Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3 : 534.1

СООТНОШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

С. И. Литовченко, В. К. Прокопов

(Ленинград)

Получено соотношение обобщенной ортогональности как обобщение известного соотношения П. А. Шиффа [1,2] на случай неосесимметричной деформации упругого цилиндра; это соотношение имеет место при четырех вариантах однородных граничных условий на боковых поверхностях цилиндра. Указывается путь получения точного решения задачи при использовании выведенного соотношения для двух вариантов смешанных граничных условий на торцах. Вычисляются значения обобщенных нормирующих множителей.

1. Выпишем решение дифференциальных уравнений теории упругости в перемещениях в формэ Папковича — Нейбера; в случае цилиндрических координат $r\,\varphi\,z$ имеем

$$u_r = u = 4(1-\nu)B_r - \frac{\partial F}{\partial r}, \qquad u_z = w = 4(1-\nu)B_z - \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$u_\varphi = v = 4(1-\nu)B_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}, \qquad F = rB_r + zB_z + B_0 \tag{1.1}$$

Функции B_r, B_φ, B_z, B_0 удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta B_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{B_r}{r^2} = 0, \qquad \Delta B_z = 0$$

$$\Delta B_\varphi + \frac{2}{r^2}\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} - \frac{B_\varphi}{r^2} = 0, \qquad \Delta B_0 = 0 \tag{1.2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Предположим, что задаваемые напряжения (или перемещения) на боковых поверхностях цилиндра $r = a$, $r = b$ $(a > b)$ представлены двойными тригонометрическими рядами по координатам φ, z (для сплошного цилиндра $(b = 0)$ ставится требование ограниченности решения на оси). Соответственно и решение задачи ищется в форме двойного тригонометрического ряда. Рассмотрим типовые члены таких рядов

$$u = u^*(r)\cos\lambda z\cos n\varphi, \qquad v = v^*(r)\cos\lambda z\sin n\varphi$$

$$w = w^*(r)\sin\lambda z\cos n\varphi \tag{1.3}$$

для отыскания которых достаточно принять

$$B_r = \frac{\psi(r)}{2(1-\nu)}\cos\lambda z\cos n\varphi, \qquad B_\varphi = \frac{\chi(r)}{2(1-\nu)}\cos\lambda z\sin n\varphi$$

$$B_z = 0, \qquad B_0 = \left[\omega(r) - \frac{r\psi(r)}{2(1-\nu)}\right]\cos\lambda z\cos n\varphi \tag{1.4}$$

Из уравнений (1.2) вытекают дифференциальные соотношения для определения функций ψ, χ, ω (штрихами обозначены производные по r)

$$r(r\psi')' = (n^2 + 1 + \lambda^2 r^2)\psi + 2n\chi, \qquad r(r\chi')' = (n^2 + 1 + \lambda^2 r^2)\chi + 2n\psi$$

$$r(r\omega')' = (n^2 + \lambda^2 r^2)\omega + \frac{r}{1-\nu}[(r\psi)' + n\chi] \tag{1.5}$$

Функциональные коэффициенты u^*, v^*, w^* в рядах для перемещений (1.3) в силу выражений (1.1) и (1.4) через введенные функции ψ, χ, ω представляются так:

$$u^* = 2\psi - \omega', \quad v^* = 2\chi + \frac{n}{r}\omega, \quad \omega^* = \lambda\omega \tag{1.6}$$

Введем аналогичным образом функциональные коэффициенты в рядах для напряжений; их выражения будут

$$\sigma_r^* = 2G\left[\frac{\omega'}{r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \lambda^2\right)\omega + r\left(\frac{\psi}{r}\right)' - \frac{n}{r}\chi\right]$$

$$\sigma_\varphi^* = 2G\left[\omega'' - \lambda^2\omega - r\left(\frac{\psi}{r}\right)' + \frac{n}{r}\chi\right]$$

$$\sigma_z^* = 2G\left[\frac{(r\omega')'}{r} - \frac{n^2}{r^2}\omega - \frac{(r\psi)'}{r} - \frac{n}{r}\chi\right]$$

$$\tau_{r\varphi}^* = 2G\left[n\left(\frac{\omega}{r}\right)' - \frac{n}{r}\psi + r\left(\frac{\chi}{r}\right)'\right]$$

$$\tau_{\varphi z}^* = -2G\left(n\frac{\omega}{r} + \chi\right), \quad \tau_{zr}^* = 2G\lambda(\omega' - \psi) \tag{1.7}$$

При выводе формул (1.7) для исключения коэффициента Пуассона использовано соотношение, вытекающее из третьего уравнения (1.5)

$$\frac{\nu}{(1-\nu)r}[(r\psi)' + n\chi] = \frac{(r\omega')'}{r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + \lambda^2\right)\omega - \frac{(r\psi)' + n\chi}{r}$$

Решение системы (1.5) дает явное выражение функций ψ, χ, ω

$$\psi = C_1\lambda I_n' - C_2\frac{n}{r}I_n + D_1\lambda K_n' - D_2\frac{n}{r}K_n$$

$$\chi = C_2\lambda I_n' - C_1\frac{n}{r}I_n + D_2\lambda K_n' - D_1\frac{n}{r}K_n \tag{1.8}$$

$$\omega = \frac{r\psi}{2(1-\nu)} + C_3 I_n + D_3 K_n$$

Здесь $I_n = I_n(\lambda r)$ — модифицированные функции Бесселя, $K_n = K_n(\lambda r)$ — функции Макдональда; C_i, D_i ($i = 1, 2, 3$) — произвольные постоянные, определяемые условиями на боковых поверхностях цилиндра для каждого члена двойного тригонометрического ряда. Если длина цилиндра $2l$, то значениями λ будут $\lambda_m = m\pi/l$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$). В случае сплошного цилиндра постоянные $D_i = 0$. Аналогичным образом строятся решения при иных комбинациях тригонометрических функций в типовых членах рядов (1.4).

2. Удовлетворение граничным условиям на торцах цилиндра $z = \pm l$ приводит, вообще говоря, к необходимости решать бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для произвольных постоянных. Один способ составления таких систем состоит в использовании однородных решений. При этом существенную помощь могут оказать соотношения обобщенной ортогональности, подобные указанным П. А. Шиффом для случая осесимметричной деформации цилиндра [1] и П. Ф. Папковичем для плоской задачи теории упругости [3]. Покажем, что соотношение обобщенной ортогональности существует и в случае общей задачи о равновесии упругого цилиндра.

Рассмотрим следующие однородные граничные условия на боковых поверхностях цилиндра: 1) отсутствуют напряжения ($\sigma_r = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0$), 2) отсутствуют перемещения ($u = v = w = 0$), 3) отсутствуют нормальное перемещение и касательные напряжения ($u = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0$), 4) отсутствуют нормальное напряжение и касательные перемещения ($\sigma_r = v = w = 0$). Обращаясь к формулам (1.6) и (1.7) при $r = b$ и $r = a$ соответственно для случаев 1) — 4), находим

$$\omega' = \psi, \quad \psi' = n\chi' + \lambda^2\omega, \quad r^2\chi' = r\chi + n\omega \tag{2.1}$$

$$\omega = 0, \quad \chi = 0, \quad \omega' = 2\psi \tag{2.2}$$

$$\omega' = 0, \quad \psi = 0, \quad r^2\chi' = r\chi + n\omega \tag{2.3}$$

$$\omega = 0, \quad \chi = 0, \quad \psi = r\psi' + \omega' \tag{2.4}$$

Подстановка выражений (1.8) для функций ψ, χ, ω в каждое из условий (2.1) — (2.4) приводит к системе шести линейных однородных уравнений относительно постоянных C_i, D_i (для сплошного цилиндра уравнений будет три); ненулевые решения этих систем имеют место при равенстве нулю соответствующих определителей. Трансцендентное уравнение, получающееся в результате раскрытия такого определителя, определяет собственные значения соответствующей однородной задачи — параметры λ_i.

Так, для сплошного цилиндра ($a = 1$, $b = 0$) имеют место следующие трансцендентные уравнения, соответствующие случаям 1) — 4):

$$\begin{gathered}[\lambda^6 + 3n^2\lambda^4 + (3n^2 - 3 + 2\nu)\, n^2\lambda^2 + n^4(n^2 - 1)]\, I_n^3(\lambda) - 2\,[\lambda^4 - \\ - (1 - 2\nu)\, n^2\lambda^2 - 2(1-\nu)\, n^2(n^2 - 1)]\, \lambda I_n^2(\lambda)\, I_n'(\lambda) - [\lambda^4 + 2\,(n^2 + 1 - \\ - \nu)\,\lambda^2 + n^2(n^2 - 1)]\,\lambda^2 I_n(\lambda)\, I_n'^2(\lambda) + 2\,[\lambda^2 - 2\,(1 - \nu)(n^2 - \\ - 1)]\,\lambda^3 I_n'^3(\lambda) = 0\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}4\,(1 - \nu)\, n^2 I_n^3(\lambda) + (\lambda^2 + n^2)\,\lambda I_n^2(\lambda)\, I_n'(\lambda) - \\ - 4\,(1 - \nu)\,\lambda^2 I_n(\lambda)\, I_n'^2(\lambda) - \lambda^3 I_n'^3(\lambda) = 0\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}(\lambda^2 + n^2)\, n^2 I_n^3(\lambda) + 4\,(1 - \nu)\,\lambda I_n^2(\lambda)\, I_n'(\lambda) + \\ + [2\,(1 - \nu)\,\lambda^2 - n^2]\,\lambda^2 I_n(\lambda)\, I_n'^2(\lambda) - 4\,(1 - \nu)\,\lambda^3 I_n'^3(\lambda) = 0\end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}4\,(1 - \nu)\, n^2 I_n^3(\lambda) + [(3 - 2\nu)\,\lambda^2 + n^2]\,\lambda I_n^2(\lambda)\, I_n'(\lambda) - \\ - 4\,(1 - \nu)\,\lambda^2 I_n(\lambda)\, I_n'^2(\lambda) - \lambda^3 I_n'^3(\lambda) = 0\end{gathered} \tag{2.8}$$

Уравнение (2.5) приведено также в [4].

Докажем следующее соотношение ортогональности:

$$J \equiv \int_b^a (u_j^* \tau_k^* + v_j^* \theta_k^* - \sigma_j^* w_k^*)\, r dr = 0 \quad (j \neq k) \tag{2.9}$$

Здесь величины u^*, v^*, w^*, $\tau^* = \tau_{zr}^*$, $\theta^* = \tau_{z\varphi}^*$, $\sigma^* = \sigma_z^*$ определяются формулами (1.6), (1.7), а индексы j и k соответствуют значениям собственных чисел λ_j^2 и λ_k^2.

Для доказательства подставим в интеграл (2.9) выражения (1.6), (1.7) и преобразуем третье слагаемое интегрированием по частям

$$-\int_b^a \sigma_j^* w_k^* r dr = 2G\lambda_k \int_b^a \left[\frac{n^2}{r}\omega_j + n\chi_j + (r\psi_j - r\omega_j')'\right] \omega_k dr =$$

$$= 2G\lambda_h \left\{[r(\psi_j - \omega_j')\,\omega_k]_b^a + \int_b^a \left[\left(\frac{n^2}{r}\omega_j + n\chi_j\right)\omega_k + (\omega_j' - \psi_j)\,\omega_k' r\right] dr\right\} \tag{2.10}$$

Внеинтегральное слагаемое в формуле (2.10) обращается в нуль при любом типе условий (2.1) — (2.4), вследствие чего интеграл (2.9) принимает вид

$$J = 2G\lambda_k I \tag{2.11}$$

$$I = \int_b^a \left[\psi_j \omega_k' + \omega_j' \psi_k - \frac{n}{r}(\chi_j \omega_k + \omega_j \chi_k) - 2(\psi_j \psi_k + \chi_j \chi_k)\right] r dr$$

Рассмотрим выражение $\lambda_k^2 I$. Первое слагаемое в нем интегрируем по частям

$$\lambda_k^2 \int_b^a \psi_j \omega_k' r dr = \lambda_k^2 [\psi_j \omega_k r]_b^a - \lambda_k^2 \int_b^a (\psi_j r)' \omega_k dr \tag{2.12}$$

В оставшихся слагаемых и в интеграле, стоящем в правой части соотношения (2.12), исключим произведения $\lambda_k^2\psi_k$, $\lambda_k^2\chi_k$, $\lambda_k^2\omega_k$ при помощи дифференциальных уравнений (1.5). После ряда вычислений получим

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 I = \int_b^a \Big\{ & \frac{1}{(1-\nu)\, r}\left[(\psi_j r)'(\psi_k r)' + n^2 \chi_j \chi_k + n(\psi_j r)' \chi_k + n\chi_j (\psi_k r)'\right] + \\ & + \frac{n^3}{r^2}(\omega_j \chi_k + \chi_j \omega_k) + 2r(\psi_j' \psi_k' + \chi_j' \chi_k') + \omega_j' \left[\frac{(\psi_k r)'}{r}\right]' + \\ & + \left[\frac{(\psi_j r)'}{r}\right]' \omega_k' + nr\left[\omega_j' \left(\frac{\chi_k}{r}\right)' + \left(\frac{\chi_j}{r}\right)' \omega_k'\right] + \frac{4n}{r}(\psi_j \chi_k + \chi_j \psi_k) - \\ & - n^2 \left[\psi_j \left(\frac{\omega_k}{r}\right)' + \left(\frac{\omega_j}{r}\right)' \psi_k\right] + \frac{2}{r}(n^2+1)(\psi_j \psi_k + \chi_j \chi_k)\Big\} dr + \\ & + \left[\psi_j \left(\lambda_k^2 r + \frac{n^2}{r}\right)\omega_k - \{n\chi_j + (\psi_j r)'\}\,\omega_k' - \frac{n}{r}\omega_j (\chi_k r)' - 2r(\psi_j \psi_k' + \chi_j \chi_k')\right]_b^a \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для получения результата (2.13) надо произвести интегрирование по частям следующего выражения:

$$\int_b^a \left[\frac{n^2}{r}\psi_j'\omega_k - n\left(\chi_j\omega_k'' + \omega_j\chi_k'' + \frac{\omega_j'\chi_k}{r}\right) - \right.$$

$$\left. - (\psi_j r)'\omega_k'' - 2\psi_j(\psi_k' r)' - 2\chi_j(\chi_k' r)'\right] dr$$

Заметим, что значение интегралов (2.13) не изменяется при перестановке индексов j и k.

Поменяем теперь в (2.13) индексы j и k и вычтем полученное выражение из (2.13); интегралы при этом сократятся, а сумма внеинтегральных слагаемых обращается в нуль при однородных граничных условиях (2.1) — (2.4). Отсюда следует, что $I = 0$ при $j \neq k$. В силу (2.11) искомое соотношение ортогональности (2.9) доказано.

Соотношение (2.9) позволяет получить точное решение задачи о равновесии цилиндра в случае, если на торцах цилиндра $z = \pm l$ заданы нормальное напряжение и касательные перемещения (σ_z, u, v) или если заданы касательные напряжения и нормальное перемещение (τ_{zr}, $\tau_{z\varphi}$, w).

3. В качестве примера рассмотрим первый вариант торцевых условий, причем для простоты будем считать их симметричными относительно плоскости $z = 0$ (кососимметричный случай рассматривается аналогичным способом). Раскладывая торцевые значения заданных величин в ряды по углу φ, получим

$$u(r, \varphi, \pm l) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{\,l}(r)\cos n\varphi, \qquad v(r, \varphi, \pm l) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^{\,l}(r)\sin n\varphi$$

$$\sigma_z(r, \varphi, \pm l) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{zn}^{\,l}(r)\cos n\varphi \tag{3.1}$$

Составляя ряды из решений (1.3), параметры λ_j для которых определяются одной из совокупностей условий (2.1) — (2.4), имеем

$$u(r, \varphi, z) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{jn}u_{jn}^*(r)\cos n\varphi\cos\lambda_j z$$

$$v(r, \varphi, z) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{jn}v_{jn}^*(r)\sin n\varphi\cos\lambda_j z$$

$$\sigma_z(r, \varphi, z) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{jn}\sigma_{jn}^*(r)\cos n\varphi\cos\lambda_j z \tag{3.2}$$

где A_{jn} — произвольные постоянные, подлежащие определению из торцевых граничных условий; последние в данной задаче имеют следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{jn}u_{jn}^*(r)\cos\lambda_j l = u_n^{\,l}(r)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{jn}v_{jn}^*(r)\cos\lambda_j l = v_n^{\,l}(r)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{jn}\sigma_{jn}^*(r)\cos\lambda_j l = \sigma_{zn}^{\,l}(r) \tag{3.3}$$

Постоянные A_{jn} можно найти из уравнений (3.3), если использовать соотношение (2.9). Умножим первое уравнение (3.3) на $r\tau_{kn}^*(r)$, второе — на $r\theta_{kn}^*(r)$, третье — на $-rw_{kn}^*(r)$, сложим полученные произведения и проинтегрируем по r от b до a. Тогда из сумм останутся только слагаемые, для которых индекс $j = k$ в силу соотношений обобщенной ортогональности, и искомые постоянные имеют вид

$$A_{kn} = \frac{1}{J_k \cos \lambda_k l} \int_b^a (u_n{}^l \tau_{kn}{}^* + v_n{}^l \theta_{kn}{}^* - \sigma_{zn}{}^l w_{kn}{}^*)\, r dr \tag{3.4}$$

где J_k — значение интеграла (2.9) при $j = k$.

Для завершения анализа получим выражение величины J_k. Из формул (2.11), (2.13) следует

$$\begin{aligned} J_k = 2G\lambda_k \lim_{\lambda \to \lambda_k} \frac{1}{\lambda^2 - \lambda_k{}^2} \Big[& \left(\lambda^2 r + \frac{n^2}{r}\right) \omega\psi_k + \frac{n}{r}\, \omega (\chi_k r)' + \\ & + n\chi\omega_k' + (\psi r)'\, \omega_k' + 2r\psi\psi_k' + 2r\chi\chi_k' - \psi\left(\lambda_k{}^2 r + \frac{n^2}{r}\right) \omega_k - \\ & - \frac{n}{r}\, (\chi r)'\, \omega_k - \omega' \{n\chi_k + (\psi_k r)'\} - 2r\psi'\psi_k - 2r\chi'\chi_k \Big]_b^a \end{aligned} \tag{3.5}$$

Раскрывая в выражении (3.5) неопределенность по правилу Лопиталя и используя формулы дифференцирования по параметру λ функций ψ, χ, ω и их производных, после перехода к пределу получим

$$\begin{aligned} J_k = \frac{2G}{\lambda_k} \Big[& (\lambda_k{}^2 r^2 + n^2) \left\{ \psi_k \omega_k' - (\psi_k r)' \frac{\omega_k}{r} - n \frac{\omega_k}{r} \chi_k - \psi_k{}^2 - \chi_k{}^2 \right\} - \\ & - \frac{1}{2(1-\nu)} \{(\psi_k r)' + n\chi_k\}^2 + (\psi_k r)'\, \omega_k' + (\lambda_k{}^2 r^2 - n^2)\, \psi_k \frac{\omega_k}{r} + \\ & + (\psi_k' r)^2 - \psi_k{}^2 + (\chi_k' r)^2 - \chi_k{}^2 + n \left\{ \chi_k \omega_k' + (\chi_k r)' \left(\omega_k' - \frac{\omega_k}{r} \right) - 4\psi_k \chi_k \right\} \Big]_b^a \end{aligned} \tag{3.6}$$

При вычислении выражения (3.6) использованы уравнения (1.5).

Конкретные выражения для величины J_k при однородных граничных условиях 1) — 4) на поверхностях цилиндра получаем при учете равенств (2.1) — (2.4); имеем соответственно

$$J_k = \frac{2G}{\lambda_k} \left[\lambda_k{}^2 r^2 \left(\frac{\psi_k \omega_k}{r} - \chi_k{}^2 \right) - \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \psi_k + 2n\chi_k + (\lambda_k{}^2 r^2 + n^2) \frac{\omega_k}{r} \right\}^2 \right]_b^a$$

$$J_k = \frac{2G}{\lambda_k} \left[\lambda_k{}^2 r^2 \psi_k{}^2 + (n\psi_k + \chi_k' r)^2 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \{(\psi_k r)'\}^2 \right]_b^a$$

$$J_k = \frac{2G}{\lambda_k} \left[(\psi_k' r)^2 - (\lambda_k{}^2 r^2 + n^2) \left(\omega_k \psi_k' + \frac{n}{r} \chi_k \omega_k + \chi_k{}^2 \right) - \frac{1}{2(1-\nu)} (r\psi_k' + n\chi_k)^2 \right]_b^a$$

$$J_k = \frac{2G}{\lambda_k} \left[(\chi_k' r)^2 + nr\omega_k' \chi_k' + (\lambda_k{}^2 r^2 + n^2)\, \psi_k (\omega_k' - \psi_k) - \frac{1}{2(1-\nu)} (2\psi_k - \omega_k')^2 \right]_b^a$$

Поступила 12 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Schiff P. A. Sur l'equilibre d'un cylindre d'elastiqe. J. math. pures et appl. Ser. 3, 1883, t. 9.
2. Нуллер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
3. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы. Докл. АН СССР, 1940, т. 27, № 4.
4. Dougall J. An analytical theory of the equilibrium of isotropic elastic rod of circular section. Trans. Roy. Soc. Edinbourg, 1914, vol. 49, pt. 4, No. 17.