

ЭХО-СИГНАЛ КОНЕЧНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ОТ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Я. А. Метсавээр

(Таллин)

Предлагается приближенный метод вычисления эхо-сигнала конечного центросимметричного импульса давления от бесконечной упругой цилиндрической оболочки, находящейся в безграничной идеальной сжимаемой жидкости. Движение оболочки описывается при помощи линейной теории оболочек типа Тимошенко. Задача решается путем трехкратного применения интегральных преобразований (по времени и по продольной координате — преобразование Фурье, а по полярному углу — преобразование Зоммерфельда — Ватсона).

В работах [1-3] изучено нестационарное взаимодействие сферических импульсов давления в жидкости с упругой цилиндрической оболочкой, причем для решения задачи применено преобразование Лапласа по времени, преобразование Фурье по продольной координате и либо разложение в ряд Фурье [1,3], либо преобразование Фурье [2] по полярному углу. Однако вычисление быстроизменяющихся компонентов решения в виде ряда Фурье затруднено ввиду его медленной сходимости. При применении преобразования Фурье по полярному углу появляются трудности при обращении преобразования; метод перевала, использованный в работе [2], не позволяет правильно учесть влияние упругих волн, распространяющихся в оболочке.

В данной работе по полярному углу применяется преобразование Зоммерфельда — Ватсона, которое допускает более точное обращение. По времени, вместо преобразования Лапласа, использованного в [1-3], выбрано преобразование Фурье. Решение в пространстве преобразования Фурье по времени может быть трактовано как решение соответствующей стационарной задачи, а это позволяет использовать накопленный опыт решения стационарных задач и анализировать решения в пространстве преобразования.

Работа представляет собой распространение на цилиндрическую оболочку метода составления алгоритма¹, выработанного на основе [4-6].

1. Постановка задачи. Пусть R, ϑ, Ξ — цилиндрические координаты, t — время ($t = 0$ при выходе начала импульса из источника), $P_i(R, \vartheta, \Xi, t)$ — падающий импульс давления, $P_e(R, \vartheta, \Xi, t)$ — рассеянное поле давления (эхо-сигнал), c — скорость звука в жидкости, ρ — плотность жидкости, L — расстояние от центра источника, R_0 — расстояние от центра источника до оси оболочки, R_k, h — радиус срединной поверхности и толщина оболочки, E, ν, ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки, u, v, w — перемещения, ψ_ξ, ψ_ϑ — углы поворота в теории оболочек типа Тимошенко, Q — нормальное давление действующее на оболочку, t_p — продолжительность падающего импульса.

¹ Метсавээр Я. А. Алгоритм вычисления эхо-сигналов от упругой сферической оболочки в жидкости путем суммирования отдельных групп бегущих волн. Препринт № 3 Ин-та кибернетики АН ЭССР, Таллин, 1971.

Используем безразмерные цилиндрические координаты

$$r = R / R_k, \quad \vartheta, \quad \xi = \Xi / R_k, \quad \tau = ct / R_k \quad (1.1)$$

и безразмерные величины

$$p_i(r, \vartheta, \xi, \tau) = \frac{P_i(R, \vartheta, \Xi, t)}{\rho c^2}, \quad p_e(r, \vartheta, \xi, \tau) = \frac{P_e(R, \vartheta, \Xi, t)}{\rho c^2}$$

$$q = \frac{Q}{\rho c^2}, \quad a^2 = \frac{h^2}{12R_k^2}$$

$$\Phi_1 = \frac{u}{R_k}, \quad \Phi_2 = \psi_\xi, \quad \Phi_3 = \frac{v}{R_k}, \quad \Phi_4 = \psi_\vartheta, \quad \Phi_5 = \frac{w}{R_k}, \quad l = \frac{L}{R_k}, \quad r_0 = \frac{R_0}{R_k}$$

$$\alpha = \frac{1-\nu}{2}, \quad \beta = \frac{(1-\nu^2)\rho_1 c^2}{E}, \quad \kappa = \frac{h\rho_1}{R_k\rho\beta}, \quad \tau_p = \frac{ct_p}{R_k} \quad (1.2)$$

На основании геометрии

$$l = (\xi^2 + y^2)^{1/2}, \quad y = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta)^{1/2} \quad (1.3)$$

Пусть источник с центром $O(r_0, 0, 0)$ излучает в идеальную сжимаемую жидкость конечный сферический импульс давления

$$p_i = A_0 l^{-1} f(\tau - l) [H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_p)] \quad (1.4)$$

Здесь A_0 — постоянная, определяющая амплитуду импульса, f — закон изменения давления в импульсе, H — функция Хевисайда. Импульс (1.4) падает на оболочку со срединной поверхностью $r = 1$ и, рассеиваясь на ней, вызывает в оболочке упругие волны, которые в свою очередь возбуждают в окружающей среде излученное поле давления.

Для описания упругих волн в оболочке используем уравнения теории оболочек типа Тимошенко [7]

$$L_{ij} \Phi_j = -\delta_{i5} \kappa^{-1} q \quad i = 1, 2, \dots, 5; \quad j = 1, 2, \dots, 5 \quad (1.5)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1 + a^2) \alpha \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad L_{12} = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)$$

$$L_{13} = \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \vartheta}, \quad L_{14} = 0, \quad L_{15} = \nu \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{21} = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right)$$

$$L_{22} = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \alpha \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - k_\xi^2 \alpha, \quad L_{23} = 0, \quad L_{24} = a^2 \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \vartheta}$$

$$L_{25} = -k_\xi^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{31} = \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \vartheta}, \quad L_{32} = 0, \quad L_{33} = \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1 + a^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - k_\vartheta^2 \alpha \right) - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$L_{34} = a^2 \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + k_\vartheta^2 \alpha - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + k_\vartheta^2 \alpha$$

$$L_{35} = (1 + a^2) (1 + k_\vartheta^2 \alpha) \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad L_{41} = 0, \quad L_{42} = \frac{1 + \nu}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \vartheta}$$

$$L_{43} = a^2 \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + k_\vartheta^2 \alpha - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) + k_\vartheta^2 \alpha, \quad L_{44} = a^2 \left(\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - k_\vartheta^2 \alpha - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) - k_\vartheta^2 \alpha,$$

$$L_{45} = -[(1 + a^2) k_\vartheta^2 \alpha + a^2] \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$L_{51} = -\nu \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{52} = k_\xi^2 \alpha \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{53} = -(1 + a^2) (1 + k_\vartheta^2 \alpha) \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$L_{54} = [(1 + a^2) k_\vartheta^2 \alpha + a^2] \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad L_{55} = k_\xi^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1 + a^2) \left(k_\vartheta^2 \alpha \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - 1 \right) - \beta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}, \quad k_\vartheta^2 = k_\xi^2 = \frac{\pi^2}{12}$$

Рассеянное поле давления p_e , состоящее из поля, отраженного от поверхности оболочки, и из излученного поля, должно, как и падающий импульс (1.4), удовлетворять волновому уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] p_e = 0 \quad (1.6)$$

На срединной поверхности примем следующие условия контакта:

$$[p_i + p_e]_{r=1} = -q, \quad [\partial p_i / \partial r + \partial p_e / \partial r]_{r=1} = -\partial^2 \Phi_5 / \partial \tau^2 \quad (1.7)$$

Так как по времени применяется преобразование Фурье, то начальные условия в обычном смысле не формулируются, но при $\tau \rightarrow \pm \infty$ все компоненты решения предполагаются равными нулю.

2. Решение в пространстве изображений. Определим преобразование Фурье по времени τ и по продольной координате ξ по формулам

$$p(r, \vartheta, \xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p^F(r, \vartheta, \xi; x) e^{-ix\tau} dx$$

$$p^F(r, \vartheta, \xi; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p(r, \vartheta, \xi, \tau) e^{ix\tau} d\tau \quad (2.1)$$

$$p^F(r, \vartheta, \xi; x) = \int_{-\infty}^{\infty} p^{FF}(r, \vartheta; \lambda, x) e^{-i\lambda\xi} d\lambda$$

$$p^{FF}(r, \vartheta; \lambda, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^F(r, \vartheta, \xi; x) e^{i\lambda\xi} d\xi \quad (2.2)$$

На основании (2.1) имеем

$$p_i^F = A_0 l^{-1} g(x) e^{ilx} \quad (2.3)$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_p} f(\tau) e^{ix\tau} d\tau \quad (2.4)$$

Далее, преобразуя (2.3) с учетом (1.3) по формуле (2.2), получим

$$p_i^{FF} = 1/2 i A_0 g(x) H_0^{(1)}(\eta r), \quad \eta = (x^2 - \lambda^2)^{1/2} \quad (2.5)$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Используя «теорему сложения» для $H_0^{(1)}$, представим (2.5) в форме (J_m — функция Бесселя)

$$p_i^{FF} = \frac{1}{2} i A_0 g(x) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(1)}(\eta r_0) J_m(\eta r) \cos m\vartheta, \quad \varepsilon_m = 2 - \delta_{m0} \quad (2.6)$$

Эхо-сигнал в пространстве двукратного преобразования Фурье также может быть представлен в виде ряда. С учетом (2.6) и условия излучения в бесконечности [8]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial p_e^{FF} / \partial r - i\eta p_e^{FF}) = 0 \quad (2.7)$$

ищем преобразованный эхо-сигнал в форме

$$p_e^{FF} = \frac{1}{2} i A_0 g(x) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m H_m^{(1)}(\eta r_0) b_m H_m^{(1)}(\eta r) \cos m\vartheta \quad (2.8)$$

Здесь b_m подлежит вычислению на основе уравнений (1.5) и условий контакта (1.7).

Решение системы (1.5) в пространстве двукратного преобразования Фурье может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{FF} &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{1m} \cos m\vartheta, & \Phi_2^{FF} &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{2m} \cos m\vartheta \\ \Phi_3^{FF} &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{3m} \sin m\vartheta, & \Phi_4^{FF} &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{4m} \sin m\vartheta \\ \Phi_5^{FF} &= \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_{5m} \cos m\vartheta \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.6), (2.8), (2.9) в уравнение (1.5) и условия контакта (1.7) после их преобразования по формулам (2.1), (2.2) в пространство двукратного преобразования Фурье, получим формулу

$$b_m = - \frac{x^2 A_{55} J_m(\eta) - \eta \kappa D \partial J_m(\eta) / \partial \eta}{x^2 A_{55} H_m^{(1)}(\eta) - \eta \kappa D \partial H_m^{(1)}(\eta) / \partial \eta}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} D &= \det |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 5 \\ a_{11} &= \lambda^2 + (1 + a^2) \alpha m^2 - \beta x^2, \quad a_{12} = a^2 (\lambda^2 - \alpha m^2 - \beta x^2) \\ a_{13} &= -i \lambda m (1 + \nu) / 2, \quad a_{14} = 0, \quad a_{15} = -i \nu \lambda, \quad a_{21} = a^2 (\lambda^2 - \\ &\quad - \alpha m^2 - \beta x^2), \quad a_{22} = a^2 (\lambda^2 + \alpha m^2 - \beta x^2) + k_\vartheta^2 \alpha, \quad a_{23} = 0 \\ a_{24} &= -i \lambda m a^2 (1 + \nu) / 2, \quad a_{25} = k_\vartheta^2 \alpha i \lambda, \quad a_{31} = -i \lambda m (1 + \nu) / 2 \\ a_{32} &= 0, \quad a_{33} = -\alpha \lambda^2 - (1 + a^2) (m^2 + k_\vartheta^2 \alpha) + \beta x^2, \quad a_{34} = a^2 (m^2 - \\ &\quad - \alpha \lambda^2 + k_\vartheta^2 \alpha + \beta x^2) + k_\vartheta^2 \alpha, \quad a_{35} = -(1 + a^2) (1 + k_\vartheta^2 \alpha) m \\ a_{41} &= 0, \quad a_{42} = -i \lambda m a^2 (1 + \nu) / 2, \quad a_{43} = a^2 (m^2 - \alpha \lambda^2 + k_\vartheta^2 \alpha + \\ &\quad + \beta x^2) + k_\vartheta^2 \alpha, \quad a_{44} = -a^2 (\alpha \lambda^2 + m^2 + k_\vartheta^2 \alpha - \beta x^2) - k_\vartheta^2 \alpha \\ a_{45} &= [(1 + a^2) k_\vartheta^2 \alpha + a^2] m, \quad a_{51} = -i \nu \lambda, \quad a_{52} = k_\vartheta^2 \alpha i \lambda \\ a_{53} &= -(1 + a^2) (1 + k_\vartheta^2 \alpha) m, \quad a_{54} = [(1 + a^2) k_\vartheta^2 \alpha + a^2] m \\ a_{55} &= -k_\vartheta^2 \alpha \lambda^2 - (1 + a^2) (k_\vartheta^2 \alpha m^2 + 1) + \beta x^2 \end{aligned}$$

Здесь A_{55} — соответствующее алгебраическое дополнение определителя D .

Суммирование ряда (2.8) производим при помощи преобразования Зоммерфельда — Ватсона [9]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m F_m \cos m\vartheta = i \int_{\Gamma} F_\mu \sin^{-1} \mu \lambda \cos \mu (\pi - \vartheta) d\mu \quad (2.11)$$

Контур интегрирования Γ , проходя через начало координат, охватывает положительную часть вещественной оси по часовой стрелке на комплексной плоскости μ . С учетом (2.11) преобразованный эхо-сигнал (2.8) может быть переписан в виде интеграла

$$p_e^{FF} = - \frac{1}{2} A_0 g(x) \int_{\Gamma} b_\mu H_\mu^{(1)}(\eta r_0) H_\mu^{(1)}(\eta r) \sin^{-1} \mu \lambda \cos \mu (\pi - \vartheta) d\mu \quad (2.12)$$

Воспользуясь соотношением

$$J_\mu(\eta) = 1/2 [H_\mu^{(1)}(\eta) + H_\mu^{(2)}(\eta)]$$

интеграл (2.12) можно представить в виде

$$p_e^{FF} = \frac{1}{4} A_0 g(x) \int_{\Gamma} F_1^{-1} F_2 R_\mu \sin^{-1} \mu \pi \cos \mu (\pi - \vartheta) d\mu \quad (2.13)$$

Здесь

$$F_{1,2} = x^2 A_{55} - \eta \kappa D [\partial H_\mu^{(1,2)}(\eta) / \partial \eta] [H_\mu^{(1,2)}(\eta)]^{-1} \quad (2.14)$$

$$R_\mu = H_\mu^{(1)}(\eta r_0) H_\mu^{(1)}(\eta r) H_\mu^{(2)}(\eta) [H_\mu^{(1)}(\eta)]^{-1} \quad (2.15)$$

При вычислении $F_{1,2}$ в элементах определителя D всюду надо заменить m на μ , причем μ — комплексное число.

Обратим внимание на то, что функции Ханкеля, входящие в (2.13), собраны частично в R_μ и частично в $F_{1,2}$. Вследствие этого функция R_μ связана только с геометрией оболочки, а функции $F_{1,2}$ — с ее упругостью. В предельном случае, когда $\kappa = 0$, отношение $F_1^{-1} F_2$ равно единице, что соответствует случаю «акустически мягкого» цилиндра.

Воспользуясь теперь соотношениями [10]

$$\cos \mu (\pi - \vartheta) = 1/2 [e^{i\mu (\pi - \vartheta)} + e^{-i\mu (\pi - \vartheta)}]$$

$$\sin^{-1} \mu \pi = -2ie^{i\mu \pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{2i\mu \pi n}$$

и определениями (2.1), (2.2) с учетом (2.13), эхо-сигнал можно представить в виде

$$p_e = -\frac{1}{4} i A_0 \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{-1} F_2 R_\mu e^{i(\mu \vartheta_{nk} - \lambda \xi - x\tau)} d\mu d\lambda dx$$

$$\vartheta_{n1} = \vartheta + 2n\pi, \quad \vartheta_{n2} = 2\pi - \vartheta + 2n\pi \quad (2.16)$$

3. Обращение преобразования Фурье по продольной координате. Представим эхо-сигнал (2.16) в виде

$$p_e = -\frac{1}{4} i A_0 \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \int_{\Gamma} S_{nk} e^{-ix\tau} d\mu dx \quad (3.1)$$

$$S_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} F_1^{-1} F_2 R_\mu \exp [i(\mu \vartheta_{n,k} - \lambda \xi)] d\lambda \quad (3.2)$$

Для вычисления интеграла (3.2) заменим функции Ханкеля, входящие в R_μ , их асимптотическими представлениями Дебая [9]

$$H_\mu^{(1,2)}(\eta) \approx (2/\pi\eta)^{1/2} (1 - z^2)^{-1/4} \exp [\pm i(\sigma - \pi/4)] \quad (3.3)$$

$$\sigma = \eta [(1 - z^2)^{1/2} - z \arccos z], \quad z = \mu\eta^{-1}$$

Подставляя (3.3) в (2.15), имеем

$$R_\mu \approx (2/\pi\eta) (r_0 r)^{-1/2} D(z) \exp \{i\eta [d(z) + z h(z)]\} \quad (3.4)$$

Здесь

$$D(z) = [(1 - z^2 r_0^{-2})(1 - z^2 r^{-2})]^{-1/4}, \quad d(z) = (r_0^2 - z^2)^{1/2} + (r^2 - z^2)^{1/2} - 2(1 - z^2)^{1/2} \quad (3.5)$$

$$h(z) = 2 \arccos z - \arccos(zr_0^{-1}) - \arccos(zr^{-1})$$

При $r_0 \gg 1$, $r \gg 1$ формула (3.5) упрощается к виду

$$D(z) = 1, \quad d(z) = r_0 + r - 2(1 - z^2)^{1/2}, \quad h(z) = 2 \arccos z - \pi \quad (3.6)$$

Функции Ханкеля, входящие в (2.14), предлагается вычислять по более точным формулам. Эта рекомендация основывается на следующих соображениях. При очень малых и при очень больших частотах влияние упругих свойств рассеивателя на рассеянное поле давления оказывается несущественным [10]. Применение асимптотических представлений, справедливых либо при малых, либо при больших частотах, при вычислении функции R_μ приведет лишь к приближенным результатам, а при вычислении F_1 , F_2 может привести к неверным результатам.

Подставляя (3.4) в интеграл (3.2), с учетом представления для η в (2.5) имеем

$$S_{nk} = \frac{2}{\pi} \frac{D(z)}{\sqrt{r_0 r}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_2}{\eta F_1} \exp\{i[(x^2 - \lambda^2)^{1/2} \varphi_{nk}(z) - \lambda \xi]\} d\lambda$$

$$\varphi_{nk}(z) = d(z) + z[h(z) + \vartheta_{nk}] \quad (3.7)$$

Интеграл (3.7) обрабатываем методом перевала. Седловая точка имеет координату

$$\lambda_{nk} = -x\xi [\varphi_{nk}^2(z) + \xi^2]^{-1/2}$$

и, используя стандартную технику, получим формулу

$$S_{nk} = \frac{2D(z)}{\sqrt{r_0 r}} \left(\frac{2x}{i\pi}\right)^{1/2} \frac{\varphi_{nk}(z)}{\psi_{nk}^{3/2}(z)} \left[\frac{F_2}{\eta F_1}\right]_{\lambda=\lambda_{nk}} e^{ix\psi_{nk}(z)} \quad (3.8)$$

$$\psi_{nk}(z) = [\varphi_{nk}^2(z) + \xi^2]^{1/2}$$

4. Обращение преобразования Зоммерфельда — Ватсона. С учетом (3.8) и соотношения для z из (3.3) придадим эхо-сигналу (3.1) вид

$$p_e = A_0 (2r_0 r)^{-1/2} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) M_{nk} e^{-ix\tau} dx \quad (4.1)$$

$$M_{nk} = -\left(\frac{ix}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\Gamma_z} \frac{D(z) \varphi_{nk}(z)}{\psi_{nk}^{3/2}(z)} \left[\frac{F_2}{F_1}\right]_{\lambda=\lambda_{nk}} e^{ix\psi_{nk}(z)} dz \quad (4.2)$$

Здесь контур Γ_z на плоскости z соответствует контуру Γ на плоскости μ .

Для вычисления контурного интеграла (4.2) целесообразно деформировать контур интегрирования Γ_z так, что основной вклад интеграла определяется участком контура, охватывающим полюса в первой четверти плоскости z [11]. На фиг. 1 изображены первоначальный контур интегрирования Γ_z и деформированный контур, состоящий из участков Γ_0 , Γ_∞ , Γ_r . Из работы [11] известно, что вклады интегрирования по участкам Γ_0 ,

Γ_∞ деформированного контура малы и ими можно пренебречь. Вследствие этого основной вклад определяется интегрированием по участку Γ_p деформированного контура.

Для обращения интеграла (4.2) изучим наличия седловых точек. Координаты z_0 седловых точек определяются как решения уравнения

$$h(z_0) + \vartheta_{nk} = 0 \quad (4.3)$$

Это уравнение имеет решения лишь при

$$\vartheta_{nk} \leq \vartheta_0, \quad \vartheta_0 = \arccos(r_0^{-1}) + \arccos(r^{-1})$$

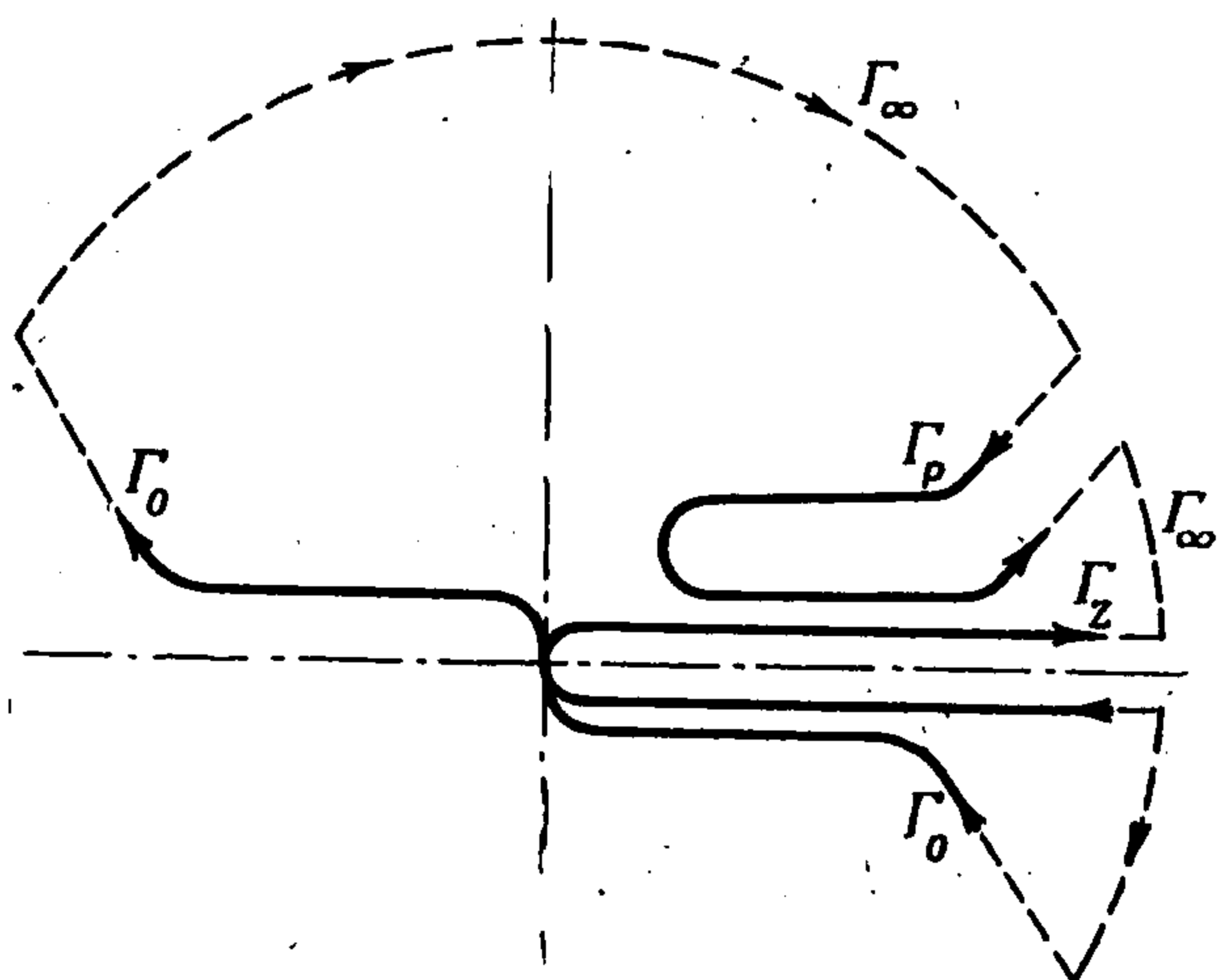
Интеграл, определяющий вклад от седловой точки, может быть представлен в виде

$$M_0 = - \left(\frac{ix}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\Gamma_p} \frac{D(z) \varphi_0(z)}{\psi_0^{3/2}(z)} \left[\frac{F_2}{F_1} \right]_{\lambda=\lambda_0} e^{ix\psi_0(z)} dz \quad (4.4)$$

$$\varphi_0(z) = d(z) + z[h(z) + \vartheta], \quad \psi_0(z) = [\varphi_0^2(z) + \xi^2]^{1/2}, \quad \lambda_0 = -x\xi\psi_0^{-1}(z)$$

Седловая точка с координатой z_0 находится на вещественной оси плоскости z . При $\vartheta = 0$ она находится в точке $z = 0$ и с ростом ϑ от нуля до

ϑ_0 перемещается направо, приближаясь к точке $z = 1$. Так как в интеграле (4.4) нет члена $\sin^{-1}\mu\lambda$, то значение интеграла не меняется из-за того, что при проходе через седловую точку контур Γ_p переходит за вещественную ось плоскости z .



Фиг. 1

При вычислении интеграла (4.4) методом перевала надо учесть, что в первой четверти плоскости z располагаются полюсы, координаты z_s которых являются решениями уравнения $F_1 = 0$, где F_1 определяется

формулой (2.14). В зависимости от того, находится ли седловая точка близко к одному из полюсов или нет, выбираем способ вычисления интеграла (4.4).

Если седловая точка не находится близко ни к одному из полюсов, то, вычисляя интеграл (4.4) по обычному способу метода перевала, имеем

$$M_0 = - D(z_0) C(z_0) d^{1/2}(z_0) \psi_0^{-1}(z_0) (1 - z_0^2)^{1/4} \left[\frac{F_1^{-1} F_2}{F_1} \right]_{\lambda=\lambda_0, z=z_0} e^{ix\psi_0(z_0)}$$

$$C(z_0) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 - z_0^2)^{1/2} \left[(r^2 - z_0^2)^{-1/2} + (r_0^2 - z_0^2)^{-1/2} \right] \right\}^{-1/2}$$

$$\psi_0(z_0) = [d^2(z_0) + \xi^2]^{1/2} \quad (4.5)$$

В случае, когда седловая точка находится близко к полюсу с координатой z_s , то вычисляем интеграл (4.4) способом, предложенным В. А. Фоком в предисловии к работе [12]. Для этого заменяем медленно изменяющуюся подынтегральную функцию

$$E(z) = D(z) \varphi_0(z) \psi_0^{-3/2}(z) [F_2 F_1^{-1}]_{\lambda=\lambda_0}$$

ее приближенным выражением

$$E(z) \approx E_0(z)(z - z_s)^{-1}, \quad E_0(z) = D(z) \varphi_0(z) \psi_0^{-1/2}(z) [(\partial F_1 / \partial z)^{-1} F_2]_{\lambda=\lambda_0, z=z_s} \quad (4.6)$$

После такой замены интеграл (4.4) получит вид

$$M_0 = - \left(\frac{ix}{\pi} \right)^{1/2} \int_{\Gamma_p} E_0(z) (z - z_s)^{-1} e^{ix\psi_0(z)} dz \quad (4.7)$$

В случае, когда полюс с координатой z_s расположен справа от контура наискорейшего спуска, проходящего через седловую точку параллельно мнимой оси плоскости z , интеграл (4.7) определяется формулой

$$M_0 = -i (ix\pi)^{1/2} E_0(z_0) W_T [k_0(z_s - z_0)] e^{ix\psi_0(z_0)}$$

$$W_T(z) = e^{-z^2} \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{\zeta^2} d\zeta \right]$$

$$k_0 = (ix)^{1/2} (1 - z_0^2)^{-1/4} C^{-1}(z_0) d^{1/2}(z_0) \psi_0^{-1/2}(z_0) \quad (4.8)$$

Функция W_T табулирована в работе [12].

Когда седловая точка находится достаточно далеко от полюса, то

$$W_T [k_0(z_s - z_0)] \approx i\pi^{-1/2} k_0^{-1} (z_s - z_0)^{-1} \quad (4.9)$$

Подставляя (4.9) с учетом (4.6) в (4.8), получим результат, соответствующий формуле (4.5), полученной обычным методом перевала.

В случае, когда полюс с координатой z_s расположен слева от контура наискорейшего спуска метода перевала, вычисление интеграла (4.7) дает

$$M_0 = M_s + i (ix\pi)^{1/2} E_0(z_0) W_T [k_0(z_0 - z_s)] e^{ix\psi_0(z_0)}$$

$$M_s = -2i (ix\pi)^{1/2} E_0(z_s^*) e^{ix\psi_0(z_s^*)} \quad (4.10)$$

Здесь M_s — вклад интеграла (4.7) в полюсе с координатой z_s .

При $\vartheta_{nk} > \vartheta_0$ значение интеграла (4.2) определяется в виде суммы вкладов в полюсах с координатами z_s первой четверти плоскости z

$$M_{nk} = -2i (ix\pi)^{1/2} D(z_s) \varphi_{nk}(z_s) \psi_{nk}^{-1/2}(z_s) [(\partial F_1 / \partial z)^{-1} F_2]_{\lambda=\lambda_{nk}, z=z_s} e^{ix\psi_{nk}(z_s^*)} \quad (4.11)$$

На основании предыдущего эхо-сигнал (4.1) может быть представлен в виде

$$p_e = B_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \left[p_0^F + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} p_{snk}^F \right] dx \quad (4.12)$$

$$B_0 = A_0 (2r_0 r)^{-1/2} \quad (4.13)$$

$$p_0^F = G_0(x) e^{-ix[\tau - \psi_0(z_0)]}, \quad p_{snk} = G_{snk}(x) e^{-ix[\tau - \psi_{nk}(z_s^*)]} \quad (4.14)$$

Функция $G_0(x)$ в (4.14) в зависимости от того, находится ли седловая точка далеко или близко к полюсу с координатой z_s , вычисляется по одной

из следующих формул:

$$G_0(x) = -D(z_0) C(z_0) d^{1/2}(z_0) \psi_0^{-1}(z_0) (1 - z_0^2)^{1/4} [F_1^{-1} F_2]_{\lambda=\lambda_0, z=z_0} \quad (4.15)$$

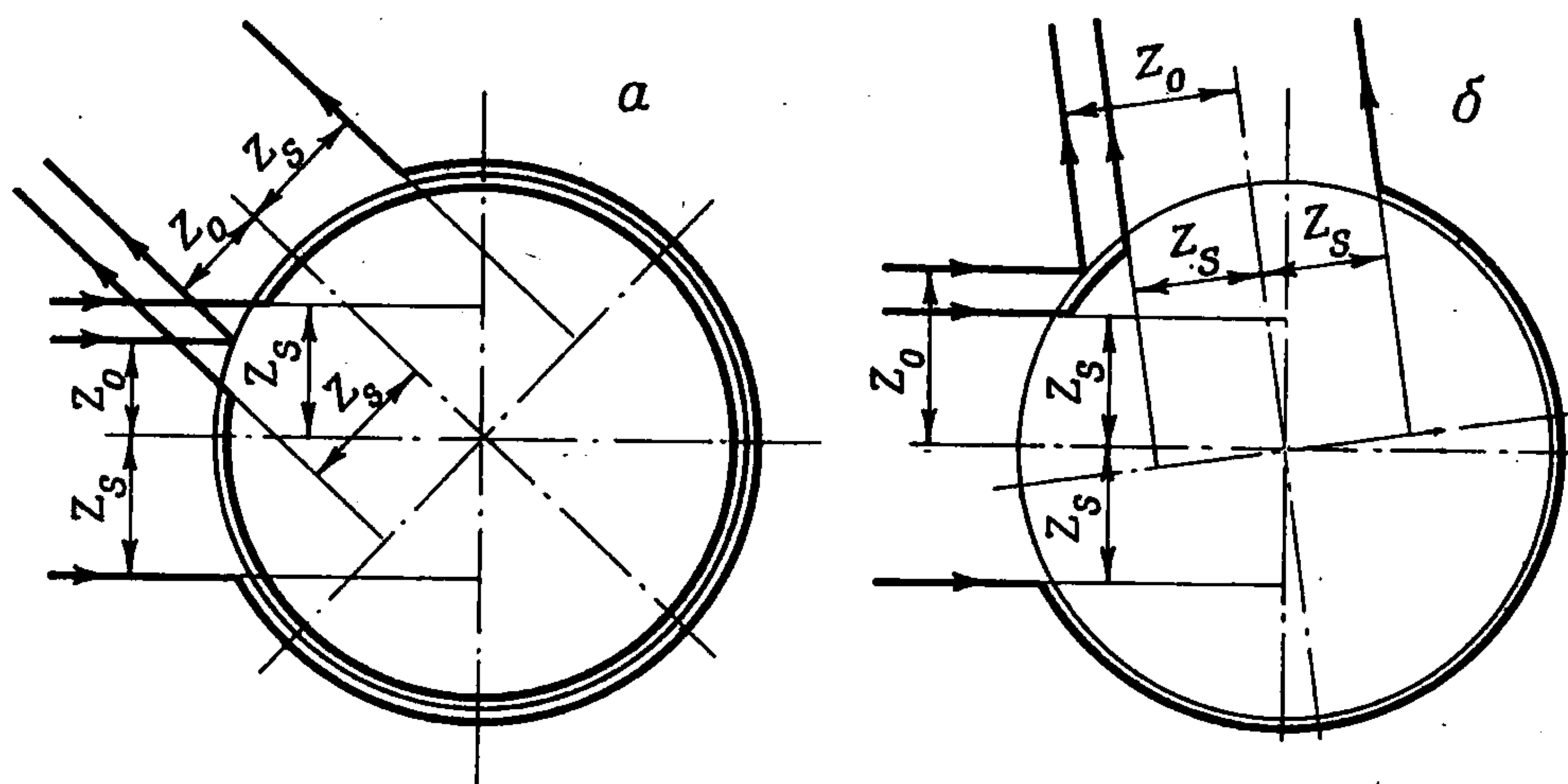
$$G_0(x) = -i(ix\pi)^{1/2} E_0(z_0) W_T(k_0 | z_s - z_0 |) \text{sign}(\text{Re } z_s - z_0) \quad (4.16)$$

Функция $G_{snk}(x)$ в (4.14) вычисляется по формуле

$$G_{snk}(x) = -2i(ix\pi)^{1/2} D(z_s) \varphi_{nk}(z_s) \psi_{nk}^{-3/2}(z_s) [(\partial F_1 / \partial z)^{-1} F_2]_{\lambda=\lambda_{nk}, z=z_s} H(\vartheta_{nk} - \vartheta_s) \quad (4.17)$$

$$\vartheta_s = -h[\text{Re}(z_s)]$$

Здесь величина ϑ_s определена при помощи (4.3) из условия, что седловая точка находится под полюсом с координатой z_s .



Фиг. 2

Функции p_0^F , p_{snk}^F в (4.12) представляют собой компоненты стационарного эхо, т. е. эхо-сигнала, возникающего при падении на оболочку стационарной сферической волны

$$p_i = A_0 l^{-1} e^{-ix(\tau-l)}$$

Функция p_0^F определяет эхо, отраженное от поверхности оболочки по законам геометрической оптики, а остальные p_{snk}^F — эхо, излученное периферическими и ползущими волнами, распространяющимися соответственно по ($k = 1$) и против ($k = 2$) направления полярного угла ϑ . Для вычисления излученного компонента эхо-сигнала в (4.12) суммируются вклады от различных мод (по s) периферических и ползущих волн и вклады от различных оборотов (по n) этих волн вокруг оболочки. Величины $\psi_0(z_0)$, $\psi_{nk}(z_s)$ в (4.14) определяют времена, затраченные на пути от источника к точке наблюдения, причем $d(z_0)$, $d(z_s)$ определяют время, затраченное на распространение в жидкости от источника к оболочке и от нее к точке наблюдения, а $h(z_s) + \vartheta_{nk}$ — на пути в оболочке или в жидкости вокруг оболочки.

На фиг. 2 изображены проекции на плоскость $\xi = 0$ путей от источника к точке наблюдения отраженной волны и одной моды периферических волн по ($k = 1$) и против ($k = 2$) направления полярного угла ϑ при $r \gg 1$, $r_0 \gg 1$. На фиг. 2, а изображены пути для p_0^F , p_{sn1}^F при $n = 1$ и p_{sn2}^F

при $n = 0$ в случае $\vartheta < \vartheta_s$, а на фиг. 2, б — пути для p_0^F и p_{sn1} , p_{sn2} при $n = 0$ в случае $\vartheta > \vartheta_s$.

5. Обращение преобразования Фурье по времени. Перепишем эхо-сигнал (4.12) в виде

$$p_e = B_0 \left[I_0 + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} I_{snk} \right] \quad (5.1)$$

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) G_0(x) \exp \{ -ix [\tau - \psi_0(z_0)] \} dx \quad (5.2)$$

$$I_{snk} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) G_{snk}(x) \exp \{ -ix [\tau - \psi_{nk}(z_s)] \} dx \quad (5.3)$$

Интегралы (5.2), (5.3) предлагается вычислять одним и тем же способом, поэтому рассмотрим обращение только интеграла (5.2).

При помощи теоремы о свертке интеграл (5.2) может быть представлен в виде

$$I_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_p} f(\zeta) T(\tau - \zeta) d\zeta \quad (5.4)$$

$$T(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp [b(x) - ix\tau] dx, \quad b(x) = \ln G_0(x) + ix\psi_0(z_0) \quad (5.5)$$

Здесь $f(\tau)$ — закон изменения давления в падающем импульсе (1.4). Рассмотрим обращение интеграла (5.5) с применением аппроксимации

$$b(x) \approx b_0 + b_1(x - x_0) - b_2(x - x_0)^2 \quad (5.6)$$

где x_0 — характерная частота падающего на оболочку импульса (1.4). При отсутствии такой характерной частоты в качестве x_0 следует брать частоту, соответствующую максимальному значению функции $g(x)$. Коэффициенты b_0 , b_1 , b_2 в (5.6) могут быть определены как коэффициенты разложений функции $b(x)$ в ряд Тейлора при $x = x_0$ или некоторым иным способом аппроксимации $b(x)$.

Подставляя (5.6) в интеграл в (5.5), после вычислений получим для $T(\tau)$ следующую приближенную формулу:

$$T(\tau) = (\pi / b_2)^{1/2} \exp [b_0 - ix_0\tau - (\tau + ib_1)^2 (4b_2)^{-1}] \quad (5.7)$$

Если давление в падающем импульсе (1.4) меняется по закону

$$f(\tau) = e^{-ix_0\tau} \quad (5.8)$$

то, подставляя (5.7), (5.8) в (5.4), получим

$$I_0 = 1/2 [\Phi(y_0) - \Phi(y_p)] \exp(b_0 - ix_0\tau) \quad (5.9)$$

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-u^2} du$$

$$y_0 = (\tau + ib_1) 2^{-1} b_2^{-1/2}, \quad y_p = (\tau + ib_1 - \tau_p) 2^{-1} b_2^{-1/2}$$

В предельном случае $b_2 = 0$, $\operatorname{Re} b_1 = 0$ формула (5.9) принимает вид

$$I_0 = G_0(x_0) e^{-ix_0[\tau - \psi_0(z_0)]} [H(\tau - \operatorname{Im} b_1) - H(\tau - \operatorname{Im} b_1 - \tau_p)]$$

Эхо-сигнал (5.1) состоит из одного отраженного эхо-импульса I_0 и из двух ($k = 1, 2$) двойных ($s = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$) серий излученных эхо-импульсов I_{snk} . Из-за затухания число излученных импульсов, амплитуды которых практически отличаются от нуля, не оказывается большим, и ряды в (5.1) сходятся быстро.

На основании использованных аппроксимаций и приближенных методов вычисления интегралов применение предложенного метода вычисления эхо-сигнала может быть оправдано лишь при падающих импульсах, имеющих колебательный характер, и характерная частота x_0 которых велика. С другой стороны, на основании гипотез теории оболочек типа Тимошенко, характерная частота x_0 не должна быть так велика, что длина волны падающего импульса оказалась бы сравнимой с толщиной оболочки. Допустимые значения для характерной частоты x_0 могут быть охарактеризованы неравенствами

$$R_k h^{-1} > x_0 \pi^{-1} > 1$$

причем знаки неравенств здесь следует понимать в достаточно сильном смысле.

Поступила 6 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Huang H., Wang Y. F. Transient interactions of spherical acoustic waves and a cylindrical elastic shell. J. Acoust. Soc. America, 1970, vol. 48, No. 1, pt. 2.
2. Huang H., Wang Y. E. Early-time interaction of spherical acoustic waves and a cylindrical elastic shell. J. Acoust. Soc. America, 1971, vol. 50, No. 3., pt 2.
3. Кубенко В. Д. Взаємодія сферичної хвилі та кругової циліндричної оболонки в акустичному середовищі. Доп. АН УРСР. Сер. А, 1970, № 3.
4. Метсавэр Я. О рассеянии волн упругими сферическими оболочками в акустической среде. Изв. АН ЭССР. Физ., матем., 1970, т. 19, № 4.
5. Метсавэр Я. О рассеянии нестационарных эхо-сигналов упругими сферическими оболочками. Изв. АН ЭССР. Физ., матем., 1971, т. 20, № 3.
6. Метсавэр Я. Уточнение метода вычисления эхо-сигнала от упругой сферической оболочки в жидкости. Изв. АН ЭССР. Физ., матем., 1972, т. 21, № 3.
7. Mirsky J., Hermann G. Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells. J. Acoust. Soc. America, 1957, vol. 29, No. 10.
8. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М., Изд-во иностр. лит., 1950.
9. Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., «Мир», 1964.
10. Uberall H., Doolittle R. D., McNicholas J. V. Use of sound pulses for a study of circumferential waves. J. Acoust. Soc. America, 1966, vol. 39, No. 5.
11. Doolittle R. D., Uberall H., Uginčius P. Sound scattering by elastic cylinders. J. Acoust. Soc. America, 1968, vol. 43, No. 1.
12. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. М., Гостехиздат, 1954.