

**О ДИФРАКЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПЛАСТИНАХ,
СОЧЛЕНЕННЫХ ПОД ПРЯМЫМ УГЛОМ**

Б. П. Белинский, Д. П. Коузов, В. Д. Чельцова

(Ленинград)

Рассматриваются двумерные стационарные акустические процессы внутри заполненной жидкостью бесконечной области, ограниченной сторонами прямого угла. Искомой величиной считается давление, для которого внутри области предполагается выполненным уравнение Гельмгольца, а на границе — некоторые условия, содержащие производные высокого порядка. Выражения для граничных операторов не конкретизируются. Находится точное представление для давления в том случае, когда звуковое поле возбуждается источником точечного типа, расположенным в жидкости. Рассматривается ряд конкретных задач дифракции гидроакустических волн на двух взаимно перпендикулярных пластинах.

1. Постановка задачи. В первом квадранте декартовой системы координат x, y будем искать решение уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2) P(x, y) = -\delta(x - x_0, y - y_0) \quad (1.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} L_1 P(x, 0) &= 0, & x > 0 \\ L_2 P(0, y) &= 0, & y > 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $P(x, y)$ — давление в жидкости, k — волновое число. Предполагается, что зависимость от времени задается множителем $e^{-i\omega t}$, который всюду опускается. Действие граничных операторов определяется формулами

$$L_1 = m_{11} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial}{\partial y} + m_{12} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (1.3)$$

$$L_2 = m_{21} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} + m_{22} \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

где $m_{\alpha\gamma}$ ($\alpha, \gamma = 1, 2$) — полиномы своих аргументов. Коэффициенты этих полиномов не зависят от пространственных переменных x и y .

Предполагается:

1) Полином $m_2(\lambda)$ и алгебраическая функция $l_1(\lambda)$ и соответственно $m_1(\lambda)$ и $l_2(\lambda)$

$$m_\alpha(\lambda) = m_{\alpha 1}(\lambda^2 - k^2) i\lambda + m_{\alpha 2}(\lambda^2 - k^2)$$

$$l_\alpha(\lambda) = -m_{\alpha 1}(\lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - k^2} + m_{\alpha 2}(\lambda^2) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.4)$$

не имеют общих корней. Здесь ветви радикала $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ выбираются обычным образом. Разрез, проведенный из точки $\lambda = k$, располагается целиком в верхней полуплоскости, разрез из точки $\lambda = -k$ проводится с соблюдением центральной симметрии чертежа относительно начала координат.

нат. Считается, что на действительной оси основного листа римановой поверхности $\lim_{\lambda \rightarrow \pm \infty} \operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2} = +\infty$ при $\lambda \rightarrow \pm \infty$.

2) Алгебраическая функция $l_\alpha(\lambda)$ не имеет вещественных корней при $\operatorname{Im} k > 0$.

Свойство 1) будет использовано ниже при построении решения.

Свойство 2) требуется для удовлетворения принципа предельного поглощения [1].

Решение ищется в классе функций, непрерывных в начале координат. Предполагается также выполненным принцип предельного поглощения. Иными словами, при наличии в волновом числе положительной мнимой части ($k = k' + ik''$; $k', k'' > 0$) решение должно экспоненциально убывать на бесконечности, а случай вещественных положительных k рассматривается путем предельного перехода $k'' \rightarrow +0$.

Решение поставленной задачи в частном случае простейших граничных условий Дирихле (свободная поверхность жидкости $L_1 = 1, L_2 = 1$) или Неймана (жесткая граница $L_1 = \partial / \partial y, L_2 = \partial / \partial x$) легко достигается методом изображений.

Случай смешанных или импедансных граничных условий ($m_{\alpha\gamma}$ — постоянные, отличные от нуля) может быть рассмотрен методом, предложенным Бухвальдом при решении одной дифракционной задачи для волн на поверхности жидкости [2].

Ниже метод Бухвальда обобщается применительно к случаю гранично-контактных задач, когда дифференциальный порядок хотя бы одного из операторов L_α ($\alpha = 1, 2$) превосходит единицу. Наличие в краевых условиях дифференциальных операторов высокого порядка приводит к тому, что решение задачи, поставленной в начале п. 1, перестает обладать свойством единственности. Это решение, называемое общим, содержит некоторое число N произвольных постоянных. Как и в случае, рассмотренном в [3], это число может быть определено по формуле¹

$$N = E \left(\frac{N_1 + N_2 - 1}{2} \right) \quad (1.5)$$

Здесь $N_{1,2}$ — порядки дифференциальных операторов $L_{1,2}$, а $E(x)$ означает целую часть x . Произвол в решении устраняется после добавления в постановку задачи N независимых гранично-контактных условий. В рассматриваемом случае эти условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{1\beta}P(0, 0) + R_{2\beta}P(0, 0) &= 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, N) \\ R_{1\beta}P(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[s_{1\beta 1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + s_{1\beta 2} \left(-i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] P(x, 0) \\ R_{2\beta}P(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[s_{2\beta 1} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} + s_{2\beta 2} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] P(0, y) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $s_{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \gamma = 1, 2, \beta = 1, 2, \dots, N$) — полиномы своих аргументов.

¹ Отметим, что в работе [3] допущена опечатка в формуле (2.20). Последняя должна иметь вид, аналогичный формуле (1.5).

Пример 1. Дифракция в прямом угле. Рассмотрим резервуар ($x > 0, y > 0$), заполненный жидкостью, стенки которого ($x = 0, y > 0$ и $x > 0, y = 0$) представляют собой упругие пластины, способные лишь к изгибным движениям. В этом случае для граничных операторов имеют место следующие выражения:

$$L_1 = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_1^4 \right) \frac{\partial}{\partial y} + \nu_1 \quad (1.7)$$

$$L_2 = \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - k_2^4 \right) \frac{\partial}{\partial x} + \nu_2, \quad \nu_\alpha = \frac{\rho \omega^2}{D_\alpha}$$

где k_α — волновые числа изгибных волн в пластинах, ρ — плотность жидкости, D_α — цилиндрические жесткости пластин ($\alpha = 1, 2$).

Общее решение такой задачи, согласно (1.5), содержит четыре произвольные постоянные.

Для завершения описания данной механической модели необходимо указать режим на стыке пластин (спай, шарнирное соединение, трещина). Будем считать пластины жестко спаянными, что дает следующий набор гранично-контактных условий:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial P(0, y)}{\partial x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 P(x, 0)}{\partial x \partial y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 P(0, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.8)$$

$$D_1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^3 P(0, y)}{\partial y^2 \partial x} = 0$$

Первые два условия означают отсутствие смещений пластин в начале координат. Это обстоятельство связано с тем, что каждая из пластин предполагается обладающей бесконечной жесткостью относительно продольных смещений. Последние два условия выражают неизменность угла между пластинами и отсутствие стороннего вращающего момента на стыке пластин соответственно.

Пример 2. Дифракция на T-образном сочленении пластин. Пусть два прямых угла, образованных спаянными под прямым углом бесконечной ($y = 0$) и полубесконечной ($x = 0, y > 0$) пластинами, заполнены жидкостью. Источник поля считаем расположенным в точке, находящейся в первом квадранте. Упругие свойства пластин будем считать такими же, как в примере 1. Задача состоит в решении уравнения Гельмгольца (1.1), неоднородного при $x > 0$ и однородного при $x < 0$, при граничных условиях

$$\left[\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - k_1^4 \right) \frac{\partial}{\partial y} + \nu_1 \right] P(x, 0) = 0, \quad x \neq 0 \quad (1.9)$$

и условиях сопряжения

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} - k_2^4 \right) \left[\frac{\partial P(+0, y)}{\partial x} + \frac{\partial P(-0, y)}{\partial x} \right] + \nu_2 [P(+0, y) - P(-0, y)] = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial P(+0, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(-0, y)}{\partial x}, \quad y > 0$$

Гранично-контактные условия здесь имеют следующий вид:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial P(x, 0)}{\partial y} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial P(\pm 0, y)}{\partial x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\partial^2 P(x, 0)}{\partial y \partial x} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 P(\pm 0, y)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.11)$$

$$D_1 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} - D_1 \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\partial^3 P(x, 0)}{\partial x^2 \partial y} + D_2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^3 P(\pm 0, y)}{\partial y^2 \partial x} = 0$$

Разлагая функцию $P(x, y)$ на четную и нечетную часть относительно переменной x

$$P(x, y) = 1/2 [P_+(x, y) + P_-(x, y)], \quad P_{\pm}(x, y) = P(x, y) \pm P(-x, y)$$

разобьем задачу на две, каждую из которых можно формулировать лишь для положительных значений x . Для $P_+(x, y)$ имеем $L_2 = \partial/\partial x$ (L_1 задается первой формулой (1.7)) и два гранично-контактных условия: первое условие (1.8) и

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^2 P_+(x, 0)}{\partial x \partial y} = 0$$

Задача для $P_-(x, y)$ совпадает с задачей примера 1, если заменить в последнем условии (1.8) D_2 на $1/2 D_2$, а во втором условии (1.7) v_2 на $2v_2$.

Пример 3. Дифракция на крестообразном пересечении бесконечных пластин ($x = 0, y = 0$). Разложением полного поля $P(x, y)$ на четную и нечетную часть по каждой из пространственных переменных задача сводится к четырем самостоятельным задачам для прямого угла. Формулировка их не вызывает затруднений и в целях краткости изложения здесь опущена.

Отметим, что дифракция на T -образном сочленении пластин уже рассматривалась [4,5], однако точного решения задачи, учитывающего контакт полубесконечной пластины с жидкостью, в этих работах не содержится.

2. Общее решение. Ниже строится решение, удовлетворяющее всем требованиям задачи, кроме гранично-контактных условий (1.6).

Представим искомое поле $P(x, y)$ в виде суммы трех слагаемых

$$P = P_0 + P^{(1)} + P^{(2)} \quad (2.1)$$

Здесь P_0 — поле точечного источника, координаты которого (x_0, y_0) в безграничной жидкой среде. Используем две формы записи поля P_0

$$P_0(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda(x - x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}|y - y_0|] \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \quad (2.2)$$

$$P_0(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\lambda(y - y_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}|x - x_0|] \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

Слагаемые $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ должны удовлетворять порознь однородному уравнению Гельмгольца, требованию непрерывности в начале координат и принципу предельного поглощения. Подчиним их следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} L_1 P^{(1)}(x, 0) &= -L_1 P_0(x, 0), & L_2 P^{(1)}(0, y) &= 0 \\ L_1 P^{(2)}(x, 0) &= 0, & L_2 P^{(2)}(0, y) &= -L_2 P_0(0, y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тем самым автоматически будут выполнены граничные условия (1.2) для P .

Ограничимся задачей для $P^{(1)}$, поскольку нахождение $P^{(2)}$ осуществляется аналогично. Будем искать $P^{(1)}$ в виде разложения по плоским волнам

$$P^{(1)}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} p_1(\lambda) \exp(-i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2}y) d\lambda \quad (2.4)$$

Функция $p_1(\lambda)$ и контур Λ_1 являются искомыми. Как будет показано ниже, $p_1(\lambda)$ представляет собою некоторую трансцендентную функцию,

ветвящуюся при $\lambda = \pm k$ и имеющую некоторый набор полюсов. Полагая, что в окрестности действительной оси имеет место оценка

$$p_1(\lambda) = O(\lambda^{-1-\varepsilon}) \quad (|\lambda| \rightarrow \infty, \quad \varepsilon > 0) \quad (2.5)$$

удовлетворим требованию непрерывности в начале координат.

В [3], где рассматривается дифракция на двух полубесконечных пластинах, состыкованных так, что они являются продолжениями одна другой, участвует аналогичное представление для дифрагированного поля; интегрирование производится по действительной оси. Различие между (2.4) и соответствующим ему представлением (2.5) из [3] определяется требованием принципа предельного поглощения. В задаче для полуплоскости нужно иметь возможность деформирования контура интегрирования с действительной оси в верхнюю и нижнюю полуплоскости (как это делается в [1]). В рассматриваемом здесь случае отрицательные значения переменной x не принадлежат области, где ищется решение, и нужна возможность деформирования контура лишь в верхнюю полуплоскость. Поэтому вместо интегрирования по действительной оси можно воспользоваться интегрированием по некоторому контуру более общего вида. Так, если считать, что концы контура Λ_1 идут по действительной оси и между Λ_1 и действительной осью располагается лишь некоторое число полюсов $p_1(\lambda)$, для каждого из которых

$$\operatorname{Im} \lambda > 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$$

то выражение (2.4) будет по-прежнему определять функцию, удовлетворяющую принципу предельного поглощения. Будем впредь полагать, что искомый контур обладает перечисленными свойствами. Конкретный выбор контура будет осуществлен ниже.

Используя граничные условия, приходим к следующим интегральным уравнениям для искомой функции:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} l_1(\lambda) p_1(\lambda) \exp(i\lambda x) d\lambda = \\ & = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} l_1^\circ(\lambda) \exp(i\lambda(x-x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}y_0) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_{\Lambda_1} m_2(\lambda) p_1(\lambda) \exp(-\sqrt{\lambda^2 - k^2}y) d\lambda = 0 \quad (2.7)$$

$$l_\beta^\circ(\lambda) = m_{\alpha_1}(\lambda^2) \sqrt{\lambda^2 - k^2} + m_{\alpha_2}(\lambda^2) \quad (2.8)$$

Алгебраическая функция $l_1^\circ(\lambda)$ не имеет полюсов, поэтому интегрирование по действительной оси в правой части (2.6) можно заменить интегрированием по Λ_1 . В результате имеем

$$\int_{\Lambda_1} \left[l_1(\lambda) p_1(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} l_1^\circ(\lambda) \exp(-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2}y_0) \right] \exp(i\lambda x) d\lambda = 0 \quad (2.9)$$

Для удовлетворения (2.9) положим

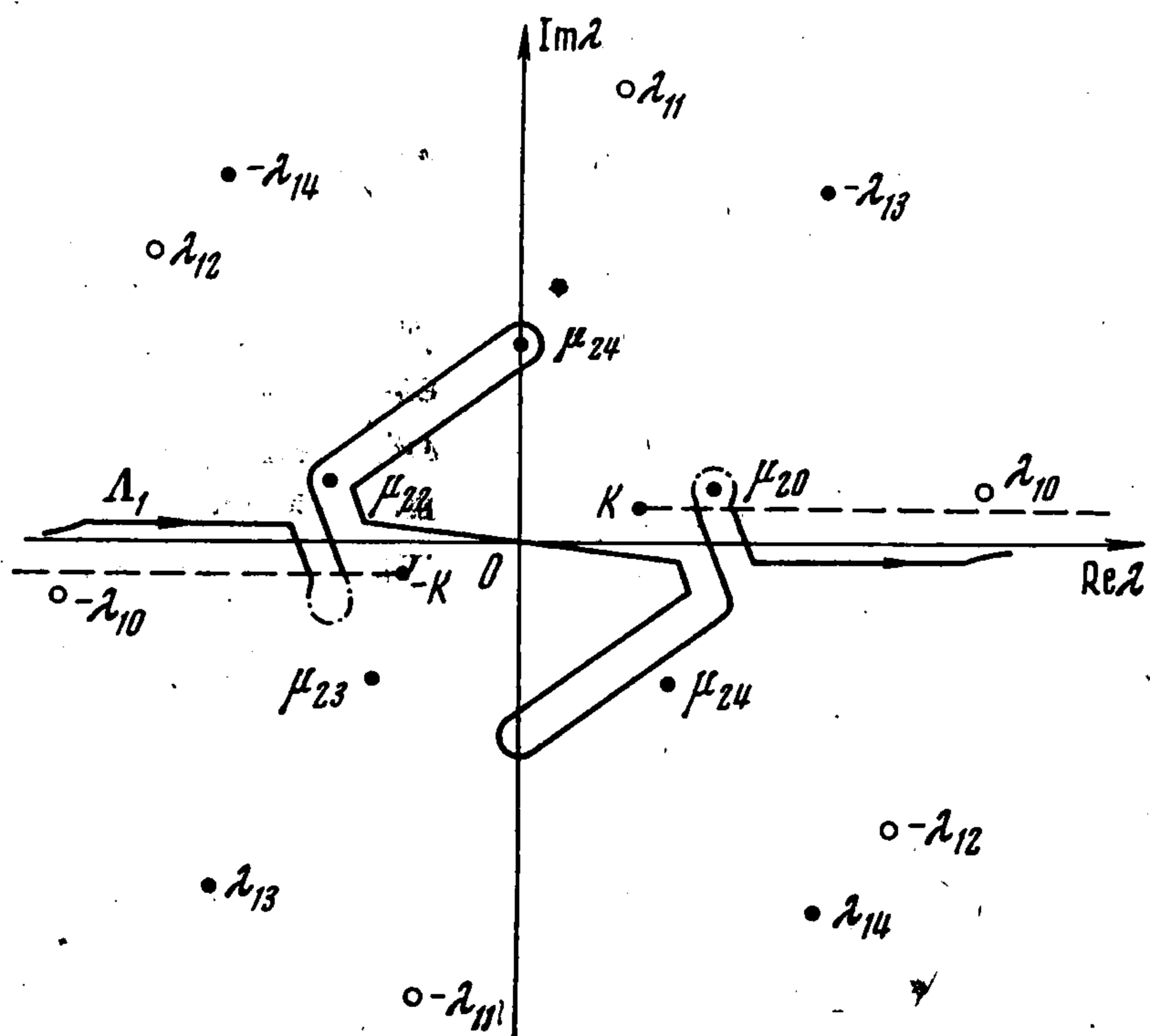
$$l_1(\lambda) p_1(\lambda) + \frac{l_1^\circ(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \exp(-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2}y_0) = \Phi^+(\lambda) \quad (2.10)$$

где $\Phi^+(\lambda)$ — функция, аналитическая выше контура Λ_1 .

Уравнение (2.7) будет выполнено, если положить подынтегральную функцию нечетной

$$m_2(\lambda) p_1(\lambda) = -m_2(-\lambda) p_1(-\lambda) \quad (2.11)$$

а контур интегрирования — симметричным относительно начала координат. Для удовлетворения принципа предельного поглощения будем пред-



полагать, что в нижней полуплоскости выше контура интегрирования нет особенностей $p_1(\lambda)$. На фигуре показан выбор контура Λ_1 применительно к случаю, разобранным в примере 1. Сплошной линией изображена часть контура Λ_1 , расположенная на основном листе римановой поверхности, пунктирной — показаны разрезы. Корни $l_1(\lambda)$ и $m_2(\lambda)$ обозначены соответственно $\pm \lambda_{1n}$ и μ_{2n} ($n = 0, 1, \dots, 4$), причем корни $l_1(\lambda)$, расположенные на втором листе, изображены кружками.

Исключая $p_1(\lambda)$ из (2.10) и (2.11), приходим к краевой задаче Римана для нахождения кусочно-аналитической функции $\Phi^+(\pm \lambda)$ по линейному соотношению, связывающему ее предельные значения на обеих сторонах контура Λ_1

$$m_2(\lambda) \Phi^+(\lambda) + m_2(-\lambda) \Phi^+(-\lambda) = \psi_1(\lambda), \quad (\lambda \in \Lambda_1) \quad (2.12)$$

$$\psi_1(\lambda) = \frac{l_1^0(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \exp(-\sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0) [m_2(\lambda) \exp(-i\lambda x_0) + m_2(-\lambda) \exp(i\lambda x_0)] \quad (2.13)$$

При помощи интеграла типа Коши представим функцию $\psi_1(\lambda)$ как разность между предельными значениями сверху (Ψ_1^+) и снизу (Ψ_1^-) на контуре Λ_1 кусочно-аналитической функции Ψ_1

$$\psi_1(\lambda) = \Psi_1^+(\lambda) - \Psi_1^-(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_1 \quad (2.14)$$

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_1} \frac{\psi_1(\tau) d\tau}{\tau - \lambda} \quad (2.15)$$

Легко видеть, что всюду на основном листе имеет место формула

$$\Psi_1^-(-\lambda) = -\Psi_1^+(\lambda) \quad (2.16)$$

На основании (2.12), (2.14), (2.16) имеем

$$m_2(\lambda) \Phi^+(\lambda) - \Psi_1^+(\lambda) = -m_2(-\lambda) \Phi^+(-\lambda) + \Psi_1^+(-\lambda), \quad \lambda \in \Lambda_1 \quad (2.17)$$

откуда, согласно теореме Римана об аналитическом продолжении через контур, левая и правая части (2.17) задают некоторую функцию, аналитическую на всей комплексной плоскости λ и нечетную. Оценка (2.5) будет удовлетворена, если выбрать эту функцию в виде полинома степени $2N - 1$, где N определяется формулой (1.5). Таким образом

$$m_2(\lambda) \Phi^+(\lambda) - \Psi_1^+(\lambda) = \lambda q_{N-1}^{(1)}(\lambda^2) \quad (2.18)$$

откуда

$$\Phi^+(\lambda) = \frac{\Psi_1^+(\lambda) + \lambda q_{N-1}^{(1)}(\lambda^2)}{m_2(\lambda)} \quad (2.19)$$

$$p_1(\lambda) = -\frac{l_1^0(\lambda)}{l_1(\lambda)} \frac{\exp(-i\lambda x_0 - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y_0)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \frac{\Psi_1^+(\lambda) + \lambda q_{N-1}^{(1)}(\lambda^2)}{l_1(\lambda) m_2(\lambda)} \quad (2.20)$$

Функция $p_1(\lambda)$ имеет полюса в корнях полинома $m_2(\lambda)$ и алгебраической функции $l_1(\lambda)$. Напомним, что ни один из корней $m_2(\lambda)$ не является корнем $l_1(\lambda)$ (свойство 1)). Контур Λ_1 в этом случае выбирается следующим образом:

1. Контур Λ_1 симметричен относительно начала координат и на бесконечности совпадает с действительной осью.

2. Все корни $l_1(\lambda)$, находящиеся в верхней полуплоскости, лежат выше Λ_1 .

3. Все корни $m_2(\lambda)$ лежат ниже Λ_1 , причем обход их (с учетом ветвления $p_1(\lambda)$ в точке $\lambda = k$) осуществляется таким образом, что в каждом из них $\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$.

В результате имеем следующее выражение для поля $P^{(1)}$:

$$P^{(1)} = P_1 + P_1' + Q_1$$

$$P_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{l_1^0(\lambda)}{l_1(\lambda)} \exp(i\lambda(x - x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}(y + y_0)) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

$$P_1' = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{\Psi_1^+(\lambda)}{l_1(\lambda) m_2(\lambda)} \exp(i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y) d\lambda \quad (2.21)$$

$$Q_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{\lambda q_{N-1}^{(1)}(\lambda^2)}{l_1(\lambda) m_2(\lambda)} \exp(i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y) d\lambda$$

Аналогичным образом находится $P^{(2)}$. Итоговое выражение для $P^{(2)}$ получается из формул (2.21) циклической заменой индексов 1 и 2 и переменных x и y . При этом

$$Q_2(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_2} \frac{\lambda q_{N-1}^{(2)}(\lambda^2)}{l_2(\lambda) m_1(\lambda)} \exp(i\lambda y - \sqrt{\lambda^2 - k^2} x) d\lambda \quad (2.22)$$

с точностью до обозначения коэффициентов полинома совпадает с $Q_1(x, y)$ (достаточно заменить в (2.22) переменную интегрирования λ на $i\sqrt{\lambda^2 - k^2}$). Окончательное выражение для полного дифракционного поля имеет вид

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + Q \quad (2.23)$$

$$P_2(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_2} \frac{l_2^\circ(\lambda)}{l_1^\circ(\lambda)} \exp(i\lambda(y - y_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}(x + x_0)) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

$$Q(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{\lambda q_{N-1}(\lambda^2)}{l_1(\lambda) m_2(\lambda)} \exp(i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2}y) d\lambda = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_2} \frac{\lambda q_{N-1}(k^2 - \lambda^2)}{l_2(\lambda) m_1(\lambda)} \times$$

$$\times \exp(i\lambda y - \sqrt{\lambda^2 - k^2}x) d\lambda$$

где P_0 и P_1 задаются формулами (2.2) и (2.21), P_3 представляет собою сумму P_1' и P_2' . После некоторых преобразований имеем

$$P_3(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda} \frac{l_1^\circ(\lambda) m_2(-\lambda)}{l_1(\lambda) m_2(\lambda)} \exp(i\lambda(x + x_0) - \sqrt{\lambda^2 - k^2}(y + y_0)) \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

P_1 имеет смысл волны, отраженной от границы ($x > 0, y = 0$), если продолжить ее до бесконечности в сторону отрицательных значений x .

При граничных условиях Дирихле или Неймана P_1 превращается в поле мнимого источника, находящегося в точке $(x_0, -y_0)$. Аналогичным образом при граничных условиях Дирихле или Неймана P_2 переходит в поле мнимого источника, расположенного в точке $(-x_0, y_0)$, а P_3 — в точке $(-x_0, -y_0)$. Сумма $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ удовлетворяет всем требованиям задачи, поставленным в п. 1, и имеет в начале координат непрерывные производные до порядка $N_1 + N_2 - 1$ включительно. Q удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, однородным граничным условиям (1.2) и несет в себе разрывы вторых производных поля в начале координат. Отметим, что полученное решение в отличие от случая продольной стыковки пластин [3] не содержит продуктов факторизации функций $l_{1,2}(\lambda)$ и является более простым и удобным для исследования.

Полученное выражение для Q сохраняет свой вид независимо от задания падающего поля. При изменении источника поля меняются лишь численные значения постоянных полинома q_{N-1} .

3. Гранично-контактные условия. Ниже указывается регуляризация расходящихся интегралов, возникающих при формальном применении гранично-контактных операторов, а также выписывается алгебраическая система для нахождения постоянных, входящих в Q (см. пример 1, р.п. 1.)

Применение гранично-контактных операторов к P_0, P_1 и P_2 не встречает затруднений, так как в получающихся при этом интегралах сохраняется экспоненциальное убывание на бесконечности у подынтегральных выражений. Подынтегральная функция в P_3 ведет себя при $x = 0, y = 0$ на бесконечности как $|\lambda|^{N_1 - N_2 - 1}$. Если предположить, что дифференциальный порядок $R_{\alpha\beta}$ не превосходит $N_1 + N_2 - 1$, то применение гранично-контактных операторов не приведет к возникновению расходящихся интегралов. Регуляризация расходящихся интегралов типа $R_{\alpha\beta} Q(0, 0)$ может быть осуществлена примером, описанным в [3]. Регуляризация подобных интегралов таким способом возможна, если выполняется

$$r_{\alpha\beta}(\lambda) l_\alpha^\circ(\lambda) - r_{\alpha\beta}^\circ(\lambda) l_\alpha(\lambda) = O(|\lambda|^{N_\alpha}) \quad (3.1)$$

$$r_{\alpha\beta}(\lambda) = -s_{\alpha\beta 1}(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2} + s_{\alpha\beta 2}(\lambda)$$

$$r_{\alpha\beta}^\circ(\lambda) = s_{\alpha\beta 1}(\lambda) \sqrt{\lambda^2 - k^2} + s_{\alpha\beta 2}(\lambda)$$

Обратимся к примеру 1 из п. 1. Общее решение содержит здесь четыре произвольные постоянные, и поле Q может быть записано так:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_1} \frac{\lambda (a\lambda^6 + b\lambda^4 + c\lambda^2 + d)}{l_1(\lambda) m_2(\lambda)} \exp(i\lambda x - \sqrt{\lambda^2 - k^2} y) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Lambda_2} \frac{\lambda [a(k^2 - \lambda^2)^3 + b(k^2 - \lambda^2) + c(k^2 - \lambda^2) + d]}{l_2(\lambda) m_1(\lambda)} \exp(i\lambda y - \sqrt{\lambda^2 - k^2} x) d\lambda$$

$$l_\alpha(\lambda) = -(\lambda^4 - k_\alpha^4) \sqrt{\lambda^2 - k^2} + v_\alpha, m_\alpha = i\lambda [(\lambda^2 - k^2)^2 - k_\alpha^4] + v_\alpha$$

Используя гранично-контактные условия (1.8), получим следующую систему для нахождения a, b, c, d :

$$aT_{1,7} + bT_{1,5} + cT_{1,3} + dT_{1,1} = A_1$$

$$a(k^6 T_{2,1} - 3k^4 T_{2,3} + 3k^2 T_{2,5} - T_{2,7}) + b(k^4 T_{2,1} - 2k^2 T_{2,3} + T_{2,5}) + c(k^2 T_{2,1} - T_{2,3}) + dT_{2,1} = A_2 \quad (3.2)$$

$$a(T_{1,8} - k^6 T_{2,2} + 3k^4 T_{2,4} - 3k^2 T_{2,6} + T_{2,8}) + b(T_{1,6} - k^4 T_{2,2} + 2k^2 T_{2,4} - T_{2,6}) + c(T_{1,4} - k^2 T_{2,2} + T_{2,4}) + d(T_{1,2} - T_{2,2}) = A_3$$

$$a[D_1 T_{1,9} + D_2(k^6 T_{2,3} - 3k^4 T_{2,5} + 3k^2 T_{2,7} - T_{2,9})] + b[D_1 T_{1,7} + D_2(k^4 T_{2,3} - 2k^2 T_{2,5} + T_{2,7})] + c[D_1 T_{1,5} + D_2(k^2 T_{2,3} - T_{2,5})] + d(D_1 T_{1,3} + D_2 T_{2,3}) = A_4$$

$$T_{1,\beta} = \frac{v_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^\beta \sqrt{\lambda^2 - k^2} d\lambda}{m_2(\lambda) l_1(\lambda) l_1^\circ(\lambda)} + \frac{i}{2} \sum_{l_1 l_1^\circ = 0} \text{Res} \frac{\lambda^\beta (\lambda^2 - k^2) (\lambda^4 - k_1^4)}{m_2(\lambda) l_1(\lambda) l_1^\circ(\lambda)} -$$

$$- \frac{iv_1}{2} \sum_{m_2=0} \text{Res} \frac{\lambda^\beta \sqrt{\lambda^2 - k^2}}{m_2(\lambda) l_1(\lambda) l_1^\circ(\lambda)}$$

$$\text{Im } \lambda > 0, \quad \text{Re } \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0, \quad \text{Im } \lambda > 0, \quad \text{Re } \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0$$

Формула для $T_{2,\beta}$ получается из (3.3) циклической заменой индексов 1 и 2. A_β ($\beta = 1, 2, 3, 4$) — числа, получаемые в результате применения операторов, стоящих в правых частях равенств (1.8) к выражению $P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ (в целях краткости они здесь не выписаны).

Отметим, что вид левых частей равенств (3.2) не зависит от характера падающей волны, а определяется свойствами самой модели. При различном выборе источников поля меняются лишь численные значения правых частей. Интегралы $T_{\alpha\beta}$ родственны интегралам, встречавшимся в задачах акустической дифракции на точечных нарушениях упругих свойств пластин [6,7], и могут быть изучены аналогичными методами.

Поступила 29 XI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Коузов Д. П. О решении уравнения Гельмгольца для полуплоскости при граничных условиях, содержащих производные высокого порядка. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
2. Buchwald V. T. The diffraction of Kelvin waves at a corner. J. Fluid mech., 1968, vol. 31, p. 1.
3. Коузов Д. П. Дифракция цилиндрической гидроакустической волны на стыке двух полубесконечных пластин. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
4. Романов В. Н. Излучение T -образного соединения пластин при наличии диффузного поля изгибных волн. Акуст. ж., 1969, т. 15, вып. 2.
5. Романов В. Н. Влияние реакции жидкости на излучение T -образного соединения пластин. Акуст. ж., 1971, т. 17, вып. 2.
6. Коузов Д. П. Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
7. Коновалюк И. П., Красильников В. Н. Влияние ребра жесткости на отражение плоской звуковой волны от пластины. В сб.: Дифракция и излучение волн. Изд-во ЛГУ, 1965, вып. 4.