Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

К ТЕОРИИ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ

Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Дается теоретическое описание регулярных упругих структур типа неограниченной упругой среды с конгруэнтными (двоякопериодическими) группами произвольных инородных включений. В пределах группы упругие характеристики включений различны, а конфигурация их достаточно произвольна. Строится модельная анизотропная среда, обладающая жесткостью исходной структуры. Ссылки на работы по вопросам теории упругих регулярных структур содержатся в [1-3].

1. Постановка основной задачи. Рассмотрим упругую неоднородную среду с периодической структурой. Пусть ω_1, ω_2 ($\operatorname{Im}\omega_1 = 0$, $\operatorname{Im}\omega_2/\omega_1 > 0$) — основные ее периоды. Внутри параллелограмма периодов Π_{mn} ($m, n = 0, \pm 1, \pm \ldots$) содержится группа непересекающихся включений, каждое из которых заполняет конечную односвязную область D_{mn}^j, ограниченную простым замкнутым достаточно гладким контуром L_{mn}^j ($j = 1, 2 \ldots, k$; $m, n = 0, \pm 1, \pm \ldots$). Объединение всех L_{mn}^j в пределах группы обозначим через l_{mn}, неограниченную область, занятую однородной средой — через D. Тогда полная граница D есть $L = \bigcup l_{m,n}$. Начало координат поместим внутри области $D_{00}{}^0$, содержащейся в основном параллелограмме периодов Π_{00}. В силу конгруэнтности групп все $L_{mn}^j \equiv L_{00}{}^j \,(\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2)$. При фиксированном j каждая система конгруэнтных включений D_{mn}^j характеризуется любым своим представителем, например $D_{00}{}^j$, с модулем упругости E_j и коэффициентом Пуассона μ_j ($j = 1, 2 \ldots, k$). Модуль упругости и коэффициент Пуассона основной среды обозначим соответственно через E и μ.

Пусть в пределах параллелограмма периодов Π_{mn} действуют средние напряжения S_1, S_2 и S_{12}, вектор напряжения изменяется непрерывно при переходе от D в D_{mn}^j ($j = 1, 2, \ldots, k$; $m, n = 0, \pm 1, \pm, \ldots$), а вектор смещения претерпевает разрыв $g_j(t)$, $t \in L_{mn}^j$ (фигура).

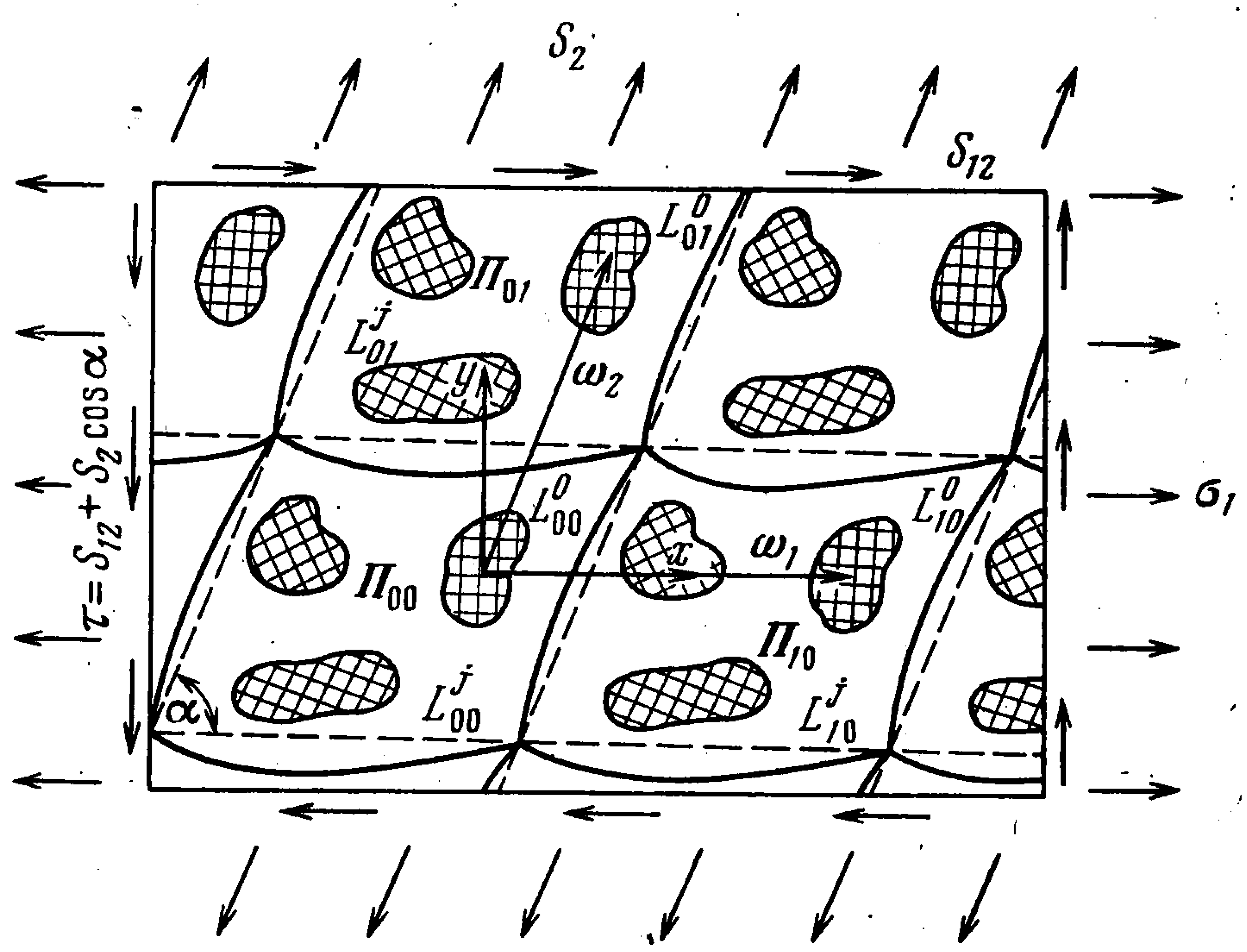
Задача заключается в описании напряженного состояния рассматриваемой структуры, а также в построении модельной для нее однородной анизотропной среды. Последнее составляет содержание задачи приведения для структуры и заключается по существу в установлении связи между средними напряжениями и средними деформациями в ней.

Задание одинаковых для всех параллелограммов Π_{mn} средних напряжений влечет за собой периодический характер напряжений, а при дополнительном условии периодичности вращения и квазипериодичность смещений в D.

Действительно, главный вектор усилий, действующих вдоль произвольной кривой AB в D, имеет вид [4]

$$X + iY = \int\limits_{AB} (X_n + iY_n)\, ds = -ig(z)\,|_A^B, \quad g(z) = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \quad (1.1)$$

Тогда статические условия, обеспечивающие существование одинаковых



для каждого параллелограмма периодов средних напряжений, можно представить в форме

$$g(z + \omega_1) - g(z) = -i(S_{12} + S_2 e^{i\alpha})\omega_1, \quad \alpha = \arg\omega_2 \quad (1.2)$$

$$g(z + \omega_2) - g(z) = i(S_1 + S_{12}e^{i\alpha})\,|\,\omega_2'\,|$$

Из тождеств (1.2) следует квазипериодичность функции $g(z)$, а дифференцирование их по z и $\bar z$ приводит к соотношениям

$$\operatorname{Re}\varphi'(z)\,|_z^{z+\omega_\nu} = 0, \quad (\bar z\varphi''(z) + \Psi(z))\,|_z^{z+\omega_\nu} = 0, \quad \nu = 1, 2 \quad (1.3)$$

Отсюда вытекает периодичность напряжений в D. Квазипериодичность смещений вытекает из формулы [4]

$$h(z) = 2G(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = (\varkappa + 1)\varphi(z) - g(z) \quad (1.4)$$

с учетом того обстоятельства, что в силу (1.3) и предположения о периодичности вращения, $\varphi(z)$ — квазипериодическая функция. Обратно, можно показать, что из условия квазипериодичности смещений следует периодичность напряжений и квазипериодичность, функции $g(z)$ в D.

Исходя из высказанных соображений, постановку основной задачи можно сформулировать следующим образом: построить функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ и $\varphi_j(z)$, $\psi_j(z)$, регулярные соответственно в областях D, D_{00}^j ($j = 1,2,\ldots,k$) и удовлетворяющие на l_{00} условиям сопряжения среды и включений

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=\varphi_j(t)+t\overline{\varphi_j'(t)}+\overline{\psi_j(t)},\quad t\in L_{00}^j \tag{1.5}$$

$$\frac{\varkappa}{G}\varphi(t)-\frac{1}{G}\{t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\}=\frac{\varkappa_j}{G_j}\varphi_j(t)-\frac{1}{G_j}\{t\overline{\varphi_j'(t)}+\overline{\psi_j(t)}\}+2g_j(t)$$

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)},\quad G_j=\frac{E_j}{2(1+\mu_j)},\quad \varkappa=\frac{3-\mu}{1+\mu},\quad \varkappa_j=\frac{3-\mu_j}{1+\mu_j},\quad j=1,2,\ldots,k$$

(в случае плоской деформации $\varkappa=3-4\mu$, $\varkappa_j=3-4\mu_j$) и статическим условиям (1.2). При этом, естественно, подразумевается, что все условия периодичности выполнены автоматически за счет специального вида представлений искомых регулярных функций.

Конструирование этих представлений произведем, используя идеи Д. И. Шермана [5], а также схему решения первой основной двоякопериодической задачи теории упругости, развитую в [3].

Запишем

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_{00}}p(t)\zeta(t-z)\,dt+Az,\qquad z\in D_{00}^j,\quad j=1,2,\ldots,k \tag{1.6}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_{00}}\{\varepsilon(t)\overline{p(t)}-\bar{t}p'(t)+r(t)\overline{q(t)}\}\zeta(t-z)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{l_{00}}p(t)\rho_1(t-z)\,dt+Bz$$

$$\varphi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}^j}\frac{q_j(t)}{t-z}\,dt,\qquad \psi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}^j}\frac{\alpha_j\overline{p_j(t)}+\beta_j\overline{q_j(t)}-\bar{t}q_j'(t)}{t-z}\,dt$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса [6], ρ_1 — специальная мероморфная функция [3, 7], $p(t)=\{p_j(t),\ t\in L_{00}^j\}$ и $q(t)=\{q_j(t),\ t\in L_{00}^j\}$ — подлежащие определению на l_{00}, вообще комплексные функции. Кусочно постоянные $\varepsilon(t)=\{\varepsilon_j,\ t\in L_{00}^j\}$, $r(t)=\{r_j,\ t\in L_{00}^j\}$ и постоянные A, B, α_j и β_j ($j=1,2,\ldots,k$) пока произвольны. Обход при интегрировании ведется против часовой стрелки.

Представления (1.6) обеспечивают двоякую периодичность напряжений и квазипериодичность смещений в D. Это непосредственно следует из квазипериодичности дзета-функции Вейертшрасса и из соотношений [7]

$$\rho_1(z+\omega_\nu)-\rho_1(z)=\overline{\omega}_\nu\rho(z)+\gamma_\nu$$

$$\gamma_\nu=2\rho_1\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right)-\overline{\omega}_\nu\rho\left(\frac{\omega_\nu}{2}\right),\quad \nu=1,2 \tag{1.7}$$

Здесь $\rho(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

Определим фигурирующие в (1.6) постоянные A и B таким образом, чтобы выполнялись статические условия (1.2). Используя (1.6) и формулы

(1.7), приводим (1.2) к системе двух уравнений относительно A и B

$$\begin{aligned}
&(A+\bar{A})\,\omega_1+\bar{B}\bar{\omega}_1+\delta_1 b+\bar{\gamma}_1\bar{b}-\bar{\delta}_1\bar{a}=-i\omega_1(S_{12}+S_2e^{i\alpha})\\
&(A+\bar{A})\,\omega_2+\bar{B}\bar{\omega}_2+\delta_2 b+\bar{\gamma}_2\bar{b}-\bar{\delta}_2\bar{a}=i\,|\,\omega_2\,|\,(S_1+S_{12}e^{i\alpha})\\
&a=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}}\{(\varepsilon(t)\overline{p(t)}+r(t)\overline{q(t)}\}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}}p(t)\,\overline{dt}\\
&b=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}}p(t)\,dt,\qquad \delta_1=2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right),\qquad \delta_2=2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right)
\end{aligned}\tag{1.8}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
&B=B_L-\frac{1}{2\sin\alpha}(S_1+2S_{12}e^{-i\alpha}+S_2e^{-2i\alpha}),\qquad \operatorname{Re}A_L=\operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{2S}a+\frac{\pi}{S}b-\frac{\delta_1 b}{\omega_1}\right)\\
&\operatorname{Re}A=\operatorname{Re}A_L+\frac{1}{4\sin\alpha}(S_1+2S_{12}\cos\alpha+S_2),\qquad S=\omega_1\operatorname{Im}\omega_2\\
&B_L=\frac{\delta_1-\gamma_1}{\omega_1}b-\frac{2\pi}{S}\operatorname{Re}b-\left(\frac{\pi}{S}-\frac{\delta_1}{\omega_1}\right)\operatorname{Re}a,\qquad \alpha=\arg\omega_2
\end{aligned}\tag{1.9}$$

Условием совместности системы (1.8) является равенство

$$2\pi\operatorname{Im}a=\operatorname{Re}\int\limits_{l_{00}}\{(\varepsilon(t)\overline{p(t)}+r(t)\,\overline{q(t)}+p(t)\,\overline{dt}\}=0\tag{1.10}$$

Выясним его механический смысл. Для этого рассмотрим выражение главного момента сил, действующих вдоль l_{00} со стороны области D. Имеем [4]

$$M=\operatorname{Re}\int\limits_{l_{00}}q(t)\,\overline{dt}=\operatorname{Re}\int\limits_{l_{00}}\{\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\}\,dt\tag{1.11}$$
$$j=1,2,\ldots,k$$

Переходя во второй из формул (1.6) к предельным значениям, находим

$$\psi(t)=\psi^+(t)-(\varepsilon(t)\,\overline{p(t)}-\bar{t}p'(t)+r(t)\overline{q(t)}),\ t\in L_{00}{}^j,\quad j=1,2,\ldots,k\tag{1.12}$$

Здесь $\psi(t)$ — предельное значение функции, регулярной в D, а $\psi^+(t)$ — предельные значения функций, регулярных в односвязных областях $D_{00}{}^j$.

Интегрируя в (1.11) по частям и подставляя вместо $\psi(t)$ его значения из (1.12), получаем

$$M=-\operatorname{Re}\int\limits_{l_{00}}\{(\varepsilon(t)\overline{p(t)}+r(t)\overline{q(t)})\,dt+p(t)\,\overline{dt}\}\tag{1.13}$$

Из формулы (1.13) следует, что условие совместности (1.10) обеспечивает равенство нулю главного момента сил, действующих со стороны области D на границе l_{00}. Отсюда, в частности, вытекает, что при соблюдении условия (1.10) главный момент всех сил, действующих вдоль границы параллелограмма периодов или любой другой фундаментальной области, содержащей l_{00}, также равен нулю.

Таким образом, представления (1.6) в совокупности с формулами (1.9) и дополнительным условием (1.10), обеспечивают двоякопериодическое распределение напряжений и существование заданных средних напряжений в структуре.

Вопрос, стало быть, сводится к определению на $L_{00}{}^j$ плотностей $p_j(t)$, $q_j(t)$ ($j = 1,2, \ldots, k$) из краевых условий (1.5). Попутно необходимо зафиксировать константы ε_j, r_j, α_j, β_j и $\operatorname{Im} A$, оставшуюся неопределенной при выполнении статических условий. Эту последнюю константу зададим следующим функционалом:

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}\left\{\left(\frac{\pi}{S} - \frac{\delta_1}{\omega_1}\right) b\right\} \tag{1.14}$$

Здесь S — площадь параллелограмма периодов, b — функционал, заданный в (1.8). Механический смысл формулы (1.14) будет выяснен в п. 5.

2. Решение краевой задачи (1.5). Сведем краевую задачу (1.5) к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Для этого перейдем в представлениях (1.6) к соответствующим предельным значениям и подставим их в краевые условия (1.5). Полученная таким образом система интегральных уравнений относительно $p_j(t)$, $q_j(t)$ будет фредгольмовой, если положить

$$\alpha_j = \frac{1+\varkappa}{\lambda_j - 1}, \quad \beta_j = \frac{1+\varkappa_j\lambda_j}{1-\lambda_j}, \quad \varepsilon_j = \frac{\varkappa+\lambda_j}{\lambda_j - 1}, \quad r_j = \frac{(1+\varkappa_j)\lambda_j}{1-\lambda_j}, \quad \lambda_j = \frac{G}{G_j} \tag{2.1}$$

Она имеет вид

$$p(t_0) - M_j\{p(t), q(t), t_0\} = P_j(t_0), \quad t_0 \in L_{00}{}^j$$
$$q(t_0) - N_j\{q(t), p(t), t_0\} = Q_j(t_0), \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{2.2}$$

Здесь

$$M_j\{p(t), q(t), t_0\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}{}^j}\left\{p(t)\, d\left[\ln\frac{\sigma(t-t_0)}{\overline{\sigma(t-t_0)}}\right] + \frac{r_j}{\varepsilon_j} q(t)\, d\left[\ln\frac{t-t_0}{\overline{\sigma(t-t_0)}}\right]\right\} -$$
$$- \frac{1}{2\pi i\varepsilon_j}\int_{l_{00}} \overline{p(t)}\, d\{(t-t_0)\overline{\zeta(t-t_0)} - \zeta_1\overline{(t-t_0)}\} -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{l^{*j}_{00}}\left\{p(t)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_j}\overline{\zeta(t-t_0)}\,\overline{dt} - \zeta(t-t_0)\, dt\right) + \frac{r}{\varepsilon_j} q(t)\overline{\zeta(t-t_0)}\,\overline{dt}\right\} +$$
$$+ t_0\left\{\left(1+\frac{1}{\varepsilon_j}\right)\operatorname{Re} A_L + i\left(1-\frac{1}{\varepsilon_j}\right)\operatorname{Im} A\right\} + \frac{1}{\varepsilon_j}\bar{t}_0\bar{B}_L$$

$$N_j\{q)t), p(t), t_0\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{00}{}^j}\left\{q(t)\, d\left[\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}\right] + \frac{1}{\beta_j}\overline{q(t)}\, d\left[\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right] +\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_j}{\beta_j} p(t)\, d\left[\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{\sigma(t-t_0)}\right]\right\} - \frac{1}{2\pi i}\int_{l^{*j}_{00}}\frac{\alpha_j}{\beta_j} p(t)\zeta(t-t_0)\, dt - \frac{\alpha_j}{\beta_j} A_L t_0$$

$$P_j(t_0) = \left(1+\frac{1}{\varepsilon_j}\right)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4} t_0 + \frac{\sigma_2-\sigma_1-2i\tau}{2\varepsilon_j}\bar{t}_0 + \frac{2G}{\varkappa+\lambda_j} g_j(t_0)$$

$$Q_j(t_0) = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{4}\frac{\alpha_j}{\beta_j} t_0 - \frac{2G}{1+\varkappa_j\lambda_j} g_j(t_0)$$

$$\sigma_1\sin\alpha = S_1 + 2S_{12}\cos\alpha + S_2\cos^2\alpha, \quad \tau = S_{12} + S_2\cos\alpha$$

$$\sigma_2 = S_2\sin\alpha, \quad l_{00} = \bigcup_{j=1}^{k} L_{00}{}^j, \quad l_{00}{}^{*j} = l_{00} \setminus L_{00}{}^j$$

Функционалы $\operatorname{Re} A_L$, B_L определены в (1.9), функционал $\operatorname{Im} A$ — в (1.14), константы λ_j, α_j, β_j, ε_j, r_j выражаются через упругие характеристики компонент структуры формулами (2.1). Величины σ_1, σ_2 и τ — средние нормальные и касательное напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям ox и oy.

Если $k = 1$, т. е. в пределах параллелограмма периодов имеется лишь одно включение, то члены в M_j и N_j, содержащие интегралы по совокупности контуров l_{00}^{*j}, пропадают. В этом случае $l_{00} = L_{00}^j$ $(j = 1)$.

Важно отметить, что всякое решение полученной системы уравнений (2.2) удовлетворяет дополнительному условию (1.10). В самом деле, умножим первое из равенств (1.5) на $\overline{dt}$ и проинтегрируем по контуру L_{00}^j $(j = 1,2 \ldots, k)$. Получим, в силу регулярности $\psi_j(z)$ в D_{00}^j

$$\operatorname{Re}\int_{l_{00}}\{\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\}d\bar{t} = 0 \tag{2.3}$$

Отсюда, учитывая равенства (1.13) и (1.11), приходим к условию (1.10).

3. Теорема единственности. Под фундаментальной ячейкой структуры будем понимать любую фундаментальную область D_{00} в ней, содержащую все континуумы D_{00}^j $(j = 1,2, \ldots, k)$. В частности, это может быть и основной параллелограмм периодов Π_{00} с границей Γ.

Рассмотрим потенциальную энергию деформации фундаментальной ячейки. Имеем

$$2\iint_{D_\Gamma} W\,dx\,dy + 2\sum_{j=1}^{k}\iint_{D_{00}^j} W_j\,dx\,dy =$$

$$= \int_{l_{00}+\Gamma}(X_n u + Y_n v)\,ds - \sum_{j=1}^{k}\int_{L_{00}^j}(X_n^j u_j + Y_n^j v_j)\,ds$$

$$D_\Gamma = D_{00} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} D_{00}^j \tag{3.1}$$

Здесь W, W_j — известные положительно определенные квадратичные формы от компонент деформации либо напряжения, X_n, Y_n — компоненты вектора напряжения, действующего на $l_{00} + \Gamma$ со стороны области D; X_n^j, Y_n^j — компоненты вектора напряжения на L_{00}^j со стороны D_{00}^j; u, v и u_j, v_j — смещения вдоль L_{00}^j, соответственно со стороны D и D_{00}^j. Направление интегрирования в правой части (3.1) таково, что область D_Γ при движении вдоль ее границы, остается слева.

Учитывая квазипериодичность смещений, формулу (1.2) и то обстоятельство, что вектор напряжения продолжается через l_{00} непрерывно, а вектор смещения претерпевает скачок $g_* = \{g_j(t),\ t \in L_{00}^j\}$, перепишем (3.1) в виде

$$2\iint_{D_\Gamma} W\,dx\,dy + 2\sum_{j=1}^{k}\iint_{D_{00}^j} W_j\,dx\,dy = \operatorname{Re}\int_{l_{00}}(X_n - iY_n)\,g_*(t)\,ds + \tag{3.2}$$

$$+ \operatorname{Re}\{(S_{12} + S_2 e^{-i\alpha})\,\omega_1\Omega_2 + (S_1 + S_{12}e^{-i\alpha})\,|\,\omega_2\,|\,\Omega_1\}$$

$$\Omega_\nu = (u + iv)\big|_z^{z+\omega_\nu}, \qquad \nu = 1, 2$$

Применим формулу (3.2) к разности двух решений, каждое из которых удовлетворяет краевым условиям (1.5) и статическим условиям (1.2). Очевидно, это решение соответствует поставленной краевой задаче при

$$g_*(t) = 0, \quad S_1 = S_2 = S_{12} = 0 \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует равенство нулю правой части в (3.2), что и доказывает теорему единственности для решений в D и в областях D_{mn}^j $(m, n = 0, \pm 1, \pm, \ldots; j = 1, 2, \ldots, k)$.

Из теоремы единственности, в частности, следует, что решение краевой задачи (1.5) при условиях (3.3) представимо в форме

$$\varphi^0(z) = iCz + E, \qquad \psi^0(z) = -\bar{E}, \qquad \operatorname{Im} C = 0$$

$$\varphi_j^0(z) = iC_jz + E_j, \qquad \psi_j^0(z) = -\bar{E}_j, \qquad \operatorname{Im} C_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k \tag{3.4}$$

$$\frac{\varkappa + 1}{G} C = \frac{\varkappa_j + 1}{G_j} C_j, \qquad \frac{\varkappa + 1}{G} E = \frac{\varkappa_j + 1}{G_j} E_j$$

Здесь E, E_j — вообще комплексные постоянные. Формулы (3.4) совпадают с решениями соответствующей однородной задачи для конечной многосвязной области [5].

4. Существование решения. Будем предполагать, что функция $g_*(t)$ дифференцируема и ее производная удовлетворяет условию Гельдера. Этого достаточно для того, чтобы решения $p(t)$ и $q(t)$ были дифференцируемы и их производные также удовлетворяли условию Гельдера на l_{00} [4].

При этих условиях докажем, что система интегральных уравнений (2.2) всегда разрешима.

Очевидно, для $P_j(t) = 0$, $Q_j(t) = 0$ необходимы и достаточны условия

$$S_1 = S_2 = S_{12} = 0, \qquad g_j(t) = 0 \tag{4.1}$$

Таким образом, интегральные уравнения (2.2) с нулевыми правыми частями соответствуют краевой задаче (1.5) при нулевых средних напряжениях и $g_j(t) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$.

Обозначим решения этих однородных интегральных уравнений через $p_0(t) = \{p_j^0(t), t \in L_{00}^j\}$ и $q_0(t) = \{q_j^0(t), t \in L_{00}^j\}$. Соответствующие им регулярные функции, согласно (1.6), запишутся в виде

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}} p_0(t) \zeta(t - z)\, dt + A_0 z, \qquad z \in D_{00}^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

$$\psi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}} \{\varepsilon(t) \overline{p_0(t)} - \bar{t} p_0'(t) + r(t) \overline{q_0(t)}\} \zeta(t - z)\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{00}} p_0(t) \rho_1(t - z)\, dt + B_0 z \tag{4.2}$$

$$\varphi_j^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^j} \frac{q_j^0(t)}{t - z}\, dt, \quad \psi_j^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{00}^j} \left[\alpha_j \overline{p_j^0(t)} + \beta_j \overline{q_j^0(t)} - \bar{t} \frac{d}{dt} q_j^0(t)\right] \frac{dt}{t - z}$$

Здесь A_0, B_0 определяются формулами (1.9) и (1.14), в которых везде вместо $p(t)$ и $q(t)$ стоят соответственно $P_0(t)$ и $q_0(t)$. Все остальные встречающиеся ниже функционалы, соответствующие решениям однородных уравнений, также будем снабжать нулевыми нижними индексами.

Сравнивая одноименные функции из (3.4) и (4.2), приходим к соотношениям

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} p_0(t)\,\zeta(t-z)\,dt + A_0 z - iCz - E = 0, \quad z \in D$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} p_0(t)\,\rho_1(t-z)\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} \{\varepsilon(t)\,\overline{p_0(t)} - \bar{t}p_0'(t) + r(t)\,\overline{q_0(t)}\}\,\zeta(t-z)\,dt + B_0 z + \bar{E} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^j} \frac{q_{j0}(t)}{t-z}\,dt - iC_j z - E_j = 0, \quad z \in D_{00}{}^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{00}^j} \left[\alpha_j \overline{p_j{}^0(t)} + \beta_j \overline{q_j{}^0(t)} - \bar{t}\frac{d}{dt}\,q_j{}^0(t)\right]\frac{dt}{t-z} + \bar{E}_j = 0$$

Между постоянными C и C_j, E и E_j существуют связи, указанные в (3.4).

Вычисляя приращения левой части первого равенства (4.3) при переходе от точки z к $z + \omega_\nu$ $(\nu = 1,2)$, получаем с учетом (1.8), (1.14) и (3.4)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} p_0(t)\,\zeta(t-z)\,dt = E, \quad b_0 = 0, \quad A_0 = iC = 0, \quad C_j = 0, \tag{4.4}$$

$$j = 1, 2, \ldots; k; \quad z \in D$$

Так как $\operatorname{Re} A_0 = 0$, $b_0 = 0$, то из (1.9) имеем

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} (\varepsilon(t)\,\overline{p_0(t)} + r(t)\,\overline{q_0(t)})\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} p_0(t)\,\overline{dt} = 0, \; B_0 = 0 \tag{4.5}$$

Рассмотрим кусочно аналитическую функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{00}} p_0(t)\,\zeta(t-z)\,dt - E \tag{4.6}$$

Вычисляя скачок предельных значений функции $\Phi(z)$ на l_{00} и учитывая первое равенство в (4.4), приходим к выводу, что $p_0(t)$ будет граничным значением некоторых функций, регулярных в областях $D_{00}{}^j$.

В таком случае интеграл в (4.4) исчезает, и можно записать с учетом (4.4) и (3.4)

$$E = 0, \quad E_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.7}$$

В силу регулярности функции $\rho_1(z)$ в основном параллелограмме периодов [2] и установленного выше свойства $p_0(t)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{l_{00}} p_0(t)\,\rho_1(t-z)\,dt = 0 \tag{4.8}$$

Введем теперь следующие функции:

$$i\chi_j(t) = p_j^0(t), \quad i\delta_j(t) = \varepsilon_j \overline{p_j^0(t)} + r_j \overline{q_j^0(t)} - \bar{t} \frac{d}{dt} p_j^0(t), \quad t \in L_{00}^j \tag{4.9}$$

$$i\theta_j(t) = q_j^0(t), \quad i\sigma_j(t) = \alpha_j \overline{p_j^0(t)} + \beta_j \overline{q_j^0(t)} - \bar{t} \frac{d}{dt} q_j^0(t), \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

Из первых двух равенств (4.3) с учетом (4.4), (4.5), (4.7) и (4.8) следует, что функции $\chi_j(t)$ и $\delta_j(t)$ — граничные значения регулярных в области D_{00}^j ($j = 1,2, \ldots, k$) функции $\chi_j(z)$ и $\delta_j(z)$. Остальные два равенства (4.3) приводят к выводу, что $\theta_j(t)$ и $\sigma_j(t)$ — граничные значения регулярных в области $D \setminus D_{00}^j$ ($j = 1,2, \ldots, k$) и исчезающих на бесконечности функции $\theta_j(z)$ и $\sigma_j(z)$.

Исключая функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$ из соотношений (4.9), приходим к системе равенств

$$\overline{\chi_j(t)} + \bar{t}\chi_j'(t) + \delta_j(t) = \overline{\theta_j(t)} + \bar{t}\theta_j'(t) + \sigma_j(t), \quad t \in L_{00}^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k$$

$$\frac{\varkappa}{G} \overline{\chi_j(t)} - \frac{1}{G}\{\bar{t}\chi_j'(t) + \delta_j(t)\} = \frac{\varkappa_j}{G_j} \overline{\theta_j(t)} - \frac{1}{G_j}\{\bar{t}\theta_j'(t) + \sigma_j(t)\} \tag{4.10}$$

Из равенств (4.10) следует, что при каждом фиксированном j функции $\chi_j(z)$, $\delta_j(z)$, $\theta_j(z)$ и $\sigma_j(z)$ дают решение задачи об упругом равновесии неограниченной неоднородной среды с линией раздела L_{00}^j. При этом G_j и $\varkappa_j$ — упругие характеристики среды, заполняющей область D_{00}^j; G и $\varkappa$ — соответствующие характеристики в области $D \setminus D_{00}^j$; векторы напряжений и упругих смещений изменяются непрерывно при переходе через L_{00}^j, а на бесконечности напряжения и смещения равны нулю.

Такая краевая задача имеет лишь тривиальное решение [5]

$$\theta_j(z) = 0, \ \sigma_j(z) = 0, \ \chi_j(z) = 0, \ \delta_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.11}$$

Из (4.9) и (4.11) получаем

$$p_j^0(t) = q_j^0(t) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k \tag{4.12}$$

Этим доказано существование и единственность решения системы интегральных уравнений Фредгольма (2.2).

В предельном случае $\omega_1 \to \infty$ и $\omega_2 \to \infty$ приходим к неограниченной среде с группой включений D_{00}^j ($j = 1,2, \ldots, k$). Формулы, полученные выше для регулярной структуры, остаются справедливыми (после соответствующего предельного перехода) и для этого вырожденного случая.

5. Макроскопическая модель структуры. Под средними деформациями в структуре будем понимать деформации фундаментальной ячейки в ней. Любые две конгруэнтные ячейки деформируются одинаково, поэтому можно ввести модель следующим образом.

Определение. Моделью регулярной структуры назовем упругую однородную среду, обладающую тем свойством, что при совпадении тензоров средних напряжений, действующих в структуре и модели, совпадают также соответствующие тензоры средних деформаций в них.

Полагая $q_*(t) = 0$, найдем закон связи между средними напряжениями и средними деформациями в структуре.

Из формулы (1.4), учитывая (1.2) и (1.6), находим приращения смещений u и v

$$\begin{gathered}
2G[u(z+\omega_1) - u(z)] = (\varkappa+1)\operatorname{Re}(b\delta_1 + A\omega_1) - S_2\omega_1\sin\alpha \\
2G[v(z+\omega_1) - v(z)] = (\varkappa+1)\operatorname{Im}(b\delta_1 + A\omega_1) + \omega_1(S_{12} + S_2\cos\alpha) \\
2G[u(z+\omega_2) - u(z)] = (\varkappa+1)[\operatorname{Re}(b\delta_2 + Ah) - H\operatorname{Im}A] + |\omega_2|S_{12}\sin\alpha \\
2G[v(z+\omega_2) - v(z)] = (\varkappa+1)[\operatorname{Im}(b\delta_2 + Ah) + H\operatorname{Re}A] - |\omega_2|(S_1 + \\
+ S_{12}\cos\alpha) \\
h = \operatorname{Re}\omega_2, \quad H = \operatorname{Im}\omega_2
\end{gathered} \tag{5.1}$$

С другой стороны, смещения точки z относительно конгруэнтной ей точки $z+\omega_\nu$ $(\nu = 1, 2)$ связаны со средними деформациями e_1, e_2, e_{12} в структуре и вращением фундаментальной ячейки ω следующим образом:

$$\begin{gathered}
u(z+\omega_1) - u(z) = \omega_1 e_1, \quad v(z+\omega_1) - v(z) = \omega_1(e_{12} + \omega) \\
u(z+\omega_2) - u(z) = he_1 + H(e_{12} - \omega), \quad v(z+\omega_2) - v(z) = h(e_{12} + \\
+ \omega) + He_2
\end{gathered} \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в левые части (5.1) и разрешая полученную таким образом систему уравнений относительно e_1, e_2, e_{12} и ω, находим

$$\begin{gathered}
2Ge_1 = (\varkappa+1)\operatorname{Re}\left(\frac{b\delta_1}{\omega_1} + A\right) - S_2\sin\alpha \\
2Ge_2 = (\varkappa+1)\left\{\operatorname{Im}\left(\frac{b\delta_2}{H} - \frac{b\delta_1}{\omega_1}\operatorname{ctg}\alpha\right) + \operatorname{Re}A\right\} - \frac{S_1 + 2S_{12}\cos\alpha + S_2\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \\
2Ge_{12} = (\varkappa+1)\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{b\delta_2}{2H} - \frac{b\delta_1}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\alpha\right) + \operatorname{Im}\frac{b\delta_1}{2\omega_1}\right\} + S_{12} + S_2\cos\alpha
\end{gathered} \tag{5.3}$$

$$2G\omega = (\varkappa+1)\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{b\delta_1}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{b\delta_2}{2H}\right) + \operatorname{Im}\frac{b\delta_1}{2\omega_1} + \operatorname{Im}A\right\} \tag{5.4}$$

Потребуем, чтобы вращение фундаментальной ячейки равнялось нулю. Это условие можно выполнить за счет $\operatorname{Im}A$, фигурирующей в (5.4). Определяя из (5.4) $\operatorname{Im}A$ и учитывая при этом соотношение Лежандра $\delta_1\omega_2 - \delta_2\omega_1 = 2\pi i$ [6], приходим к формуле (1.14). Отсюда ясен ее механический смысл.

Введем стандартные решения системы уравнений (2.2) p_{ik}, q_{ik} $(i, k = 1,2)$, определяемые формулами

$$\begin{gathered}
p(t) = \sigma_1 p_{11}(t) + \tau p_{12}(t) + \sigma_2 p_{22}(t) \\
q(t) = \sigma_1 q_{11}(t) + \tau q_{12}(t) + \sigma_2 q_{22}(t)
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Соответственно (5.5) функционалы a и b, определяемые в (1.8), можно представить в виде

$$a = \sigma_1 a_{11} + \tau a_{12} + \sigma_2 a_{22}, \quad b = \sigma_1 b_{11} + \tau b_{12} + \sigma_2 b_{22} \tag{5.6}$$

Здесь σ_1, σ_2 и τ — средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям a_{ik}, b_{ik} — функционалы, соответствующие стандартным решениям $p_{ik}(t)$, $q_{ik}(t)$.

Подставляя в (5.9) вместо $\operatorname{Re}A$ ее значение из (1,9), используя равенства (5.6) и соотношения между S_1, S_2, S_{12} и σ_1, σ_2, τ, задаваемые в (2.2), получаем закон связи между средними напряжениями и средними деформациями в структуре

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \sigma_1 \left\{\frac{1}{E} + \frac{2\pi}{ES}\operatorname{Re}(a_{11} + 2b_{11})\right\} + \sigma_2\left\{\frac{2\pi}{ES}\operatorname{Re}(a_{22} + 2b_{22}) - \frac{\mu}{E}\right\} + \\
&\quad + \tau\left\{\frac{2\pi}{ES}\operatorname{Re}(a_{12} + 2b_{12})\right\} \\
e_2 &= \sigma_1\left\{\frac{2\pi}{ES}\operatorname{Re}(a_{11} - 2b_{11}) - \frac{\mu}{E}\right\} + \sigma_2\left\{\frac{1}{E} + \frac{2\pi}{ES}\operatorname{Re}(a_{22} - 2b_{22})\right\} + \\
&\quad + \tau\left\{\frac{2\pi}{ES}\operatorname{Re}(a_{12} - 2b_{12})\right\} \\
2e_{12} &= \sigma_1\left\{\frac{8\pi}{ES}\operatorname{Im} b_{11}\right\} + \sigma_2\left\{\frac{8\pi}{ES}\operatorname{Im} b_{22}\right\} + \tau\left\{2\,\frac{1+\mu}{E} + \frac{8\pi}{ES}\operatorname{Im} b_{12}\right\}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Выражения в фигурных скобках представляют собой макроскопические упругие параметры структуры.

Вернемся к энергетическому соотношению (3.2). Учитывая равенства (5.2) и то, что в нашем случае $q_*(t) = 0$, представим его в виде

$$
\Pi = \iint\limits_D W dxdy + \sum_{j=1}^{k} \iint\limits_{D_{00}^j} W_j dxdy = \frac{S}{2}(e_1\sigma_1 + 2e_{12}\tau + e_2\sigma_2) \tag{5.8}
$$

Отсюда следует, что регулярная упругая структура и ее модель энергетически тождественны. Соотношения (5.8) можно было бы принять за определение модельной среды.

Матрица макроскопических упругих параметров в (5.7) симметрична и энергетически допустима.

В самом деле, пусть i-ое состояние системы с компонентами σ_x^i, σ_y^i, τ_{xy}^i, e_x^i, e_y^i, e_{xy}^i соответствует ситуации, когда действует лишь одно среднее напряжение $\sigma_i = 1$ (из трех возможных: σ_1, σ_2 и $\tau = \sigma_3$). Долю потенциальной энергии Π, соответствующую работе напряжения i-го состояния на деформациях k-го состояния обозначим через Π_{ik}. Тогда формулу (5.8) можно представить в виде

$$
\sum_{i,k=1}^{3} \sigma_i\sigma_k\Pi_{ik} = S/2\,(\sigma_1 e_1 + 2\sigma_3 e_{12} + \sigma_2 e_2), \qquad \Pi_{ik} = \Pi_{ki} \tag{5.9}
$$

Дифференцируя (5.9) последовательно по σ_i $(i = 1, 2, 3)$, находим

$$
\begin{gathered}
e_1 = 2/S\,(\sigma_1\Pi_{11} + \sigma_2\Pi_{12} + \tau\Pi_{13}), \qquad e_2 = 2/S\,(\sigma_1\Pi_{21} + \sigma_2\Pi_{22} + \tau\Pi_{23}) \\
2e_{12} = 2/S\,(\sigma_1\Pi_{31} + \sigma_2\Pi_{32} + \tau\Pi_{33}), \qquad \Pi_{ii} > 0
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

Сравнивая (5.7) и (5.10), приходим к требуемому результату.

Формула (5.10) указывает также некоторые приближенные подходы к построению моделей регулярных структур.

Таким образом, доказана

Теорема. Деформация произвольной регулярной упругой структуры, обладающей свойством квазипериодичности смещений, тождественна «в большом» деформации однородной анизотропной среды, характеризуемой законом (5.7).

Поступила 23 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Теории стохастически армированных материалов. В сб.: Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.
2. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М., «Наука», 1970.
3. Фильштинский Л. А. Двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954.
5. Шерман Д. И. Плоская деформация в изотропной неоднородной среде. ПММ, 1943, т. 7, вып. 4.
6. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
7. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий, ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.