}(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)\,\bar{\sigma}'^*_{kl}(\mathbf{k}_1)\rangle &= 8\pi^3\delta(\mathbf{k})\,S^*_{ijkl}(\mathbf{k}_1) \\
\langle \varepsilon'^*_{ij}(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)\,\bar{\varepsilon}'^*_{kl}(\mathbf{k}_1)\rangle &= 8\pi^3\delta(\mathbf{k})\,E^*_{ijkl}(\mathbf{k}_1)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Здесь угловыми скобками обозначено статистическое осреднение, чертой над буквой — комплексно-сопряженная величина, а также учтена статистическая однородность упругих полей, средние значения которых считаются постоянными.

Аналогичные соотношения имеют место и для корреляционной функции тензора модулей упругости

$$
\begin{aligned}
\Lambda^{ijkl}_{pqrs}(\mathbf{r}) &\equiv \langle \lambda'_{ijkl}(\mathbf{r}+\mathbf{r}_1)\,\lambda'_{pqrs}(\mathbf{r}_1)\rangle \\
\langle \lambda'^*_{ijkl}(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)\,\bar{\lambda}'^*_{pqrs}(\mathbf{k}_1)\rangle &= 8\pi^3\delta(\mathbf{k})\,\Lambda^{ijkl}_{pqrs}(0)\,\varphi^*(\mathbf{k}_1)
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Здесь принята гипотеза разделения тензорной и координатной зависимостей бинарной корреляционной функции тензора модулей упругости [1]. Подставляя в (2.10) явные выражения для $\sigma_{ij}'^*(\mathbf{k})$ и $\varepsilon_{ij}'^*(\mathbf{k})$, согласно (2.5) и (2.8), и учитывая (2.11), находим

$$
\begin{gathered}
E^*_{ijkl}(\mathbf{k}) = D^p_{ijkl}\varphi^*(\mathbf{k}), \qquad S^*_{ijkl}(\mathbf{k}) = 4\langle\mu\rangle^2 D^q_{ijkl}\varphi^*(\mathbf{k}) \\
D^{xy}_{ijkl} \equiv \langle x'_{ij}y'_{kl}\rangle = v_1v_2\,(x^{(1)}_{ij} - x^{(2)}_{ij})\,(y^{(1)}_{kl} - y^{(2)}_{kl}) \\
D^x_{ijkl} \equiv D^{xx}_{ijkl}, \qquad p_{ij} \equiv \xi\nu_{ij} + 2\eta\beta_{ij} \\
q_{ij} \equiv \xi\,(\delta_{ij} - \nu_{ij}) + \eta\,(\beta\delta_{ij} + e_{ij} - 2\beta_{ij})
\end{gathered}
$$

Здесь p_{ij} отличается от трансформанты Фурье деформации $\varepsilon_{ij}^*(\mathbf{k})$ не только знаком, но и тем, что величины ξ и η считаются функциями координат, а β_{ij} и β по-прежнему берутся в пространстве волновых чисел и аналогично для q_{ij}. Поэтому дисперсия величин p_{ij} и q_{ij} будет зависеть от $\mathbf{k}$. Последнее отражает тот факт, что координатная и тензорная зависимости могут быть разделены лишь для корреляционной функции модулей упругости, тогда как для полей напряжений и деформаций такое разделение провести не удается [1, 3].

3. Проведем переход от трансформант Фурье корреляционных функций к оригиналу. Для этой цели введем вспомогательные функции

$$
\begin{aligned}
J^{(\alpha)*}_{ij\ldots l}(\mathbf{k}) &= (-1)^\alpha\,\nu_{ij\ldots l}\,\varphi^*(\mathbf{k}) \\
J^{(\alpha)}_{ij\ldots l}(\mathbf{r}) &= \nabla_i\nabla_j\ldots\nabla_l\,\frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}k^{-2\alpha}\varphi^*(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Здесь порядок дифференцирования равен 2α. При помощи (3.1) находим

$$
\begin{aligned}
E_{ijkl}(\mathbf{r}) = Q\binom{ij}{kl}\bigl[D_\chi J^{(2)}_{ijkl} &+ 4D_{\chi\eta}\,(J^{(2)}_{ijkm}e_{ml} + \varkappa J^{(3)}_{ijklmn}e_{mn}) + \\
&+ 4D_\eta\,(J^{(2)}_{ikmn}e_{jm}e_{ln} + 2\varkappa J^{(3)}_{ijkmnr}e_{mn}e_{lr} + \varkappa^2 J^{(4)}_{ijklmnrs}e_{mn}e_{rs})\bigr]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&({}^1/_4 \langle\mu\rangle^2)\, S_{ij.l}(\mathbf{r}) = Q\begin{pmatrix} ij \\ kl \end{pmatrix}\{D_\chi(\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}J_{kl}^{(1)} + J_{ijkl}^{(2)}) + 2D_{\chi\eta}[(\delta_{ij} + \\
&+ J_{ij}^{(1)})e_{kl} + (2\varkappa - 1)\,\delta_{ij}\delta_{kl}J_{mn}^{(1)}e_{mn} + (4\varkappa - 1)\,\delta_{ij}J_{klmn}^{(2)}e_{mn} + \\
&+ 2\varkappa J_{ijklmn}^{(3)}e_{mn} + 2(\delta_{ij}J_{km}^{(1)}e_{ml} + J_{ijkm}^{(2)}e_{ml})] + D_\eta\,[e_{ij}e_{kl} + (2\varkappa - 1)^2 \times \\
&\times \delta_{ij}\delta_{kl}J_{mnrs}^{(2)}e_{mn}e_{rs} + 2(2\varkappa - 1)\,\delta_{ij}J_{mn}^{(1)}e_{kl}e_{mn} + 4\varkappa J_{ijmn}^{(2)}e_{kl}e_{mn} + \\
&+ 4\varkappa(2\varkappa - 1)\,\delta_{ij}J_{klmnrs}^{(3)}e_{mn}e_{rs} + 4\varkappa^2J_{ijklmnrs}^{(4)}e_{mn}e_{rs} + \qquad (3.2) \\
&+ 4(2\varkappa - 1)\,\delta_{ij}J_{kmnr}^{(2)}e_{mn}e_{lr} + 8\varkappa J_{ijkmnr}^{(3)}e_{mn}e_{lr} + 4J_{im}^{(1)}e_{jm}e_{kl} + 4J_{ikmn}^{(2)}e_{jm}e_{nl}]\}
\end{aligned}
$$

Здесь $Q\begin{pmatrix} ij \\ kl \end{pmatrix}$ — оператор симметризации внутри пары индексов и между ними

$$
Q\begin{pmatrix} ij \\ kl \end{pmatrix} A_{ijkl} = A_{[(ij)(kl)]} \equiv {}^1/_2\,(A_{(ij)(kl)} + A_{(kl)(ij)})
$$

Интегралы $J_{ij\ldots l}^{(\alpha)}$, введенные равенствами (3.1), могут быть представлены в виде разложения по произведениям величин δ_{ij} и $n_{ij} = n_i n_j$, где $n_i = x_i \,/\, r$

$$
J_{ij\ldots kl}^{(\alpha)} \equiv \sum_{\beta=0}^{\alpha} T_\beta^{(\alpha)}\psi_{\beta ij\ldots kl}^{(\alpha)} \tag{3.3}
$$

$$
\psi_{\beta ij\ldots kl}^{(\alpha)} = \sum_P P\delta_{ij}\ldots\delta_{pq}n_{rs}\ldots n_{kl} \tag{3.4}
$$

Через P в равенстве (3.4) обозначен оператор перестановки индексов, а суммирование проводится по всевозможным перестановкам за исключением тождественных. Количество сомножителей типа δ_{ij} в разложении (3.4) равно $\alpha - \beta$, а количество сомножителей типа n_{rs} равно β. Так, при $\alpha = 2$ имеем

$$
\psi_{0ijkl}^{(2)} = \delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}
$$

$$
\psi_{1ijkl}^{(2)} = \delta_{ij}n_{kl} + \delta_{kl}n_{ij} + \delta_{ik}n_{jl} + \delta_{jl}n_{ik} + \delta_{il}n_{jk} + \delta_{jk}n_{il}
$$

$$
\psi_{2ijkl}^{(2)} = n_{ij}n_{kl}
$$

Количество слагаемых тензора $\psi_{\beta ij\ldots kl}^{(\alpha)}$ равно

$$
N_{\alpha\beta} = \frac{(2\alpha)!}{2^{\alpha-\beta}(\alpha-\beta)!\,(2\beta)!}
$$

Коэффициенты разложения в выражении (3.5) подчиняются следующим рекуррентным соотношениям:

$$
-T_\beta^{(\alpha)} = T_{\beta-1}^{(\alpha-1)} + [2(\alpha+\beta) - 1]\,T_{\beta-1}^{(\alpha)} \tag{3.5}
$$

Для нетекстурированной механической смеси изотропных компонентов поверхность пространственного масштаба корреляций будет сферической, а функцию $\varphi(\mathbf{r})$ можно выбрать в виде экспоненты

$$
\varphi(\mathbf{r}) = \exp(-r \,/\, a)
$$

При таком выборе $\varphi(r)$ значения первых пяти коэффициентов $T_0^{(\alpha)}$ будут

$$T_0^{(0)} \equiv \varphi = \exp(-1/\rho), \qquad \rho = a/r$$

$$T_0^{(1)} = (1 + 2\rho + 2\rho^2)\,\rho\varphi - 2\rho^3$$

$$T_0^{(2)} = (1 + 5\rho + 12\rho^2 + 12\rho^3)\rho^2\varphi + (1 - 12\rho^2)\rho^3$$

$$T_0^{(3)} = (1 + 9\rho + 39\rho^2 + 90\rho^3 + 90\rho^4)\rho^3\varphi - ({}^1/_4 - 6\rho^2 + 90\rho^4)\rho^3$$

$$T_0^{(4)} = (1 + 14\rho + 95\rho^2 + 375\rho^3 + 8\cdot 7!!\rho^5)\rho^4\varphi + ({}^1/_{24} - {}^3/_2\rho^2 + \\ + 3\cdot 5!!\rho^4 - 8\cdot 7!!\rho^6)\rho^3$$

Коэффициенты $T_0^{(\alpha)}$ при $r \to 0$ имеют следующие предельные значения:

$$T_0^{(\alpha)} = (-1)^\alpha/(2\alpha + 1)!! \tag{3.6}$$

Подставляя асимптотическое значение $T_0^{(\alpha)}$, согласно (3.6), в рекуррентные соотношения (3.5), убеждаемся, что если $\beta \neq 0$, то коэффициенты $T_\beta^{(\alpha)}$ при $r \to 0$ обращаются в нуль. Это отражает условие изотропии среды, согласно которому симметричный тензор четвертого ранга должен выражаться лишь через всевозможные комбинации δ-символов Кронекера.

При $r \to \infty$ приходим к следующим предельным значениям:

$$T_0^{(\alpha)} \approx (-1)^\alpha \cdot 2\rho^3/[2(\alpha - 1)]!!$$

4. Из выражений (3.2) могут быть найдены дисперсии напряжений и деформаций. Для этого достаточно в соответствующих корреляционных функциях положить аргумент r равным нулю. Проведя необходимые выкладки, находим

$$15\mathring{E}_{ijkl} = (D_\chi + {}^8/_{63}\varkappa^2 D_\eta Э)\,\psi_{0ijkl}^{(2)} + 2(1 - {}^4/_7\varkappa)\,D_{\chi\eta}\varphi_{1ijkl}^{(2)} + 2(1 - {}^8/_7\varkappa + \\ + {}^{16}/_{63}\varkappa^2)\,D_\eta\varphi_{2ijkl}^{(2)} + (1 - {}^8/_7\varkappa + {}^{32}/_{63}\varkappa^2)\,D_\eta\zeta_{1ijkl}^{(2)} + 2D_\eta(e_{ij}e_{kl} - \delta_{[ij}Э_{kl]}) \tag{4.1}$$

$$({}^{15}/_4\langle\mu\rangle^2)S_{ijkl}^0 = 15\mathring{E}_{ijkl} + [5D_\chi + 2(1 - 2\varkappa)(1 - {}^{10}/_7\varkappa)\,D_\eta Э]\delta_{ij}\delta_{kl} - 8(1 - 2\varkappa)\times \\ \times(1 - {}^4/_7\varkappa)\,D_\eta\delta_{[ij}Э_{kl]} + 4(4\varkappa - 1)\,D_{\chi\eta}\,\delta_{[ij}e_{kl]} + (8\varkappa - 5)\,D_\eta e_{ij}e_{kl}$$

Здесь

$$\varphi_{1ijkl}^{(2)} = \delta_{ij}e_{kl} + \delta_{ik}e_{jl} + \delta_{jl}e_{ik} + \delta_{kl}e_{ij} + \delta_{il}e_{jk} + \delta_{jk}e_{il}$$

$$\zeta_{1ijkl}^{(2)} = \delta_{ij}Э_{kl} + \delta_{ik}Э_{jl} + \delta_{jl}Э_{ik} + \delta_{il}Э_{jk} + \delta_{jk}Э_{il} + \delta_{kl}Э_{ij}$$

$$\varphi_{2ijkl}^{(2)} = e_{ij}e_{kl} + e_{ik}e_{jl} + e_{il}e_{jk}, \; Э_{kl} = e_{kn}e_{nl}, \; Э = Э_{kk}$$

Сравнивая выражения для корреляционных функций и для дисперсий, отметим, что если в первом случае искомая величина может быть представлена в виде разложения по δ-символам Кронекера, осредненным девиаторам тензора деформаций и комбинациям направляющих косинусов, определяющих направление между точками, относительно которых ищется корреляционная связь, то во втором случае в разложении направляющие косинусы не участвуют. Поэтому выражения для дисперсий оказываются более простыми, чем для корреляционных функций.

Выражения (4.1) существенно упрощаются, если средние деформации чисто объемные, т. е. когда $\langle\varepsilon_{ij}\rangle = \varepsilon\delta_{ij}$, а $e_{ij} = \beta_{ij} = 0$. В этом случае

$$\overset{\circ}{E}_{ijkl} = {}^1/_{15} D_\chi \delta_{ijkl}, \qquad \delta_{ijkl} = \psi^{(2)}_{0ijkl}$$
$$\overset{\circ}{S}_{ijkl} = {}^4/_{15} \langle\mu\rangle^2 D_\chi (\delta_{ijkl} + 5\delta_{ij}\delta_{kl})$$

В другом частном случае чисто сдвиговых макродеформаций, полагая $\langle\varepsilon_{ij}\rangle = 2e_{12}\delta_{1(i}\delta_{j)2}$, находим

$$\overset{\circ}{E}_{ijkl} = {}^4/_{15} e_{12}^2 D_\eta d^e_{ijkl}, \quad d^e_{ijkl} = 2(1 - {}^6/_7\varkappa + {}^2/_7\varkappa^2)\delta_{ijkl} - \delta_{ij}\delta_{kl} -$$
$$- (1 - {}^{10}/_7\varkappa + {}^8/_{21}\varkappa^2)(\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{kl} + \delta_{ij}\delta_{k3}\delta_{l3}) - (7 - {}^{40}/_7\varkappa + {}^{32}/_{21}\varkappa^2)\delta_{3(i}\delta_{j)(k}\delta_{l)3} +$$
$$+ 4(1 - {}^6/_7\varkappa + {}^4/_{21}\varkappa^2)(2\delta_{i3}\delta_{i3}\delta_{k3}\delta_{l3} - \Sigma\,\delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln}) \qquad (4.2)$$

$$\overset{\circ}{S}_{ijkl} = {}^4/_{15} \langle\mu\rangle^2 e_{12}^2 D_\eta d^s_{ijkl}, \quad d^s_{ijkl} = (3 + {}^8/_7\varkappa + {}^{16}/_7\varkappa^2)\delta_{ijkl} -$$
$$- (3 + {}^8/_7\varkappa - {}^{16}/_7\varkappa^2)\delta_{ij}\delta_{kl} - {}^{32}/_7\varkappa(1 - {}^2/_3\varkappa)(\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{kl} + \delta_{ij}\delta_{k3}\delta_{l3}) -$$
$$- 2(1 + {}^8/_7\varkappa + {}^{16}/_{21}\varkappa^2)\delta_{3(i}\delta_{j)(k}\delta_{l)3} + 2(3 + {}^8/_7\varkappa + {}^{32}/_{21}\varkappa^2) \times$$
$$\times (2\delta_{i3}\delta_{j3}\delta_{k3}\delta_{l3} - \Sigma\,\delta_{in}\delta_{jn}\delta_{kn}\delta_{ln})$$

Из полученных выражений видно, что если макродеформация чисто объемная, то тензоры дисперсий напряжений и деформаций оказываются изотропными, тогда как при чисто сдвиговой деформации в плоскости x_1x_2 симметрия этих тензоров будет тетрагональной с осью симметрии четвертого порядка, направленной по x_3. Таким образом, при объемном деформировании микронеоднородной среды тензоры дисперсии напряжений и деформаций будут иметь по две независимые компоненты, а при сдвиговом — по шесть.

Для оценки знака компонент тензоров d^e_{ijkl} и d^s_{ijkl} удобно перейти к матричным обозначениям. Каждая из матриц d^e_{mn} и d^s_{mn} имеет по шесть независимых компонент, которые согласно равенствам (4.2) равны

$$\begin{aligned}
&d^e_{11} = 1 - {}^{12}/_7\varkappa + {}^{20}/_{21}\varkappa^2, && d^e_{33} = {}^4/_{21}\varkappa^2\\
&d^e_{12} = 1 - {}^{12}/_7\varkappa + {}^4/_7\varkappa^2, && d^e_{13} = -{}^2/_7\varkappa(1 - {}^2/_3\varkappa)\\
&d^e_{44} = 1 - {}^8/_7\varkappa + {}^{16}/_{21}\varkappa^2, && d^e_{66} = 8(1 - {}^6/_7\varkappa + {}^2/_7\varkappa^2) \qquad (4.3)\\
&d^s_{11} = {}^{128}/_{21}\varkappa^2, && d^s_{33} = 4(1 - {}^{24}/_7\varkappa + {}^{64}/_{21}\varkappa^2)\\
&d^s_{12} = {}^{32}/_7\varkappa^2, && d^s_{13} = -{}^{32}/_7\varkappa(1 - {}^5/_3\varkappa)\\
&d^s_{44} = 1 - {}^8/_7\varkappa + {}^{16}/_{21}\varkappa^2, && d^s_{66} = 3 + {}^8/_7\varkappa + {}^{16}/_7\varkappa^2
\end{aligned}$$

Видно, что d^e_{mn} и d^s_{mn} при $m = n$ положительны. Это следует также и из определения этих величин как квадратов отклонений от среднего соответствующих компонент поля. Положительными будут компоненты $d_{12}{}^s$ при любых $\varkappa$, $d_{12}{}^e$ при $\varkappa < {}^3/_2 - 1 / \sqrt{2}$ и $d_{13}{}^s$ при $\varkappa > {}^3/_5$. Наконец, величина $d_{13}{}^e$ оказывается отрицательной при любых $\varkappa$.

Отметим, что аналогичное рассмотрение при продольной деформации микронеоднородной среды приводит к выводу, что в этом случае тензоры $\overset{\circ}{S}_{ijkl}$ и $\overset{\circ}{E}_{ijkl}$ будут обладать трансверсальной изотропией (гексагональная симметрия).

Оценим анизотропию матриц d_{mn}^e и d_{mn}^s при деформации сдвига. Четыре коэффициента анизотропии, характеризующие отклонение структуры матриц от изотропных, могут быть введены соотношениями

$$A_1 = d_{13} / d_{12}, \qquad A_2 = d_{33} / d_{11}$$
$$A_3 = d_{44} / d_{66}, \qquad A_4 = 2d_{66} / (d_{11} - d_{12})$$

Для большинства материалов параметр $\varkappa$ изменяется в пределах $0.7 < \varkappa < 0.8$. Поэтому, полагая $\varkappa = {}^3/_4$, из (4.3) находим, что параметры анизотропии равны — 3, ${}^3/_7$, ${}^4/_{29}$ и ${}^{116}/_3$ для $A_\alpha{}^e$ и ${}^1/_3$, ${}^1/_6$, ${}^1/_9$ и 12 для $A_\alpha{}^s$. Отсюда видно, что тензоры $\overset{\circ}{E}_{ijkl}$ и $\overset{\circ}{S}_{ijkl}$ существенно анизотропны и приближение изотропии (1.1) для деформации сдвига оказывается слишком грубым. Подчеркнем, что особенно большое различие получается для дисперсии напряжений и деформаций в плоскости сдвига. Для них приближение изотропии при $\varkappa = {}^3/_4$ дает заниженные значения в 3.5 и 13 раз соответственно.

Поступила 6 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Корреляционные функции упругого поля квазиизотропных твердых тел. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Новожилов В. В. О связи между математическими ожиданиями тензоров напряжения и деформации в статистически изотропных однородных упругих телах. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
3. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Вычисление бинарных корреляционных функций упругого поля механических смесей. Инж. ж. МТТ, 1968, № 3.