

НАПРЯЖЕНИЯ В СИММЕТРИЧНО-СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЕ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

В. В. Копасенко, М. К. Туебаев

(Ростов-на-Дону, Алма-Ата)

Рассматривается осесимметричное напряженное состояние кусочно-однородной бесконечной пластины, склеенной из параллельных слоев и ослабленной поперечной щелью. Эта задача представляет интерес в связи с некоторыми вопросами расчета прочности горных выработок. Исследование задачи сводится к решению интегрального уравнения относительно функции, характеризующей изменение формы щели. Выделена особенность решения, позволяющая детально изучить поле напряжений, включая кромки и концы щели. Приведены некоторые числовые результаты.

1. Рассмотрим напряженное состояние пластины, жестко склеенной из полос, различающихся между собой упругими характеристиками. Слои предполагаются упругими, изотропными и симметричными относительно среднего слоя как по упругим, так и по геометрическим характеристикам. Средняя полоса разрезана перпендикулярно границе, а сама пластина подвергнута растяжению вдоль слоев (фиг. 1). На контуре щели примем следующие граничные условия:

$$\sigma_x = p(y), \quad \tau_{xy} = 0, \quad x = 0, \quad |y| < 1 \quad (1.1)$$

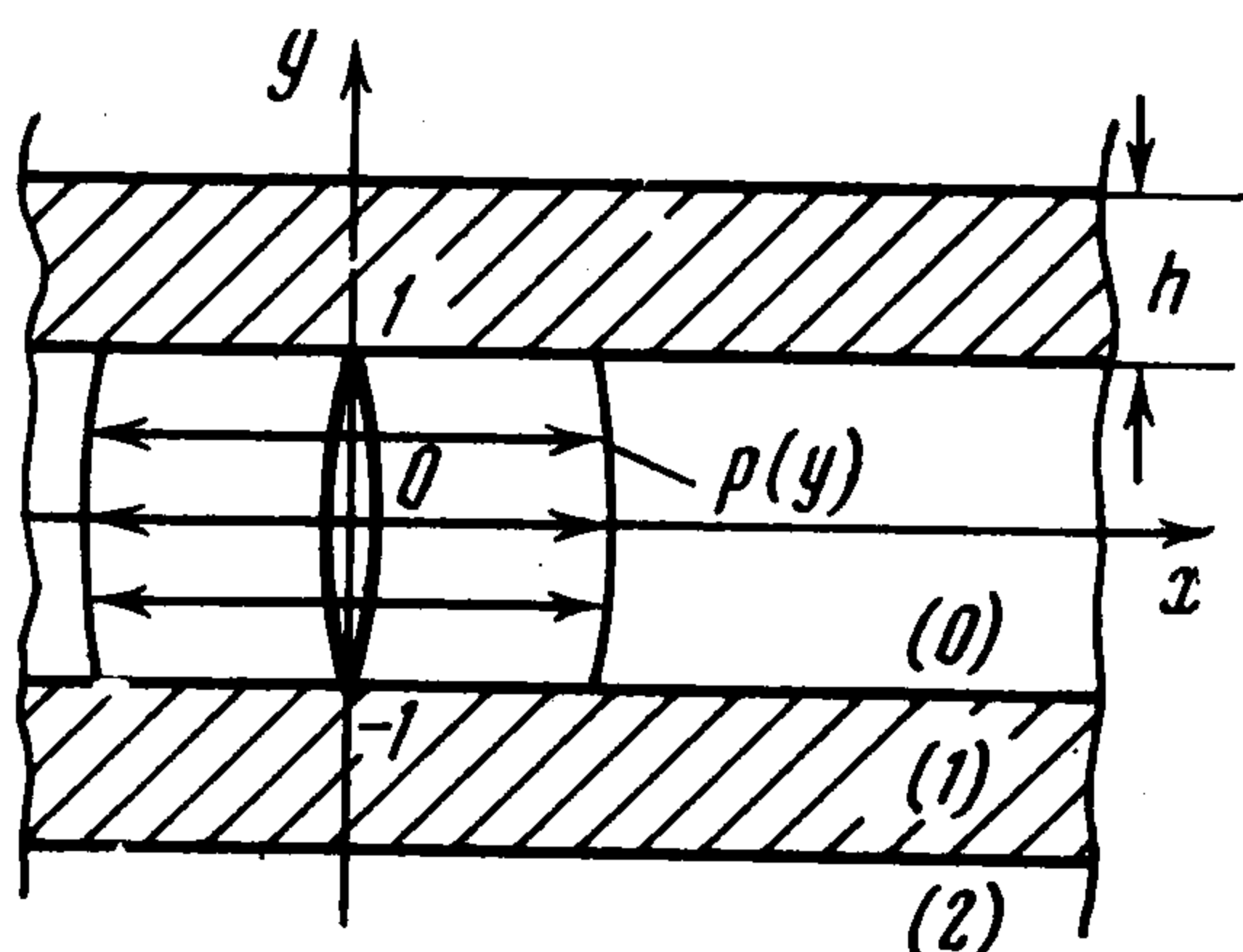
где $p(y)$ — четная функция.

Величины, относящиеся к среднему слою (0), к слоям (1) и к полубесконечным пластинам (2), будем наделять соответственно индексами 0, 1, 2. Учет более общих граничных условий, так же как и добавление слоев между средой (1) и (2), не представляет принципиальных затруднений, а принятая форма задачи облегчает проведение выкладок.

Компоненты напряжений представим в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует напряжениям, вызванным растяжением пластины без разреза, а другое — напряжениям, вызванным наличием щели. Первые можно определить из условия равенства деформаций вдоль слоев

$$C_0 \sigma_{x0}^{\circ} = C_1 \sigma_{x1}^{\circ} = C_2 \sigma_{x2}^{\circ}, \quad \sigma_{yi}^{\circ} = 0, \quad \tau_{xyi}^{\circ} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь $C_i = (1 - \nu_i^2) / E_i$ для плоской деформации и $C_i = 1 / E_i$ для плоско-напряженного состояния, E_i, ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $i = 0, 1, 2$. Вследствие симметрии задачи по обеим координатам



Фиг. 1

рассматриваем, например, лишь правую нижнюю четверть. Дополнительные компоненты напряжений должны исчезать на бесконечности, а на контуре разреза совместно с (1.2) удовлетворять условиям (1.1).

Обозначим через $\Phi_i(x, y)$ функции напряжений. Если воспользоваться результатами работы [1], то после преобразований получим решение для составной полубесконечной пластины $y \leq -1$ в случае, когда на границе $y = -1$ действуют нормальные $\sigma_y = f(x)$ и касательные $\tau_{xy} = g(x)$ нагрузки

$$\pi\Phi_1(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \cos \lambda x (f_1 F_1 + f_2 F_2) \frac{d\lambda}{\lambda^2 D}$$

$$\pi\Phi_2(x, y) = 2\delta \int_0^{\infty} e^{ky} \cos \lambda x [(\varphi_2 - \varphi_1 k) F_1 + (\varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_3 k) F_2] \frac{d\lambda}{\lambda^2 D}$$

Здесь

$$F_1 = \int_0^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad F_2 = \int_0^{\infty} g(t) \sin \lambda t dt$$

$$f_1 = [\varphi_2(a + \delta) - \varphi_1(\delta - c)] \operatorname{sh} k + \varphi_2 \delta \operatorname{ch} k + (\varphi_2 a - \varphi_1 b) k \operatorname{sh} k - (\varphi_2 a + \varphi_1 c) k \operatorname{ch} k$$

$$f_2 = [\varphi_4(a + \delta) - \varphi_3 b] \operatorname{sh} k + (\varphi_4 - \varphi_3) \delta \operatorname{ch} k + (\varphi_4 a + \varphi_3 c) k \operatorname{sh} k - (\varphi_4 a - \varphi_3 b) k \operatorname{ch} k$$

$$D = -\delta^2 + (b^2 - c^2) \sigma^2 - (b^2 - c^2 + 2c\delta) \operatorname{sh}^2 \sigma - b\delta \operatorname{sh} 2\sigma$$

$$\varphi_1 = \delta(A_0 + B_0) + a(B_0 + \sigma A_0 - \sigma B_0)$$

$$\varphi_2 = \delta A_0 + bB_0 + \sigma(bA_0 + cB_0)$$

$$\varphi_3 = -\delta(A_0 + B_0) - a(B_0 - \sigma A_0 + \sigma B_0)$$

$$\varphi_4 = -\delta A_0 - bB_0 + \sigma(bA_0 + cB_0)$$

$$A_0 = \operatorname{ch} \sigma, \quad B_0 = \operatorname{sh} \sigma, \quad \sigma = \lambda h, \quad k = \lambda(y + h + 1)$$

$$a = \beta_1 - \beta_2 + \beta_3, \quad b = 2\beta_3, \quad c = -\beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad \delta = 2\beta_2$$

причем для плоской деформации

$$\beta_1 = \beta_3 \gamma_2 - \gamma_1, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = C_2 / C_1, \quad \gamma_i = \nu_i / (1 - \nu_i)$$

для плоско-напряженного состояния

$$\beta_1 = \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2, \quad \beta_2 = C_1 / C_2, \quad \beta_3 = 1, \quad \gamma_i = \nu_i$$

Решение для полуполосы будем искать в виде

$$\Phi_0(x, y) = L(x, y) + H(x, y)$$

$$H(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \cos \lambda x (A_1 \operatorname{ch} \lambda y + B_1 \lambda y \operatorname{sh} \lambda y) \frac{d\lambda}{\pi \lambda^2} + L_1$$

$$L(x, y) = 2 \int_0^{\infty} \cos s y e^{-sx} (A_2 + B_2 s x) \frac{ds}{\pi s^2} + L_2$$

Здесь $H(x, y)$ — решение для полосы $|y| \leq 1$, $L(x, y)$ — решение для полуплоскости $x \geq 0$, $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $A_2(s)$, $B_2(s)$ — произвольные функции, L_i — произвольные постоянные.

Введем неизвестную функцию на контуре

$$C_0 r(y) = \partial v / \partial x \quad \text{при } x = 0, \quad |y| < 1 \quad (1.3)$$

которая, очевидно, определяется только решением $L(x, y)$ и связана с изменением формы щели. Тогда, удовлетворяя второму из условий (1.1) и учитывая (1.3), найдем, что

$$A_2 = B_2 = \frac{1}{2} R(s), \quad R(s) = \int_0^1 r(t) \sin st \, dt$$

Условие равенства напряжений и перемещений на линии $y = -1$ приводит к системе четырех линейных алгебраических уравнений, относительно неизвестных F_1, F_2, A_1, B_1 , первые два из которых — преобразования Фурье неизвестных контактных усилий. В результате решения этой системы получим

$$F_j = \frac{(-1)^{j+1} D_3}{2\Delta\Delta_0} \{[(\text{sh}^2 \lambda + \Delta_0) a_{1j} - \lambda a_{2j}] s_1 + [(\text{ch}^2 \lambda + \Delta_0) a_{2j} - \lambda a_{1j}] s_2\}, \quad j = 1, 2 \quad (1.4)$$

$$A_1 = \frac{1}{4\Delta_0} [-(4F_1 + s_1)(\text{sh} \lambda + \lambda \text{ch} \lambda) + (4F_2 - s_2)\lambda \text{sh} \lambda]$$

$$B_1 = \frac{1}{4\Delta_0} [(4F_1 + s_1) \text{sh} \lambda - (4F_2 - s_2) \text{ch} \lambda]$$

Здесь

$$s_1 = - \int_{-1}^1 r(t) \eta e^{-\eta} dt, \quad s_2 = \int_{-1}^1 r(t) (1 - \eta) e^{-\eta} dt, \quad \eta = \lambda(1 - t)$$

$$a_{11} = \frac{D_2 f_{22}}{\lambda^2 D} + \frac{2D_3 \text{ch}^2 \lambda}{\Delta_0}, \quad f_{ij} = \left. \frac{\partial^j f_i}{\partial y^j} \right|_{y=-1}$$

$$a_{12} = \frac{D_2 f_{12}}{\lambda^2 D} + \frac{2D_3 \lambda}{\Delta_0} + D_1 - D_3$$

$$a_{21} = \frac{D_2 f_{23}}{\lambda^3 D} + \frac{2D_3 \lambda}{\Delta_0} + D_1 - D_3 - 2D_2$$

$$a_{22} = \frac{D_2 f_{13}}{\lambda^3 D} + \frac{2D_3 \text{sh}^2 \lambda}{\Delta_0}$$

$$\Delta = a_{22} a_{11} - a_{12} a_{21}, \quad \Delta_0 = (\text{sh} 2\lambda + 2\lambda) / 2$$

причем для плоской деформации

$$D_1 = D_3 \gamma_0 - \gamma_1, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = C_0 / C_1$$

для плоско-напряженного состояния

$$D_1 = \gamma_0 - D_2 \gamma_1, \quad D_2 = C_1 / C_0, \quad D_3 = 1$$

При помощи найденного выражения для $\Phi_0(x, y)$ первое из условий (1.1) после ряда преобразований сводится к следующему уравнению:

$$\int_{-1}^1 r(t) \omega(t, y) dt = -2\pi [p(y) - \sigma_{x0}], \quad |y| < 1 \quad (1.5)$$

$$\omega(t, y) = \frac{2t}{t^2 - y^2} + d_1 \left[\frac{1}{2 - y - t} + \frac{1}{2 + y - t} \right] +$$

$$+ (3d_2 + 2) \left[\frac{1 - t}{(2 - y - t)^2} + \frac{1 - t}{(2 + y - t)^2} \right] + d_2 \left[\frac{1 - y}{(2 - y - t)^2} + \frac{1 + y}{(2 + y - t)^2} \right] -$$

$$- 4(d_2 + 1) \left[\frac{(1 - t)(1 - y)}{(2 - y - t)^3} + \frac{(1 - t)(1 + y)}{(2 + y - t)^3} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) t^{2n+1}$$

Здесь

$$d_1 = [4D_3(2b_{11} + b_{12}) / \Delta_1] - 1, \quad d_2 = -4D_3(b_{11} + b_{12}) / \Delta_1$$

$$b_{ij} = a_{ij}(\infty), \quad b_{ii} = 2(D_2 + D_3), \quad b_{ij} = D_1 + D_2 - D_3, \quad i \neq j$$

$$\Delta_1 = b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21}$$

$$H_n(y) = \frac{D_3}{\pi(2n+1)!} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{2n+1} e^{-2\lambda}}{\Delta_0} \left\{ \psi_2 \left[(\lambda - 2n - 1) \left(\frac{e^{-3\lambda} - 4\lambda e^{-\lambda}}{2D_3} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - h_{21} \operatorname{ch} \lambda - h_{11} \operatorname{sh} \lambda \right) + h_{21} \operatorname{ch} \lambda + \frac{\lambda(a_{21} - a_{11})e^{\lambda}}{\Delta \Delta_0} \right] +$$

$$+ \psi_1 \left[(\lambda - 2n - 2) \left(\frac{e^{-3\lambda} - 4\lambda e^{-\lambda}}{2D_3} - h_{22} \operatorname{ch} \lambda - h_{12} \operatorname{sh} \lambda \right) - \right.$$

$$\left. - h_{12} \operatorname{sh} \lambda + \frac{\lambda(a_{22} - a_{12})e^{\lambda}}{\Delta \Delta_0} \right] \right\} d\lambda +$$

$$+ \frac{8D_3}{\pi \Delta_1 (2n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-4\lambda} \lambda^{2n+1} \left\{ (\lambda - 2n - 1) \left[b_{11}(\psi_2 e^{-\lambda} - \psi_4) + \right. \right.$$

$$+ b_{12}(\psi_1 e^{-\lambda} - \psi_3) + \frac{\Delta_1 \psi_4}{4D_3} \left. \right] - (\lambda - 2n - 2) \left[b_{21}(\psi_2 e^{-\lambda} + \psi_4) + \right.$$

$$+ b_{22}(\psi_1 e^{-\lambda} + \psi_3) - \frac{\Delta_1 \psi_3}{4D_3} \left. \right] \right\} d\lambda, \quad \psi_1 = (2 \operatorname{ch} \lambda -$$

$$- \lambda \operatorname{sh} \lambda) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda y, \quad \psi_2 = (\operatorname{sh} \lambda - \lambda \operatorname{ch} \lambda) \operatorname{ch} \lambda y +$$

$$+ \lambda y \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \lambda y, \quad \psi_3 = \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{ch} \lambda y + y \operatorname{sh} \lambda y)$$

$$\psi_4 = -\frac{1}{2} \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{ch} \lambda y + y \operatorname{sh} \lambda y)$$

$$h_{ij} = \frac{a_{ij}}{\Delta \Delta_0} e^{2\lambda} - 16 \frac{\Delta_0}{\Delta_1} e^{-2\lambda} b_{ij}$$

Таким образом, задача сведена к решению интегрального уравнения первого рода относительно неизвестной функции $r(t)$.

2. Методы численного решения уравнений типа (1.5) описаны в [2,3]. Приближенное решение задачи ищем в виде

$$r(t) = \Gamma_0 \left[\frac{(1+t)^{2-p_0}}{(1-t)^{1-p_0}} - \frac{(1-t)^{2-p_0}}{(1+t)^{1-p_0}} \right] + (1-t^2)^{p_0} \sum_{l=1}^M \Gamma_l U_{2l-1}(t) \quad (2.1)$$

Здесь $U_{2l-1}(t)$ — нечетные функции Чебышева второго рода, $0 < p_0 < 1$.

Подставляя (2.1) в (1.5) и вычисляя интегралы перед коэффициентом Γ_0 , приходим к выводу, что для ограниченности σ_x при $x = 0$, $|y| \leq 1$ необходимо выполнение следующего условия:

$$\cos \rho_0 + 2(d_2 + 1) \rho_0^2 + d_1 + d_2 = 0 \quad (2.2)$$

Данное уравнение не зависит от E_2, ν_2 . Корень его $0 < \rho_0 < 1$ определяет характер роста компонентов напряжений на концах щели. Вычисления подтверждают, что такой корень существует и притом единственный для каждого из реальных значений $E_i, \nu_i, i = 0, 1$. Впервые особенность, встречающаяся в уравнении (2.2), была исследована в работе [4] при рассмотрении напряжений у конца трещины на поверхности раздела двух сред.

Для определения неизвестных коэффициентов $\Gamma_0, \Gamma_l (l = 1, 2, \dots, M)$ запишем уравнение (1.5) в узлах коллокации y_l и получим систему линейных алгебраических уравнений. В качестве узлов коллокации выбраны корни полиномов Чебышева первого рода

$$y_l = \cos \frac{(2l-1)\pi}{4(M+1)}, \quad l = 1, 2, \dots, (M+1) \quad (2.3)$$

Здесь $M+1$ — число точек деления отрезка $[0, 1]$.

Интересно отметить, что для однородной пластины ($E_i = E, \nu_i = \nu, \rho_0 = 0.5$) $A_1 = B_1 = 0$; если $p(y) = 0, \sigma_{x_0} = 1$, то $\Gamma_0 = 0.5, \Gamma_l = 0$, а функция напряжений $L(x, y)$ дает для компонентов напряжений квадратуры, полностью совпадающие с известным решением [5] для бесконечной плоскости с прямолинейным разрезом. Следовательно, ряд, входящий в (2.1), представляет собой поправку, обусловленную неоднородностью пластины.

Счет проводился при $M = 11$. Интегралы $H_n(y)$ вычислялись по формуле Симпсона. Остальные интегралы, входящие в (1.5M), выражаются в квадратурах или же представляются через гипергеометрические ряды.

В приведенных ниже примерах рассмотрен случай плоской деформации. Кроме того, предполагается: $\sigma_{x_0} = 0, p(y) = -1, \nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = 0.25$.

В табл. 1 даны значения контурных напряжений σ_y при $E_2 / E_0 = 1, h = 1$ и при разных значениях] отношения E_1 / E_0 (указанных в верхней строке); $\sigma_y = -1$ при $E_1 / E_0 = 1$.

Таблица 1

y	3	5	10	100	1000
0.999	7.440	8.543	8.979	8.931	8.855
0.95	0.325	0.675	0.967	1.262	1.281
0.9	-0.156	0.086	0.298	0.533	0.550
0.8	-0.521	-0.372	-0.233	-0.062	-0.049
0.6	-0.780	-0.702	-0.623	-0.510	-0.501
0.4	-0.879	-0.830	-0.776	-0.689	-0.682
0.2	-0.928	-0.887	-0.844	-0.768	-0.763
0.0	-0.936	-0.903	-0.864	-0.792	-0.787

Положив $E_2 = 0$, $E_1 = E_0$, получим полосу с центральной поперечной щелью. В табл. 2 приведены значения $(-\sigma_y)$ на кромке для разных значений отношения длины щели к ширине полосы $\varepsilon = (1 + h)^{-1}$ (указанных в верхней строке).

Таблица 2

ν	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1
0.999	2.454	1.423	1.130	1.026	1.007
0.95	2.365	1.409	1.127	1.026	1.006
0.9	2.268	1.394	1.126	1.026	1.006
0.8	2.085	1.367	1.122	1.026	1.006
0.6	1.805	1.321	1.116	1.025	1.006
0.4	1.635	1.289	1.111	1.025	1.006
0.2	1.544	1.270	1.108	1.025	1.006
0.0	1.516	1.264	1.107	1.025	1.006

Решение этой задачи путем сведения к интегральному уравнению Фредгольма второго рода приведено в работе [6], где коэффициент интенсивности напряжений определен по формуле (l — полудлина трещины)

$$N = -\frac{E}{2} l^{1/2} (1 - \nu^2)^{-1} \lim_{y \rightarrow 1} [v_x'(x, y) (1 - y)^{1/2}]$$

В рассматриваемом здесь случае

$$N = -\sqrt{2}\Gamma_0$$

Сравнение результатов дает погрешность, не превышающую 0.65% для $\varepsilon \leq 0.5$. Можно сделать вывод, что коэффициенты интенсивности и компоненты напряжений при $\lambda \leq 0.2$ практически не отличаются от таковых для бесконечной плоскости с щелью.

На фиг. 2 показан рост N/N_0 в зависимости от ε . Здесь $N_0 = N|_{\varepsilon=0}$.

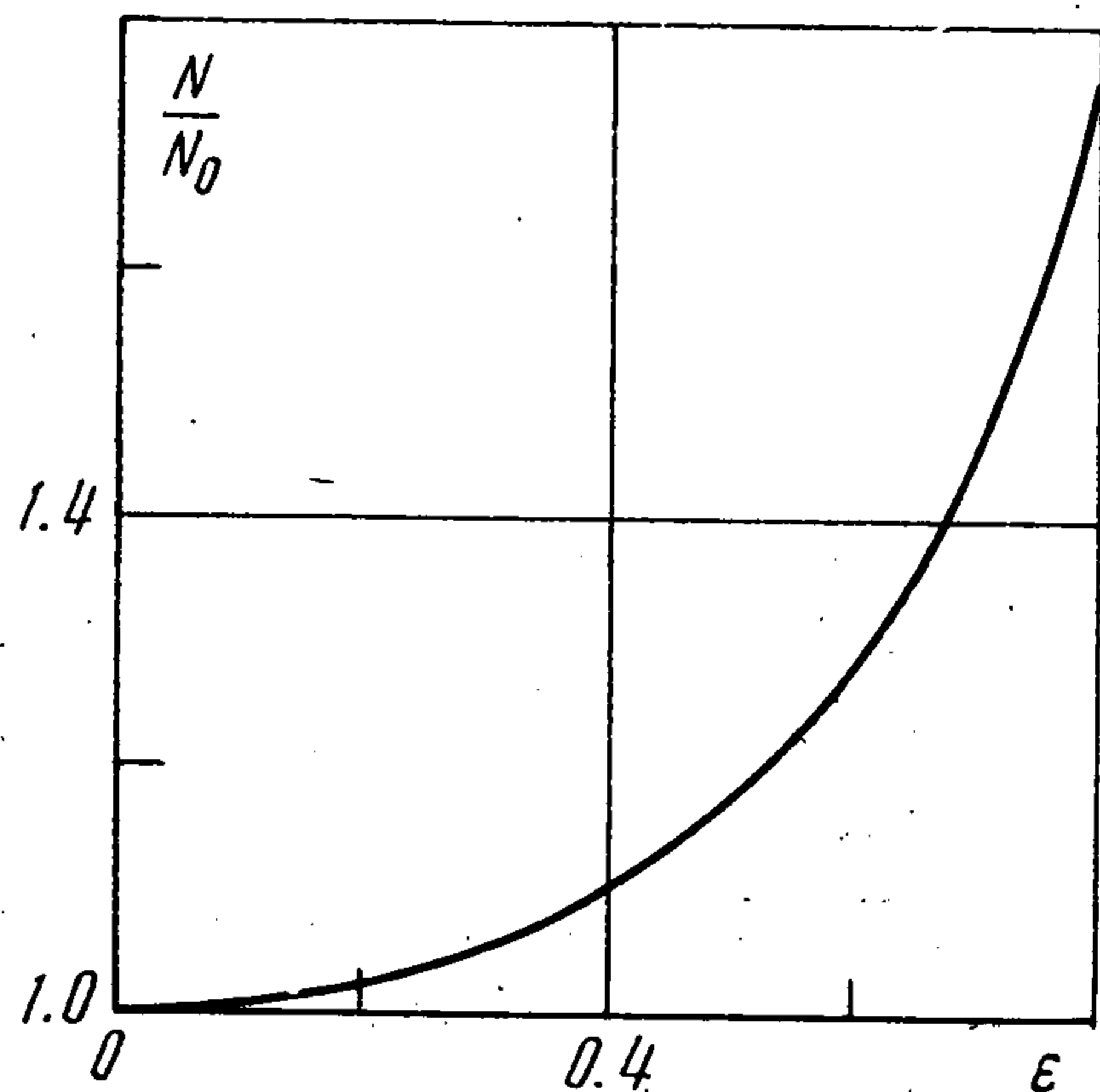
Расчеты показывают высокую степень сходимости метода в случае $E_1 = E_0$. При $E_1 \neq E_0$ сходимость решения несколько хуже, но она почти не зависит от значений отношений жесткостей слоев.

Авторы благодарят И. И. Воровича за ценные указания, сделанные при выполнении работы.

Поступила 3 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И., Сафронов Ю. В., Устинов Ю. А. Прочность колес сложной конструкции. Исследование и расчет. М., «Машиностроение», 1967.
2. Ворович И. И., Копасенко В. В. Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. Копасенко В. В. Изгиб полуполосы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
4. Zak A. R., Williams M. L. Crack point stress singularities at a bimaterial interface. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1963, vol. 30, No. 1, pp. 142—143.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
6. Гольдштейн Р. В., Рысков И. Н., Салганик Р. Л. Центральная поперечная трещина в упругой полосе. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 4.



Фиг. 2