

СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ТРЕЩИН В УПРУГИХ ТЕЛАХ

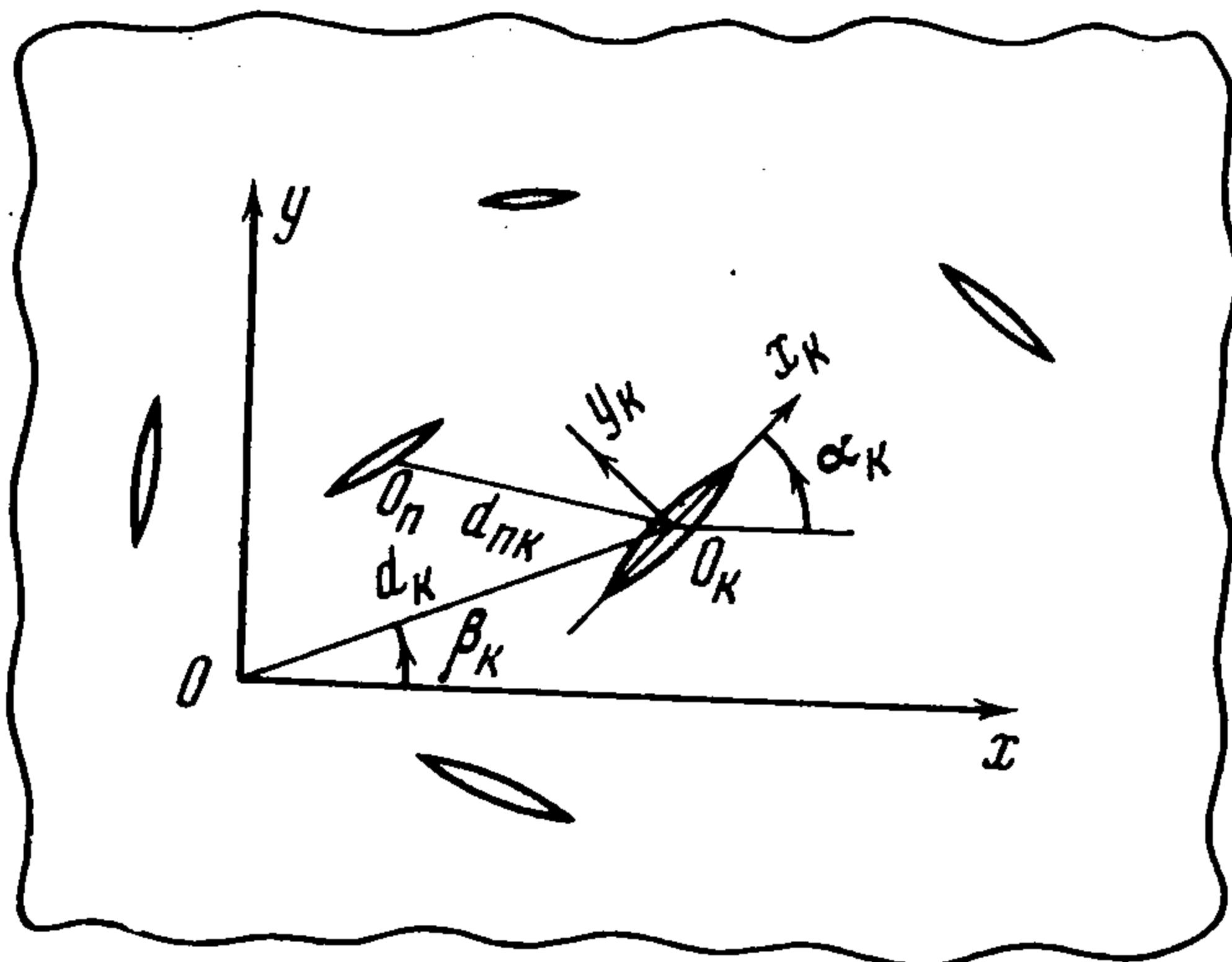
А. П. Дацышин, М. П. Саврук

(Львов)

Плоская задача теории упругости для неограниченной области, содержащей N произвольно расположенных прямолинейных разрезов (трещин), приводится к системе N сингулярных интегральных уравнений относительно функций, характеризующих разрыв перемещений на линиях трещин. Получено общее решение интегральных уравнений для случая далеко размещенных трещин в виде ряда по степеням малого параметра. Рассматривается также проблема разрушения.

В плоской теории трещин имеется ряд исследований, посвященных изучению взаимодействия определенным образом упорядоченных трещин (коллинеарных [1-3], параллельных [4, 5], расположенных в шахматном порядке [6]). Представлением комплексных потенциалов в виде ряда Лорана в работе [7] приближенно определяется напряженное состояние неограниченной пластины, ослабленной системой произвольно ориентированных трещин, при линейном распределении напряжений на бесконечности. Ниже плоская задача теории упругости для бесконечного тела, содержащего произвольно размещенные прямолинейные трещины, в общем случае нагрузки, приводится к системе интегральных уравнений; это позволяет решить ряд новых задач математической теории трещин.

1. Пусть в упругой плоскости, связанной с декартовой системой координат xOy , имеется N разрезов (трещин) длиной $2a_k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Центры трещин O_k определяются координатами $z_{k0} = x_{k0} + iy_{k0} = d_k e^{i\beta_k}$. В точках O_k размещены начала локальных систем координат $x_k O_k y_k$.



Фиг. 1

Оси $O_k x_k$ совпадают с линиями трещин и образуют углы α_k с осью Ox (фиг. 1).

Берега трещин нагружены самоуравновешивающимися усилиями

$$P_k(x_k) = N_k^+ - iT_k^+ = N_k^- - iT_k^- \quad (1.1)$$

$$|x_k| \leq a_k \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

Определение напряженно-деформированного состояния бесконечной плоскости, содержащей одну трещину $|x_k| \leq a_k, y_k = 0$,

сводится к решению сингулярного интегрального уравнения [8, 9]

$$\int_{-a_k}^{a_k} \frac{g_k'(t) dt}{t - x_k} = \pi p_k(x_k), \quad |x_k| \leq a_k$$

относительно функции, характеризующей разрыв перемещений $u(x, 0)$, $v(x, 0)$ на линии трещины (G, κ — упругие постоянные материала)

$$g_k(x_k) = -\frac{2Gi}{1+\kappa} \{i[v_k^+(x_k) - v_k^-(x_k)] + [u_k^+(x_k) - u_k^-(x_k)]\}$$

По известной функции $g_k'(x)$ определим [10] комбинацию напряжений $N_{nk} - iT_{nk}$ на линии $O_n x_n$

$$N_{nk} - iT_{nk} = \frac{1}{\pi} \int_{-a_k}^{a_k} [g_k'(t) K_{nk}(t, x_n) + \overline{g_k'(t)} L_{nk}(t, x_n)] dt$$

$(n = 1, 2, \dots, N, n \neq k)$

$$K_{nk}(t, x) = \overline{S_{nk}(t, x)} + S_{nk}(t, x) e^{2i(\alpha_k - \alpha_n)}$$

$$L_{nk}(t, x) = S_{nk}(t, x) - \frac{S_{nk}^2(t, x)}{S_{nk}(t, x)} e^{2i(\alpha_k - \alpha_n)}$$

$$S_{nk}(t, x) = 1/2 [t - x e^{i(\alpha_k - \alpha_n)} - d_{nk} e^{i(\alpha_k - \beta_{nk})}]^{-1}$$

$$d_{nk} e^{i\beta_{nk}} = d_n e^{i\beta_n} - d_k e^{i\beta_k}$$

Рассматривая напряжения

$$-\sum_{k=1}^N (N_{nk} - iT_{nk})$$

как дополнительную внешнюю нагрузку, приложенную к берегам n -й трещины $|x_n| \leq a_n$, $y_n = 0$, получаем систему N сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $g_n'(x_n)$

$$\int_{-a_n}^{a_n} \frac{g_n'(t) dt}{t-x} + \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} [g_k'(t) K_{nk}(t, x) + \overline{g_k'(t)} L_{nk}(t, x)] dt = \pi p_n(x)$$

$|x| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$ (1.2)

Символ Σ' означает, что при суммировании исключен член с номером строки. Используя формулу обращения интеграла типа Коши [11], приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$g_n'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \left\{ - \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - t^2}}{t-x} p_n(t) dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^N \int_{-a_k}^{a_k} [g_k'(t) M_{nk}(t, x) + \overline{g_k'(t)} R_{nk}(t, x)] dt \right\}, \quad |x| \leq a_n \quad (1.3)$$

$(n = 1, 2, \dots, N)$

Здесь

$$M_{nk}(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} K_{nk}(t, \xi) d\xi,$$

$$R_{nk}(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} L_{nk}(t, \xi) d\xi.$$

Таким образом, плоская задача теории упругости для неограниченного тела с произвольно размещенными прямолинейными трещинами приведена к системе сингулярных интегральных уравнений (1.2), которая в свою очередь преобразована в систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода (1.3). Заметим, что ядра $M_{nk}(t, x)$, $R_{nk}(t, x)$ системы (1.3) могут быть вычислены в замкнутой форме.

Система (1.2) или (1.3) позволяет рассматривать самые различные случаи расположения трещин. В частности, можно найти интегральные уравнения периодической задачи теории трещин. Устремив длину одной из трещин к бесконечности, получим описание напряженного состояния полуплоскости, ослабленной системой произвольно размещенных трещин. В дальнейшем найдем общее решение системы (1.3) в случае далеко расположенных одна от другой трещин. Для близко размещенных или пересекающихся трещин уравнения (1.3) можно решить численно.

2. При больших расстояниях между центрами трещин ядра $M_{nk}(t, x)$, $R_{nk}(t, x)$ имеют разложения

$$\begin{pmatrix} M_{nk}(t, x) \\ R_{nk}(t, x) \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{v=0}^p \begin{pmatrix} a_{nkpv} \\ b_{nkpv} \end{pmatrix} H_{p-v} \left(\frac{x}{a_n} \right) \left(\frac{t}{a_n} \right)^v \left(\frac{\varepsilon_{kn}}{2} \lambda \right)^{p+1} \quad (2.1)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{2a}{d} < 1, \quad a = \max \{a_n\}, \quad d = \min \{d_{nk}\}, \quad \varepsilon_{nk} = \frac{a_k d}{a d_{nk}} \leq 1$$

$$H_p \left(\frac{x}{a_n} \right) = \frac{1}{\pi a_n^{p+1}} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\xi^p \sqrt{a_n^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi \quad (2.2)$$

a_{nkpv} , b_{nkpv} — постоянные коэффициенты

$$\begin{aligned} a_{nk11} &= -1/2 [e^{-2i(\beta_{nk} - \alpha_k)} + e^{2i(\beta_{nk} - \alpha_n)}], \\ a_{nk22} &= -1/2 [e^{-3i(\beta_{nk} - \alpha_k)} + e^{i(3\beta_{nk} - 2\alpha_n - \alpha_k)}] \\ b_{nk11} &= -1/2 [e^{2i(\beta_{nk} - \alpha_k)} + e^{2i(\beta_{nk} - \alpha_n)} - 2e^{2i(2\beta_{nk} - \alpha_k - \alpha_n)}] \\ b_{nk22} &= -1/2 [e^{3i(\beta_{nk} - \alpha_k)} + 2e^{i(3\beta_{nk} - \alpha_k - 2\alpha_n)} - 3e^{i(5\beta_{nk} - 3\alpha_k - 2\alpha_n)}] \\ a_{nk21} &= e^{-i(3\beta_{nk} - 2\alpha_k - \alpha_n)} + e^{3i(\beta_{nk} - \alpha_n)}, \\ a_{nk33} &= -1/2 [e^{-4i(\beta_{nk} - \alpha_k)} + e^{2i(2\beta_{nk} - \alpha_n - \alpha_k)}] \\ b_{nk21} &= 2e^{i(3\beta_{nk} - 2\alpha_k - \alpha_n)} - 3e^{i(5\beta_{nk} - 2\alpha_k - 3\alpha_n)} + e^{3i(\beta_{nk} - \alpha_n)} \\ b_{nk33} &= -1/2 [e^{4i(\beta_{nk} - \alpha_k)} + 3e^{2i(2\beta_{nk} - \alpha_k - \alpha_n)} - 4e^{2i(3\beta_{nk} - 2\alpha_k - \alpha_n)}] \\ a_{nk32} &= 3/2 [e^{-i(4\beta_{nk} - 3\alpha_k - \alpha_n)} + e^{i(4\beta_{nk} - 3\alpha_n - \alpha_k)}] \\ b_{nk32} &= 3 [e^{i(4\beta_{nk} - 3\alpha_k - \alpha_n)} - 2e^{3i(2\beta_{nk} - \alpha_n - \alpha_k)} + e^{i(4\beta_{nk} - \alpha_k - 3\alpha_n)}] \\ a_{nk31} &= -3/2 [e^{4i(\beta_{nk} - \alpha_n)} + e^{-2i(2\beta_{nk} - \alpha_n - \alpha_k)}] \\ b_{nk31} &= -3/2 [3e^{2i(2\beta_{nk} - \alpha_n - \alpha_k)} - 4e^{2i(3\beta_{nk} - 2\alpha_n - \alpha_k)} + e^{4i(\beta_{nk} - \alpha_n)}] \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение системы (1.3) будем искать в виде ряда

$$g_n'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} g_{np}'(x) \lambda^p \quad (2.4)$$

После подстановки (2.1) и (2.4) в (1.3) и приравнивания выражений при одинаковых степенях λ получаем систему уравнений для определения $g_{np}'(x)$

$$g_{n0}'(x) = -\frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \int_{-a_n}^{a_n} \frac{\sqrt{a_n^2 - t^2} p_n(t)}{t - x} dt, \quad g_{n1}'(x) = 0 \quad (2.5)$$

$$g_{np}'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a_n^2 - x^2}} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{p-1} \sum_{v=1}^s H_{s-v} \left(\frac{x}{a_n} \right) \times \\ \times a_n^{-v} \left(\frac{\varepsilon_{kn}}{2} \right)^{s+1} \int_{-a_k}^{a_k} t^v [a_{nksv} g'_{k,p-s-1}(t) + b_{nksv} \overline{g'_{k,p-s-1}(t)}] dt \quad (p = 2, 3, \dots)$$

Зная функции $g_n'(x)$, можем определить напряженно-деформированное состояние плоскости с произвольно ориентированными разрезами. Однако полученное решение (2.4) эффективно только при малых значениях параметра λ , т. е. в случае далеко размещенных одна от другой трещин.

3. Рассмотрим вопрос о предельном равновесии [12] пластины, ослабленной системой N произвольно ориентированных трещин. По известным функциям $g_n'(x_n)$ найдем коэффициенты интенсивности напряжений [13] у вершин любой из трещин

$$k_{1n}^+ - ik_{2n}^+ = \mp \lim_{x_n \rightarrow \pm a_n} \left[\frac{\sqrt{a_n^2 - x_n^2}}{\sqrt{a_n}} g_n'(x_n) \right] \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.1)$$

Здесь величины с верхним знаком относятся к правым вершинам трещин, а с нижним — к левым. На основании формул (2.4), (2.5), (3.1) с точностью до величин $O(\lambda^5)$ запишем значения коэффициентов интенсивности напряжений

$$k_{1n}^+ - ik_{2n}^+ = -\frac{1}{\pi \sqrt{a_n}} \int_{-a_n}^{a_n} \sqrt{\frac{a_n \mp t}{a_n \mp t}} p_n(t) dt \mp \lambda^2 \sqrt{a_n} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_{nk}^2}{4} H_0(\pm 1) \times \\ \times (a_{nk11} Q_{k0} + b_{nk11} \bar{Q}_{k0}) \mp \lambda^3 \sqrt{a_n} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_{nk}^2}{8} [H_0(\pm 1) (a_{nk22} Q_{k1} + b_{nk22} \bar{Q}_{k1}) \varepsilon_{nk} + \\ + \varepsilon_{kn} H_1(\pm 1) (a_{nk21} Q_{k0} + b_{nk21} \bar{Q}_{k0})] \mp \\ \mp \lambda^4 \sqrt{a_n} \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon_{nk}^2}{4} \left\{ -\frac{1}{2} H_0(\pm 1) \sum_{r=1}^N \frac{\varepsilon_{rk}^2}{4} [a_{nk11} (a_{kr11} Q_{r0} + b_{kr11} \bar{Q}_{r0}) + \right. \\ \left. + b_{nk11} (\bar{a}_{kr11} \bar{Q}_{r0} + b_{kr11} Q_{r0})] + \frac{1}{4} [H_2(\pm 1) \varepsilon_{kn}^2 (a_{nk31} Q_{k0} + b_{nk31} \bar{Q}_{k0}) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{nk} \varepsilon_{kn} H_1(\pm 1) (a_{nk32} Q_{k1} + b_{nk32} \bar{Q}_{k1}) + H_0(\pm 1) \varepsilon_{nk}^2 \left(a_{nk33} \frac{Q_{k0} + 2Q_{k2}}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + b_{nk33} \frac{\bar{Q}_{k0} + 2\bar{Q}_{k2}}{2} \right) \right] \left. \right\} + O(\lambda^5) \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (3.2)$$

Здесь

$$Q_{ks} = \frac{1}{\pi a_k^{2+s}} \int_{-a_k}^{a_k} t^s p_k(t) \sqrt{a_k^2 - t^2} dt \quad (3.3)$$

Формулы (3.2) дают решение задачи для произвольной нагрузки (1.1). Если же к берегам трещин в точках $x_k = \xi_k$ приложены сосредоточенные силы, т. е. когда $p_k(x_k) = (P_k - iQ_k) \delta(x_k - \xi_k)$ ($\delta(x)$ — дельта-функция), то в формулах (3.2)

$$Q_{ks} = \frac{P_k - iQ_k}{\pi a_k^{2+s}} \xi_k^s \sqrt{a_k^2 - \xi_k^2}$$

При равномерно распределенной вдоль берегов нагрузке

$$p_k(x_k) = -(p_k - iq_k) = -s_k \quad (3.4)$$

по (3.3) находим

$$Q_{k0} = -\frac{s_k}{2}, \quad Q_{k1} = 0, \quad Q_{k2} = -\frac{s_k}{8}, \dots$$

Заметим, что из соотношения (3.2) можем получить решение задачи для пластины, ослабленной периодической системой трещин. В частности, положив в формулах [(2.2), (2.3), (3.2), (3.4), $a_k = a$, $\alpha_k = \alpha$, $d_{nk} e^{i\beta nk} = (n - k) d g_k(x_k) = g(x_k)$, $s_k = s$ и устремив N к бесконечности, имеем в случае постоянной нагрузки на трещинах

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = \sqrt{a} \left\{ s + \frac{\pi^2 \lambda^2}{24} [s \cos 2\alpha + \bar{s} (e^{-2i\alpha} - e^{-4i\alpha})] + \frac{\pi^4 \lambda^4}{128} \left\{ s \left[\frac{1}{5} \cos 4\alpha + \frac{2}{9} \cos^2 2\alpha + \frac{4}{9} (1 - \cos 2\alpha) \right] + 2\bar{s} (e^{-4i\alpha} - e^{-6i\alpha}) \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{9} e^{2i\alpha} \cos 2\alpha \right) \right\} \right\} + O(\lambda^6) \quad (3.5)$$

Условия предельного равновесия около любой из вершин трещин запишутся в виде [12]

$$f_n(k_{1n}^\pm, k_{2n}^\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^3 \frac{\gamma_n^\pm}{2} \left[k_{1n}^\pm - 3k_{2n}^\pm \operatorname{tg} \frac{\gamma_n^\pm}{2} \right] = \frac{K}{\pi} \quad (3.6)$$

Здесь K — характеристика сопротивления материала распространению трещины, γ_n^\pm — начальные углы распространения трещины.

В общем случае все вершины трещин находятся в разных условиях. Будем считать, что предельно-равновесное состояние в пластине наступает, как только начинается разрушение хотя бы у одной из вершин, т. е. выполняется условие

$$\min \{f_n(k_{1n}^\pm, k_{2n}^\pm)\} = \frac{K}{\pi} \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.7)$$

4. В качестве примера рассмотрим предельное равновесие бесконечной пластины с двумя равными произвольно ориентированными трещинами при двухосном растяжении на бесконечности, т. е. при $N_x^\infty = q$, $N_y^\infty = p$. Положив в формулах (3.2), (3.3), (2.3)

$$N = 2, \quad a_1 = a_2 = a, \quad \beta_{21} = \beta_{12} + \pi = \beta$$

$$p_k(x_k) = -\frac{p}{2} [1 + \eta + (1 - \eta) e^{-2i\alpha k}], \quad \eta = \frac{q}{p}$$

найдем коэффициенты интенсивности напряжений, а по ним — критическое значение внешней нагрузки, при котором начинается разрушение у какой-либо из четырех вершин трещин

$$p_{*n}^{\pm} = \frac{K\sqrt{2}}{\pi \sqrt{a} \cos^3 \gamma_n^{\pm}/2} \left(l_{1n}^{\pm} - 3l_{2n}^{\pm} \operatorname{tg} \frac{\gamma_n^{\pm}}{2} \right)^{-1}$$

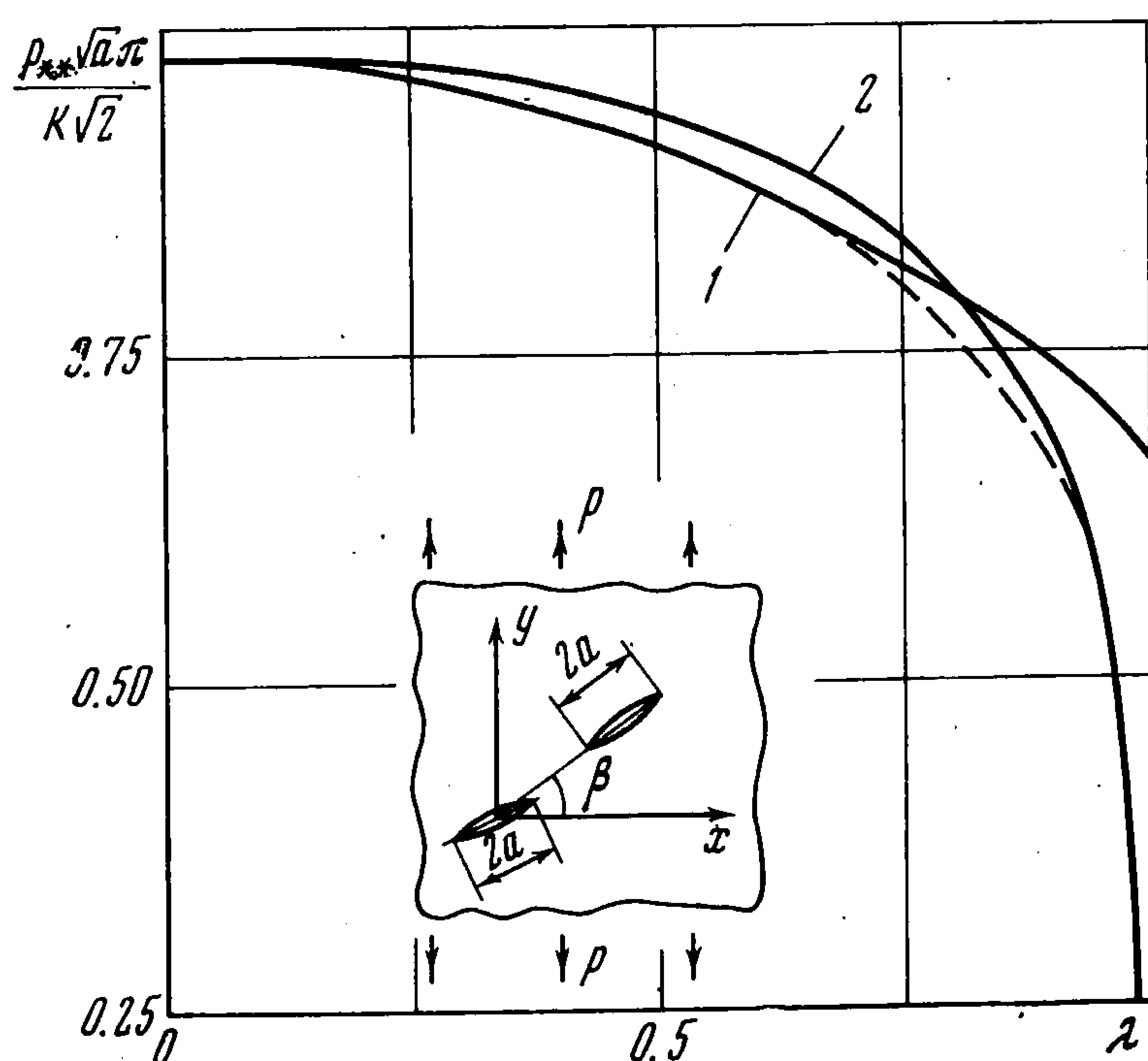
$$l_{1n}^{\pm} - il_{2n}^{\pm} = \frac{1}{p \sqrt{a}} (k_{1n}^{\pm} - ik_{2n}^{\pm}) \quad (n=1, 2)$$

Величина разрушающей нагрузки p_* ($\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda, \eta$) для пластины с трещинами заданной ориентации определяется условием (3.7).

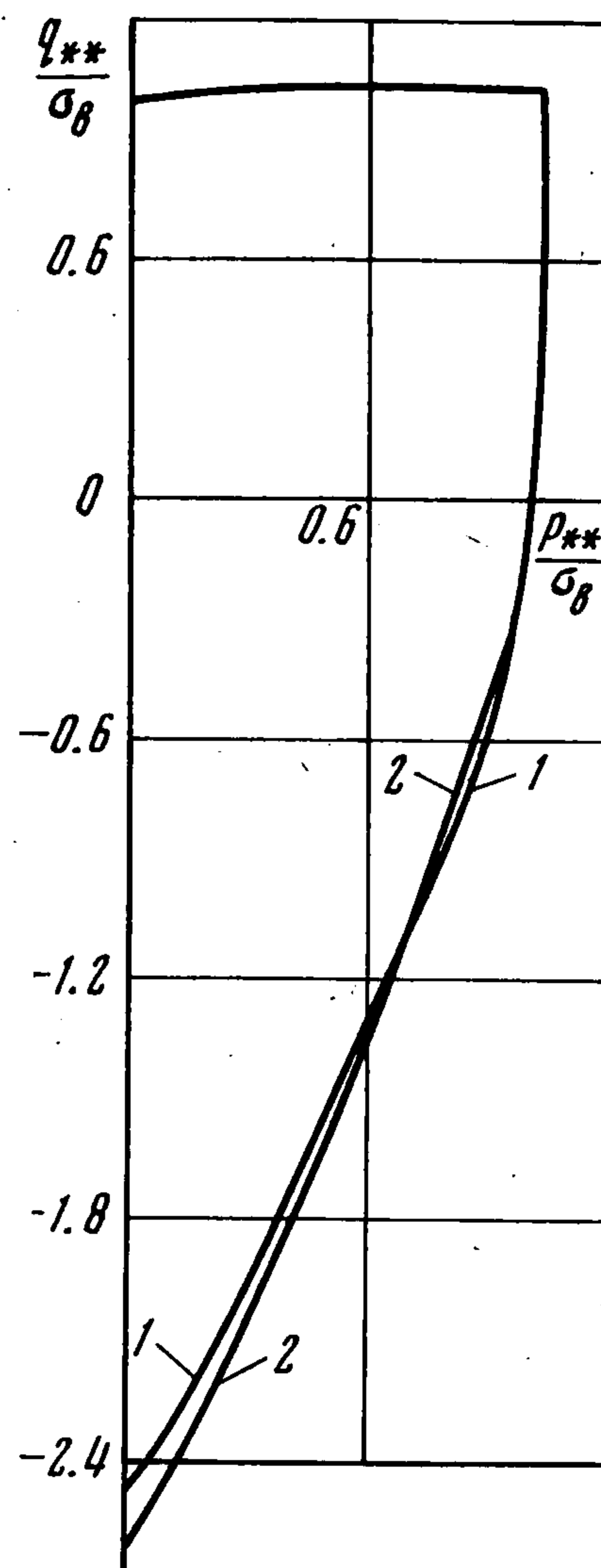
На фиг. 2 приведен график зависимости величины

$$p_{**}(\lambda, \eta) = \min p_*(\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda, \eta), \quad 0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \beta < 2\pi \quad (4.1)$$

от λ (кривая 1) при одноосном растяжении пластины на бесконечности ($\eta = 0$). Кривой 2 характеризуется аналогичная зависимость для пластины с двумя коллинеарными трещинами, полученная на основе точного решения [14]. Для значений $\lambda \rightarrow 1$, построенное выше решение несправедливо; очевидно, что в этом случае минимальная предельная нагрузка $p_{**} \rightarrow 0$. Поэтому можно ожидать, что при $\lambda \geq 0,7$ зависимость p_{**} от λ интерполируется кривой, проведенной штриховой линией. Отсюда следует, что зависимость p_{**} от λ мало отличается



Фиг. 2



Фиг. 3

(в пределах 10%) от соответствующей зависимости для коллинеарных трещин. Аналогичный вывод справедлив и для других значений λ .

На фиг. 3 приведена диаграмма минимальных предельных напряжений p_{**} (4.1), отнесенных к среднему значению технической прочности материала с данным видом дефектов [15] при $\lambda = 0,5$ (кривая 1). Кривой 2 представлена диаграмма для пластины с изолированной трещиной приведенной длины, т. е. длины, при которой минимальные предельные нагрузки при одноосном растяжении пластины с одной и с двумя трещинами равны.

Диаграммы предельных напряжений для пластины, ослабленной коллинеарными трещинами и одной трещиной приведенной длины, совпадают [14], а зависимость

$p_{**}(\lambda, \eta)$ от параметра λ при различных значениях η мало отличается от соответствующей зависимости для случая коллинеарных трещин. Поэтому можно сделать вывод, что диаграмма предельных напряжений при учете взаимодействия различно ориентированных трещин качественно мало изменяется не только в случае далеко, но и в случае близко расположенных трещин.

Поступила 21 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. И в л е в Д. Д. О теории квазихрупкого разрушения. ПМТФ, 1967, № 6.
2. П а р и с П., С и Дж. Анализ напряженного состояния около трещин. Прикладные вопросы вязкости разрушения. М., «Мир», 1968.
3. С а в и н Г. Н., П а н а с ю к В. В. Развитие исследований по теории предельного равновесия хрупких тел с трещинами. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 1.
4. К о й т е р В. Т. Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке. В сб.: Проблемы механики сплошной среды. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1961.
5. Е ч и н а Н. М., П а л ь ц у н Н. В. Упругое равновесие пластины, ослабленной системой трещин. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 7.
6. П а р т о н В. З. Об одной оценке взаимного упрочнения трещин при их шахматном расположении. ПМТФ, 1965, № 5.
7. I s i d a M. Analysis of stress intensity factors for plates containing random array of cracks. Bull. JSME, 1970, vol. 13, No. 59.
8. В и т в и ц к и й П. М., Л е о н о в М. Я. Вопросы механики реального твердого тела, 1962, вып. 1.
9. Л и б а ц к и й Л. Л. Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических усилий в пластинах с трещинами. Физ.-хим. механ. материалов, 1965, т. 1, № 4.
10. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
11. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
12. П а н а с ю к В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев., «Наукова думка», 1968.
13. I r w i n G. R. *Handbuch der Physik.*, Bd 6, Berlin, Springer-Verlag, 1958.
14. Б е р е ж н и ц к и й Л. Т., П а н а с ю к В. В., А р о н е А. Г. К вопросу о взаимодействии трещин, расположенных вдоль одной прямой, Физ.-хим. механ. материалов, 1971, т. 7, вып. 2.
15. Л и б а ц к и й Л. Л., П а н а с ю к В. В. О построении диаграмм предельного равновесия хрупких тел с остроконечными дефектами. ПМТФ, 1970, № 3.