Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.31 : 539.375

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ НА ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

И. А. Кунин, Э. Г. Соснина

(Новосибирск)

Тензорный коэффициент концентрации напряжений, связывающий напряжения на границе неоднородности в анизотропной упругой среде с внешним полем, представлен в виде произведения двух сомножителей. Первый имеет универсальный вид для любой неоднородности и зависит от упругих констант среды и неоднородности и от нормали к поверхности. Его построение сводится к алгебраической операции обращения матрицы третьего порядка. Второй сомножитель в случае эллипсоида — постоянный тензор, который выражается через среднее значение первого сомножителя по поверхности эллипсоида. Явные формулы получены для однородного и линейного внешних полей. Отдельно рассматриваются случаи полости и жесткого включения. Для произвольного полиномиального поля задача сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Исследование полученных выражений существенно упрощается тем, что параметры эллипсоида входят лишь в скалярный множитель под интегралом.

Исследование напряжений на эллипсоидальной полости [1–4] и на эллипсоидальной неоднородности [5] в однородном внешнем поле проводилось в предположении об изотропности внешней упругой среды. Сфероидальная полость в трансверсально-изотропной среде рассмотрена в работе [6]. Некоторые общие соображения о случае анизотропной среды содержатся в [7]. Задача об эллипсоиде в изотропной среде во внешнем линейном поле в [8] сведена к системам алгебраических уравнений, но их решение не было получено. Во всех этих работах рассматривались напряжения вне эллипсоидальной неоднородности, а переход на поверхность осуществлялся лишь в характерных точках (вершинах эллипсоида).

1. Решается задача о концентрации напряжений на поверхности эллипсоидальной неоднородности в анизотропной среде во внешнем полиномиальном поле. Цель работы — представление предельного извне значения тензора напряжений σ_- на границе S эллипсоидальной неоднородности в виде

$$\sigma_-^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n})\,\sigma_0^{\lambda\mu} \tag{1.1}$$

Здесь σ_0 — внешнее полиномиальное поле, $F(\mathbf{n})$ — операторный коэффициент концентрации, $\mathbf{n}$ — нормаль к S.

Построение оператора $F(\mathbf{n})$ удобно производить в два этапа. Сначала находится соотношение

$$\sigma_-^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\rho\tau}(\mathbf{n})\,\varepsilon^+_{\rho\tau}(\mathbf{n}) \tag{1.2}$$

связывающее $\sigma_-(\mathbf{n})$ со значением] деформации $\varepsilon^+(\mathbf{n})$ внутри неоднородности в той же точке границы. Это соотношение справедливо для неоднородности произвольной формы, и вычисление тензорного коэффициента $B(\mathbf{n})$, зависящего от нормали и упругих характеристик неоднородности и внешней среды, сводится к алгебраическим операциям. Соответствующая задача о сопряжении двух сред, которая может представлять также самостоятельный интерес, решается в п. 2.

На следующем этапе (п. 3) строится оператор B^{-1}, преобразующий внешнее поле σ_0 в поле ε^+ внутри неоднородности

$$\varepsilon^+_{\rho\tau} = B^{-1}_{\rho\tau\lambda\mu}\sigma_0^{\lambda\mu} \tag{1.3}$$

Здесь уже существенно используется свойство полиномиальной консервативности эллипсоидальной области [9]. При этом оператор B^{-1} оказывается функционалом коэффициента $B(\mathbf{n})$ (чем объясняется выбор обозначений).

В п. 4 находятся явные выражения операторного коэффициента концентрации

$$F^{\alpha\beta}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\rho\tau}(\mathbf{n})\, B^{-1}_{\rho\tau\lambda\mu} \tag{1.4}$$

для наиболее важных случаев однородного и линейного внешних полей и устанавливаются его некоторые нетривиальные свойства. Вычисление для произвольного внешнего полиномиального поля сводится к квадратурам и решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Рассматриваются предельные случаи полости и жесткого включения.

Конкретные расчеты компонент коэффициента концентрации для некоторых частных случаев анизотропии проводятся в п. 5.

2. Рассмотрим задачу о сопряжении двух сред с тензорами упругих модулей $c_-^{\alpha\beta\lambda\mu}$ и $c_+^{\alpha\beta\lambda\mu}$. Считая, что на (достаточно гладкой) границе раздела S выполнены обычные условия непрерывности смещения и нормального вектора напряжений

$$u_\alpha^- = u_\alpha^+, \qquad n_\alpha\sigma_-^{\alpha\beta} = n_\alpha\sigma_+^{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

найдем выражение для скачка напряжений или деформаций в некоторой точке границы S.

Из непрерывности $\mathbf{u}$ на S следует непрерывность касательной составляющей тензора $\nabla\mathbf{u}$ на S. Вводя операторы проектирования

$$\pi_{\alpha\beta} = n_\alpha n_\beta, \qquad \vartheta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta \tag{2.2}$$

запишем это условие в виде

$$\vartheta_\lambda{}^\rho\partial_\rho u_\mu^- = \vartheta_\lambda{}^\rho\partial_\rho u_\mu^+ \tag{2.3}$$

Преобразуем второе из условий (2.1). Имеем $\sigma \leftrightharpoons c\varepsilon = c\nabla\mathbf{u}$, где замена ε на $\nabla\mathbf{u}$ возможна в силу симметрии тензора упругих модулей. Разлагая $\nabla\mathbf{u}^-$ на сумму нормальной и касательной составляющих, находим

$$n_\alpha c_-^{\alpha\beta\nu\gamma}\pi_\nu{}^\rho\partial_\rho u_\gamma^- + n_\alpha c_-^{\alpha\beta\nu\gamma}\vartheta_\nu{}^\rho\partial_\rho u_\gamma^- = n_\alpha c_+^{\alpha\beta\rho\tau}\,\partial_\rho u_\tau^+ \tag{2.4}$$

Используя (2.3), получим уравнение относительно $\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u}^-$

$$L_-^{\beta\gamma}(\mathbf{n})\, n^\rho\partial_\rho u_\gamma^- = L_-^{\beta\gamma}(\mathbf{n})\, n^\rho\partial_\rho u_\gamma^+ + n_\nu\,[c^{\nu\beta\rho\tau}]\,\partial_\rho u_\tau^+ \tag{2.5}$$

Здесь

$$L_-^{\beta\gamma}(\mathbf{n}) = c_-^{\alpha\beta\nu\gamma}n_\alpha n_\nu, \qquad [c^{\nu\beta\rho\tau}] = c_+^{\nu\beta\rho\tau} - c_-^{\nu\beta\rho\tau} \tag{2.6}$$

Применяя к обеим частям (2.5) матрицу $G^-(\mathbf{n})$, обратную $L_-(\mathbf{n})$ (матрица $G^-(\mathbf{n})$ существует в силу положительной определенности упругой энергии), разрешим (2.5) относительно $\mathbf{n}\cdot\nabla\mathbf{u}^-$. Умножая затем полученный результат тензорно на $\mathbf{n}$, найдем

$$\pi_\lambda{}^\rho\partial_\rho u_\mu{}^- = \pi_\lambda{}^\rho\partial_\rho u_\mu{}^+ + n_\lambda G^-_{\mu\beta}(\mathbf{n})\, n_\nu\, [c^{\nu\beta\rho\tau}]\, \partial_\rho u_\tau{}^+ \tag{2.7}$$

Складывая с (2.3) и симметризуя по индексам $\lambda\mu$, имеем

$$[\varepsilon_{\lambda\mu}] = \varepsilon^+_{\lambda\mu} - \varepsilon^-_{\lambda\mu} = -K^-_{\lambda\mu\nu\eta}\,[c^{\nu\eta\rho\tau}]\,\varepsilon^+_{\rho\tau} = -K^+_{\lambda\mu\nu\eta}\,[c^{\nu\eta\rho\tau}]\,\varepsilon^-_{\rho\tau} \tag{2.8}$$

$$K^{\pm}_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathbf{n}) = [n_\lambda G^{\pm}_{\mu\eta}(\mathbf{n})\, n_\nu]_{(\lambda\mu)\,(\nu\eta)} \tag{2.9}$$

Круглые скобки указывают на симметризацию по соответствующим индексам.

Из (2.8) получаем также выражение для скачка напряжений $[\sigma]$ на S и искомое соотношение (1.2). В дальнейшем знаки минус и плюс будут относиться соответственно к внешней среде и неоднородности с тензорами упругих модулей c_0 и $c_0 + c_1$. Тогда из второго равенства (2.6) и (2.8) для коэффициента $B(\mathbf{n})$, входящего в (1.2), имеем

$$B^{\alpha\beta\rho\tau}(\mathbf{n}) = c_0^{\alpha\beta\rho\tau} + c_0^{\alpha\beta\lambda\mu}\,\overset{\circ}{K}_{\lambda\mu\nu\eta}(\mathbf{n})\, c_1^{\nu\eta\rho\tau} \tag{2.10}$$

Здесь тензор $K_0(\mathbf{n})$ связан с тензором $G_0(\mathbf{n}) = L_0^{-1}(\mathbf{n})$ соотношением (2.9). В свою очередь $L_0(\mathbf{n})$ определяется первым равенством (2.6), в котором следует заменить c_- на c_0.

Для дальнейшего существенное значение имеет связь $G_0(\mathbf{n})$ с тензором Грина $G_0(\mathbf{x})$ неограниченной однородной среды. Пусть $G_0(\mathbf{k})$ — фурье-образ тензора Грина $G_0(\mathbf{x})$ (см., например, [10]). Тогда можно показать, что $G_0(\mathbf{n})$ совпадает со значением $G_0(\mathbf{k})$ на единичной сфере $|\mathbf{k}| = 1$, т. е. при $\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$.

Наиболее простой вид $G_0(\mathbf{n})$ и $K_0(\mathbf{n})$ имеют в случае изотропной среды (с коэффициентами Ляме λ_0, μ_0). В частности

$$\overset{\circ}{K}_{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n}) = \left[-\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0(\lambda_0+2\mu_0)}\, n_\alpha n_\beta n_\lambda n_\mu + \frac{1}{\mu_0}\, n_\alpha n_\lambda \delta_{\beta\mu}\right]_{(\alpha\beta)\,(\lambda\mu)} \tag{2.11}$$

Приведем также формулы скачка деформации $[\varepsilon]$ на границе раздела двух изотропных сред для случая, когда ось x^3 совпадает с нормалью $\mathbf{n}$

$$[\varepsilon_{11}] = [\varepsilon_{12}] = [\varepsilon_{22}] = 0, \qquad [\varepsilon_{13}] = -\frac{[\mu]}{\mu^-}\,\varepsilon_{13}{}^+, \qquad [\varepsilon_{23}] = -\frac{[\mu]}{\mu^-}\,\varepsilon_{23}{}^+$$

$$[\varepsilon_{33}] = -\frac{1}{\lambda^- + 2\mu^-}\,\{[\lambda]\,(\varepsilon^+_{11} + \varepsilon^+_{22} + \varepsilon^+_{33}) + 2\,[\mu]\,\varepsilon^+_{33}\} \tag{2.12}$$

Отметим, что в этом простейшем случае формулы для $[\varepsilon]$ могут быть получены непосредственно при помощи очевидных рассуждений. Из первого условия (2.1) следует, как уже указывалось выше, непрерывность касательной составляющей тензора $\nabla\mathbf{u}$. В выбранной системе координат это означает непрерывность шести компонент $\partial_\alpha u_\beta$ с индексами 1β и 2β и, следовательно, трех компонент ε_{11}, ε_{12} и ε_{22} деформации.

Из второго условия (2.1) вытекает непрерывность трех компонент напряжения σ^{13}, σ^{23} и σ^{33}. Используя полученные условия на σ и ε, а также закон Гука для изотропной среды, находим выражения (2.12) для $[\varepsilon]$, а также аналогичные формулы для $[\sigma]$.

Замечание. Соотношения для скачка напряжений и деформации являются следствием условий сопряжения (2.1), но им не эквивалентны, так как выполняются при более слабых предположениях. В частности, для рассмотренного случая изотропных сред компонента u_3 может иметь скачок на границе раздела.

3. Перейдем к основной задаче построения оператора B^{-1}, входящего в (1.3). Будем рассматривать неограниченную среду с тензором упругих модулей $c(\mathbf{x}) = c_0 + c_1 V(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}(x^1, x^2, x^3)$ — точка среды, c_0 и c_1 — постоянные тензоры, $V(\mathbf{x})$ — характеристическая функция эллипсоида (равная единице внутри и нулю вне эллипсоида). Декартова система координат связана с полуосями a^α ($\alpha = 1, 2, 3$) эллипсоида, заданного уравнением [1]

$$\mathbf{x}a^{-2}\mathbf{x} = x^\alpha (a^{-2})_{\alpha\beta} x^\beta = 1, \qquad a^{\alpha\beta} = a^\alpha \delta^{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

Считаются известными напряжения или смещения на бесконечности и (в общем случае отличные от нуля) внешние силы $\mathbf{q}(\mathbf{x})$. Уравнение для смещения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$-\partial_\beta \left[c^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{x})\, \partial_\lambda u_\mu(\mathbf{x})\right] = q^\alpha(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

или в компактных обозначениях

$$L\mathbf{u} = \mathbf{q}, \qquad L = -\nabla c \nabla \tag{3.3}$$

Понимаемое в смысле обобщенных функций, это уравнение автоматически обеспечивает выполнение условий сопряжения (2.2) на границе S эллипсоидальной неоднородности, если предолагать, что $\mathbf{q}$ не имеет на S сингулярностей типа простого и двойного слоя.

Для дальнейшего целесообразно свести задачу к интегральному уравнению. Положим $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, где $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ — внешнее поле, т. е. поле, которое существовало бы в однородной среде ($c_1 = 0$) при заданных внешних силах $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ и условиях на бесконечности, $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ — возмущение, вызванное неоднородностью. Тогда $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению

$$(L_0 + L_1)\mathbf{u}_1 = -L_1\mathbf{u}_0, \quad L_0 = -\nabla c_0 \nabla, \quad L_1 = -\nabla c_1 \nabla \tag{3.4}$$

так как $L_0\mathbf{u}_0 = \mathbf{q}$. Очевидно, $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \infty$.

Правая часть уравнения для $\mathbf{u}_1$ имеет на S сингулярность типа простого слоя. Из теории потенциала следует, что в этом случае $\mathbf{u}_1$ непрерывно, а $\varepsilon_1 = \operatorname{def} \mathbf{u}_1$ (def — оператор деформации) имеет на S скачок, обеспечивающий непрерывность нормального вектора напряжений.

Пусть $G_0 = L_0^{-1}$—оператор Грина однородной среды, ядро которого— тензор Грина $G_{\alpha\beta}^\circ(\mathbf{x})$. Применяя оператор $\operatorname{def} G_0$ к обеим частям (3.4) и учитывая симметрию тензоров c_0 и c_1, получаем интегральное уравнение

[1] Здесь и в дальнейшем по одинаковым верхним (или нижним) индексам суммирование не проводится.

относительно $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0(\mathbf{x}) + \varepsilon_1(\mathbf{x})$

$$\varepsilon + K_0 c_1 \varepsilon = \varepsilon_0, \quad K_0 \doteq -\operatorname{def} G_0 \operatorname{def} \tag{3.5}$$

Здесь интегральный оператор K_0 имеет ядро

$$\overset{\circ}{K}_{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = -\,[\partial_\alpha \partial_\lambda \overset{\circ}{G}_{\beta\mu}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]_{(\alpha\beta)\,(\lambda\mu)} \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) эквивалентно (3.4) и в силу кусочной непрерывности ε может быть записано в виде системы

$$\varepsilon^+ + K_0{}^+ c_1 \varepsilon^+ = \varepsilon_0{}^+ \tag{3.7}$$

$$\varepsilon^- = \varepsilon_0{}^- - K_0 c_1 \varepsilon^+ \tag{3.8}$$

Здесь $K_0{}^+ = VK_0V$ — сужение оператора K_0 на эллипсоидальную область V. Первое уравнение определяет деформацию ε^+ внутри, а второе — продолжение решения на дополнение к V. Существование и единственность решения (3.7) непосредственно вытекают из существования и единственности решения эквивалентного уравнения (3.4), откуда следует существование оператора

$$B^{-1} = (c_0 + c_0 K_0{}^+ c_1)^{-1} \tag{3.9}$$

Возможность явного построения оператора B^{-1} для эллипсоидальной области V основана на том, что она обладает свойством полиномиальной консервативности (p-свойством): если внешнее поле $\sigma_0(\mathbf{x})$ в окрестности V — полином то индуцированное внутри V поле $\varepsilon^+(\mathbf{x})$ — полином той же степени. Для частного случая однородного внешнего поля это свойство доказано в [5, 7], а для общего случая— в [9]. В работе [9] показано, что вычисление ε^+ для произвольного внешнего полиноминального поля сводится к квадратурам и решению конечной системы линейных алгебраических уравнений.

Согласно p-свойству, внешнее однородное поле σ_0 индуцирует внутри V однородное поле ε^+ и, следовательно, в этом случае оператор B^{-1} — постоянный четырехвалентный тензор, который обозначим через $B_0{}^{-1}$, т. е.

$$\sigma_0 = B_0 \varepsilon^+ \tag{3.10}$$

Чтобы найти B_0, проинтегрируем (3.7) по области V. Учитывая, что $\varepsilon_0{}^+$, ε^+ и c_1 — постоянные тензоры и обозначая через v объем эллипсоида, имеем

$$\varepsilon^+ + \left[\frac{1}{v}\iint V(\mathbf{x})\,V(\mathbf{x}')\,K_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}d\mathbf{x}'\right] c_1 \varepsilon^+ = \varepsilon_0 \tag{3.11}$$

Для вычисления входящего сюда интеграла сделаем замену переменных $\mathbf{x} = a\mathbf{y}$, где матрица a задается выражением (3.1). Тогда

$$\iint V(\mathbf{x})\,V(\mathbf{x}')\,K_0(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,d\mathbf{x}d\mathbf{x}' = |\det a|^2 \iint V(a\mathbf{y})\,V(a\mathbf{y}')\,K_0[a(\mathbf{y}-\mathbf{y}')]\,d\mathbf{y}d\mathbf{y}'$$

Используя формулу Парсеваля, сведем двойной интеграл к однократному

$$\iint V'(\mathbf{y})\,V'(\mathbf{y}')\,K_0'(\mathbf{y}-\mathbf{y}')\,d\mathbf{y}d\mathbf{y}' = \frac{1}{8\pi^3}\int V'^2(\mathbf{k})\,K_0'(\mathbf{k})\,d\mathbf{k} \tag{3.12}$$

где $V'(\mathbf{k})$ и $K_0'(\mathbf{k})$ — фурье-образы $V'(\mathbf{y}) = V(a\mathbf{y})$ и $K_0'(\mathbf{y}) = K_0(a\mathbf{y})$.

Так как $V'(\mathbf{y})$ — характеристическая функция единичной сферы, ее фурье-образ $V'(\mathbf{k})$ зависит только от $|\mathbf{k}|$. Непосредственным вычислением находим

$$V'(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}|^3}(\sin|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}|\cos|\mathbf{k}|) \tag{3.13}$$

Функция $K_0'(\mathbf{y})$ — однородная нулевой степени и, следовательно, $K_0'(\mathbf{k})$ зависит лишь от единичного вектора $\omega = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$

$$K_0'(\mathbf{k}) = |\det a|^{-1} K_0(a^{-1}\mathbf{k}) = |\det a|^{-1} K_0(a^{-1}\omega) \tag{3.14}$$

Это позволяет в (3.12) провести интегрирование раздельно по $|\mathbf{k}|$ и по ω. Для интеграла по единичной сфере в силу однородности $K_0(\mathbf{k})$ имеем

$$\int K_0(a^{-1}\omega)\, d\omega = \int K_0\left(\frac{a^{-1}\omega}{|a^{-1}\omega|}\right) d\omega = |\det a| \int K_0(\mathbf{n})\, \rho^3(\mathbf{n})\, d\mathbf{n} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{n} = \frac{a^{-1}\omega}{|a^{-1}\omega|}, \qquad \rho(\mathbf{n}) = \frac{1}{|a\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{n}a^2\mathbf{n}}} \tag{3.16}$$

Введем обозначения. Пусть f — функция, заданная на эллипсоиде S. Точка $\mathbf{x}$ эллипсоида и нормаль к нему $\mathbf{n}$ связаны соотношениями

$$\mathbf{x} = \frac{a^2\mathbf{n}}{\sqrt{\mathbf{n}a^2\mathbf{n}}}, \qquad \mathbf{n} = \frac{a^{-2}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}a^{-4}\mathbf{x}}} \tag{3.17}$$

и, следовательно, f можно рассматривать как функцию нормали $\mathbf{n}$. Определим среднее значение $f(\mathbf{n})$ выражением

$$\langle f(\mathbf{n})\rangle = \frac{|\det a|}{4\pi}\int f(\mathbf{n})\, \rho^3(\mathbf{n})\, d\mathbf{n} \tag{3.18}$$

где $\rho(\mathbf{n})$ дается соотношением (3.16).

Искомый тензор B_0, связывающий σ_0 и ε^+ в (3.10), можно тогда представить в виде среднего значения по эллипсоиду от тензора $B(\mathbf{n})$, который определяется задачей сопряжения. Действительно, умножая (3.11) слева на c_0 и выполняя интегрирование при учете (3.12), (3.13), (3.15) и (3.18), окончательно находим

$$B_0^{\alpha\beta\lambda\mu} = \langle B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n})\rangle \tag{3.19}$$

Предельным случаям полости и жесткого включения соответствуют $c_1 = -c_0$ и $c_1 \to \infty$. Можно показать, что B_0^{-1} существует для обоих этих случаев.

Пусть теперь внешнее поле линейно, т. е. $\sigma_0^{\lambda\mu} = d^{\lambda\mu\tau}x_\tau$. На основании p-свойства $\varepsilon_{\alpha\beta}^+(\mathbf{x})$ — линейная однородная функция: $\varepsilon_{\alpha\beta}^+(\mathbf{x}) = b_{\alpha\beta\nu}x^\nu$. Оператор B^{-1} в этом случае сводится к постоянному шестивалентному тензору, связывающему постоянные тензоры b и d (симметричные по первой паре индексов). Эту связь удобно представить в виде

$$d^{\lambda\mu\tau} = 3B_1^{\lambda\mu\tau\alpha\beta\eta}(a^2)_\eta{}^\nu b_{\alpha\beta\nu} \tag{3.20}$$

Для нахождения B_1 умножим уравнение (3.7) тензорно на $\mathbf{x}$ и проинтегрируем по V. Вычисления, аналогичные проведенным выше для однородного поля, дают

$$B_1^{\alpha\beta\eta\lambda\mu\tau} = \langle \rho(\mathbf{n})\, n^\eta B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n})\, n^\tau \rho(\mathbf{n})\rangle \tag{3.21}$$

Очевидно, тензор B_1 симметричен внутри каждой пары индексов $\alpha\beta$, $\lambda\mu$, $\eta\tau$.

Сравнение (3.19) и (3.21) показывает, что B_0 и B_1 могут быть интерпретированы как соответствующие моменты $B(\mathbf{n})$.

Отметим, что в отличие от случая однородного внешнего поля переход к полости требует некоторой осторожности при обращении тензора B_1. Это связано с формальным существованием внешних линейных полей $\sigma_0(\mathbf{x})$ (не удовлетворяющих условию равновесия $\operatorname{div}\sigma = 0$), которые не возмущаются неоднородностью. В случае полости тензор B_1^{-1} существует лишь на подпространстве, не включающем таких полей. Подробное исследование этого вопроса здесь не проводится.

Если $\sigma_0(\mathbf{x})$ — полином более высокой степени, то рассмотренные в [9] свойства оператора K_6^+ позволяют найти из интегрального уравнения (3.7) рекуррентные линейные алгебраические уравнения, связывающие коэффициенты полиномов $\sigma_0(\mathbf{x})$ и $\varepsilon^+(\mathbf{x})$, и аналогично приведенным выше случаям построить явное выражение для оператора B.

4. Операторный коэффициент концентрации $F(\mathbf{n})$ определяется соотношением (1.1) и, согласно (1.4), выражается через тензор $B(\mathbf{n})$ и оператор B^{-1}.

Пусть внешнее поле однородно. Тогда, как показано выше, оператор B^{-1} в (1.4) совпадает с постоянным тензором B_0^{-1} и коэффициент концентрации $F_0(\mathbf{n})$ — четырехвалентный тензор

$$F_{0\cdot\cdot\lambda\mu}^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) \doteq B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\mathbf{n})\, \langle B(\mathbf{n})\rangle^{-1}_{\sigma\tau\lambda\mu} \tag{4.1}$$

Это представление особенно удобно для исследования зависимости коэффициента концентрации от формы эллипсоида. Действительно, локальная зависимость $F_0(\mathbf{n})$ от нормали к эллипсоиду (или, что то же, от точки) дается первым сомножителем $B(\mathbf{n})$, который не зависит от параметров эллипсоида и всегда остается конечным. Основной вклад в концентрацию напряжений дает второй сомножитель B_0^{-1}, имеющий особенность в случае предельного перехода к трещине.

Из (3.18) и (3.19) следует, что вся зависимость B_0 от параметров эллипсоида сосредоточена в скалярном весовом множителе $\rho(\mathbf{n})$. Это обстоятельство весьма существенно, так как позволяет для произвольной анизотропной среды провести полное исследование концентрации напряжений в предельных случаях эллипсоидальной трещины и иглы, разлагая $\rho(\mathbf{n})$ в ряд по малому параметру.

Для средних значений $\langle F_0(\mathbf{n})\rangle$ и $\langle \sigma_-(\mathbf{n})\rangle$ имеет место любопытное соотношение. Из (3.19) и (4.1) находим

$$\langle F_0(\mathbf{n})\rangle = I_0 \tag{4.2}$$

где I_0 — единичный четырехвалентный тензор.

Из (1.1) тогда следует, что

$$\langle \sigma_-(\mathbf{n})\rangle = \sigma_0 \tag{4.3}$$

Для жесткого включения нужно положить $c_1 \to \infty$. В пределе имеем

$$F_0(\mathbf{n}) = c_0 K_0(\mathbf{n}) \langle c_0 K_0(\mathbf{n}) \rangle^{-1}$$

Рассмотрим линейное внешнее поле $\sigma_0{}^{\lambda\mu}(\mathbf{x}) = d^{\lambda\mu\tau} x_\tau$. Можно показать, что $d^{\lambda\mu\tau} = 3\langle \sigma_0{}^{\lambda\mu}(\mathbf{n})\, n^\tau \rho(\mathbf{n}) \rangle$. Тогда, учитывая соотношения (1.2), (3.20) и (3.21), а также связь (3.14) между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{n}$ на границе эллипсоида, находим

$$\sigma_-^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = \rho(\mathbf{n})\, n^\nu F_{1\cdot\cdot\nu\lambda\mu\tau}^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) \langle \sigma_0^{\lambda\mu}(\mathbf{n})\, n^\tau \rho(\mathbf{n}) \rangle \tag{4.4}$$

$$F_{1\cdot\cdot\nu\lambda\mu\tau}^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\varkappa\rho}(\mathbf{n}) \langle \rho(\mathbf{n})\, \mathbf{n} B(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle^{-1}_{\varkappa\rho\nu\lambda\mu\tau}$$

В частности, для жесткого включения

$$F_1(\mathbf{n}) = c_0 K_0(\mathbf{n}) \langle \rho(\mathbf{n})\, \mathbf{n} c_0 K_0(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle^{-1}$$

Для средних значений $\langle \rho(\mathbf{n})\, \mathbf{n} F_1(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle$ и $\langle \sigma_-(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle$ справедливы формулы, аналогичные (4.2) и (4.3). Согласно (4.4), имеем

$$\langle \rho(\mathbf{n})\, \mathbf{n} F_1(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle = I_1$$

$$\langle \sigma_-(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle = \langle \sigma_0(\mathbf{n})\, \mathbf{n}\rho(\mathbf{n}) \rangle$$

где I_1 — единичный шестивалентный тензор.

5. В качестве примера вычислим коэффициент концентрации $F_0(\mathbf{n})$ для эллипсоидальной полости во внешнем однородном поле. Рассмотрим простейший случай анизотропии, который получается растяжением по трем осям эллипсоида, т. е.

$$c_0^{\alpha\beta\lambda\mu} = \mu_0 (g^{\alpha\lambda} g^{\beta\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda}) + \frac{2\mu_0 \nu_0}{1 - 2\nu_0} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\mu}$$

$$g = h^2, \qquad h^{\alpha\beta} = h^\alpha \delta^{\alpha\beta} \tag{5.1}$$

Здесь ν_0 — коэффициент Пуассона.

Сделаем преобразование координат, положив $\mathbf{x}' = h^{-1}\mathbf{x}$. Тогда тензор упругих констант c_0' будет совпадать с изотропным, а уравнение эллипсоида примет вид

$$\mathbf{x}' b^{-2} \mathbf{x}' = 1, \qquad b^{-2} = h a^{-2} h$$

Таким образом, достаточно вычислить коэффициент концентрации $F_0'(\mathbf{n}')$ для изотропной среды. Компоненты $F_0(\mathbf{n})$ связаны с компонентами $F_0'(\mathbf{n}')$ соотношением

$$F_{0\cdot\cdot\lambda\mu}^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = \frac{h^\alpha h^\beta}{h^\lambda h^\mu} F_{0\cdot\cdot\lambda\mu}^{\prime\alpha\beta}(h\mathbf{n}\rho(\mathbf{n}))$$

Перейдем к вычислению $F_0'(\mathbf{n}')$ и будем в дальнейшем опускать штрихи. Согласно (4.1), $F_0(\mathbf{n})$ состоит из двух сомножителей.

Первый из них, тензор $B(\mathbf{n})$, зависит от нормали к эллипсоиду и определяется соотношением (2.10), в котором для полости следует положить $c_1 = -c_0$. Подставляя (2.11) в (2.10) и используя выражение для изотропного тензора упругих модулей (которое совпадает с (5.1)) при замене

$g^{\alpha\beta}$ на $\delta^{\alpha\beta}$, находим $(\varkappa_0 = 2\mu_0 / 1 - \nu_0)$

$$B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\mathbf{n}) = \varkappa_0 [\nu_0 \delta^{\alpha\beta}\delta^{\sigma\tau} - n^\alpha n^\beta \delta^{\sigma\tau} - n^\sigma n^\tau \delta^{\alpha\beta}) + \frac{1-\nu_0}{2}(\delta^{\alpha\sigma}\delta^{\beta\tau} + \delta^{\alpha\tau}\delta^{\beta\sigma} - \\ - n^\alpha n^\sigma \delta^{\beta\tau} - n^\alpha n^\tau \delta^{\beta\sigma} - n^\beta n^\sigma \delta^{\alpha\tau} - n^\beta n^\tau \delta^{\alpha\sigma}) + n^\alpha n^\beta n^\sigma n^\tau]$$

Видно, что $B(\mathbf{n})$ имеет симметрию c_0, т. е. симметричен внутри пар и по перестановке пар индексов (в общем случае неоднородного включения симметрии по перестановкам пар нет). Как следствие, второй сомножитель в $F_0(\mathbf{n})$, постоянный тензор B_0^{-1} ,имеет симметрию c_0. Для его вычисления следует обратить тензор B_0, который задан соотношением (3.18) и в данном случае имеет структуру орторомбического тензора с девятью отличными от нуля существенными компонентами. Прямые вычисления дают

$$B_0^{1111} = \varkappa_0 \left[1 - \frac{1}{8\pi}(3I_{11} + I_1)\right] \tag{5.2}$$

$$B_0^{1122} = \varkappa_0 \left\{\nu_0 - \frac{1}{16\pi}[I_{12} + I_{21} - (1 - 4\nu_0)(I_1 + I_2)]\right\}$$

$$B_0^{1212} = \varkappa_0 \left\{\frac{1-\nu_0}{2} - \frac{1}{16\pi}[I_{12} + I_{21} + (1 - 2\nu_0)(I_1 + I_2)]\right\}$$

$$I_p = \frac{3}{2} v \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b_p^2 + \xi)\Delta(\xi)}, \qquad I_{pq} = \frac{3}{2} v b_p^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b_p^2 + \xi)(b_q^2 + \xi)\Delta(\xi)}$$

$$\Delta(\xi) = \sqrt{(b_1^2 + \xi)(b_2^2 + \xi)(b_3^2 + \xi)}$$

Интегралы I_p, I_{pq} выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода.

Остальные шесть линейно независимых компонент тензора B_0 получаются из (5.2) циклической заменой индексов 1, 2, 3.

В частном случае эллипсоида вращения ($b_1 = b_2$) существенных компонент у тензора B_0 остается только шесть, и эллиптические интегралы исчезают

$$B_0^{1111} = \frac{\varkappa_0}{8}(3 + 2f_1 + 3f_2), \qquad B_0^{3333} = \varkappa_0(1 - 2f_1 + f_2)$$
$$B_0^{1122} = \frac{\varkappa_0}{8}[1 - 2(1 - 4\nu_0)f_1 + f_2], \qquad B_0^{1133} = \frac{\varkappa_0}{2}[\nu_0 + (1 - \nu_0)f_1 - f_2] \tag{5.3}$$

$$B_0^{1212} = \frac{\varkappa_0}{8}[1 + 2(1 - 2\nu_0)f_1 + f_2], \qquad B_0^{1313} = \frac{\varkappa_0}{4}[1 - \nu_0 + (1 + \nu_0)f_1 - 2f_2]$$

$$f_1 = \frac{1}{1-\alpha^2} - \frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^{3/2}} \arcsin\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$f_2 = \frac{2+\alpha^2}{2(1-\alpha^2)^2} - \frac{3\alpha}{(1-\alpha^2)^{5/2}} \arcsin\sqrt{1-\alpha^2}, \qquad \alpha = \frac{b_3}{b_1}$$

Для вычисления B_0^{-1} представим, как обычно [10], четырехвалентный тензор B_0 в виде матрицы шестого порядка. Последняя разбивается на два блока из матриц третьего порядка. Компоненты $B_0^{\lambda\lambda\mu\mu}$ образуют симметричную матрицу, а удвоенные компоненты $B_0^{\lambda\mu\lambda\mu}$ $(\lambda \neq \mu)$ — диагональную и, следовательно

$$(B_0^{-1})_{\lambda\mu\lambda\mu} = \frac{1}{4B_0^{\lambda\mu\lambda\mu}} \qquad (\lambda \neq \mu) \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь два случая.

1°. Внешнее поле $\sigma_0{}^{\alpha\beta}$ — растяжение по координатным осям, т. е. отличны от нуля лишь диагональные компоненты $\sigma_0^{\lambda\lambda}$. Тогда концентрация напряжений определяется компонентами

$$F_{0\cdot\cdot}^{\alpha\beta}{}_{\lambda\lambda}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta 11}(\mathbf{n})(B_0^{-1})_{11\lambda\lambda} + B^{\alpha\beta 22}(\mathbf{n})(B_0^{-1})_{22\lambda\lambda} + B^{\alpha\beta 33}(\mathbf{n})(B_0^{-1})_{33\lambda\lambda}$$

2°. Внешнее поле $\sigma_0{}^{\alpha\beta}$ — чистый сдвиг. Концентрация напряжений определяется компонентами $F_{0\cdots}^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu}(\mathbf{n})$ при $\lambda \neq \mu$, для которых, согласно (4.1) и (5.3), имеем

$$F_{0\cdot\cdot}^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu}(\mathbf{n}) = \frac{B^{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{n})}{2B_0^{\lambda\mu\lambda\mu}} \qquad (\lambda \neq \mu) \tag{5.5}$$

Таким образом, исследование концентрации напряжений в этом случае значительно проще, чем в предыдущем.

Сравнение с коэффициентами концентрации напряжений в вершине эллипсоида, полученными в [2], показывает, что соответствующие компоненты из (5.5) дают в этих точках те же значения. Однако, существенно, что знания коэффициента концентрации только в вершинах эллипсоида недостаточно, так как может привести к неправильным качественным выводам. Например, для чистого сдвига с компонентой $\sigma_0{}^{13}$ в вершине (1, 0, 0) тензор напряжений $\sigma_-{}^{\alpha\beta}$ равен нулю, а в непосредственной близости к данной вершине имеет место концентрация напряжений. Поэтому необходимо полное исследование напряжений на всей поверхности эллипсоида, а не только в его характерных точках.

Поступила 26 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
2. Sadowsky M., Sternberg E., Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity. J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, No. 2.
3. Лурье А. И. Напряженное состояние вокруг эллипсоидальной полости. Докл. АН СССР, 1952, т. 87, № 5.
4. Подильчук Ю. Н. Плоская эллиптическая трещина в произвольном однородном поле напряжений. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 8.
5. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., Изд. иностр. лит., 1963.
6. Александров А. Я., Вольперт В. С. Некоторые задачи о концентрации напряжений около эллипсоидальной полости в трансверсально-изотропном теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
7. Walpole L. J. The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium. Proc. Roy. Soc., A., 1967, vol. 300, No. 1461.
8. Подильчук Ю. Н. О напряженном состоянии неограниченной среды с упругим эллипсоидальным включением. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 5.
9. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Эллипсоидальная неоднородность в упругой среде. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 3.
10. Схоутен Я. И. Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965.