Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

Г. Я. Попов

(Одесса)

На основании спектрального соотношения для многочленов Якоби, более общего, чем использованное в работе [1], предлагается метод решения плоской контактной задачи для линейно-деформируемого основания общего типа, частным случаем которого является полупространство с модулем упругости вида

$$E = E_\nu z^\nu \qquad (0 \leqslant \nu < 1)$$

Для этого случая, по-видимому, впервые дано точное решение плоской задачи о вдавливании сцепленного штампа и показано, что контактные напряжения у краев штампа, как и в случае обычного полупространства, стремятся к бесконечности, меняя при этом знак бесконечное число раз. Указывается путь приближенного решения задачи об изгибе сцепленной с линейно-деформируемым основанием балки конечной длины. Отмечается ошибочность работы [2], посвященной этой же задаче применительно к указанному частному случаю основания.

1. Необходимая информация о линейно-деформируемом основании связана с заданием смещений поверхностных точек основания от воздействия сосредоточенной силы. Обозначим [3, 1] через $\theta_0 v_0(x)$, $-\theta_3 v_4(x)$ соответственно вертикальные и горизонтальные смещения указанных точек от единичной вертикальной силы, приложенной в точке, принятой за начало координат. Через $\theta_1 v_1(x)$, $\theta_2 v_2(x)$ обозначим аналогичные смещения от горизонтальной силы. Если рассматриваемое основание упругое, то в силу закона взаимности $\theta_1 v_1(x) = \theta_3 v_3(x)$. Будем считать [1, 3], что введенные функции влияния представимы в следующем виде:

$$\begin{matrix} v_{0,2}(x) \\ v_{1,3}(x) \end{matrix} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \begin{pmatrix} \varphi_{0,2}(t)\cos tx \\ \varphi_{1,3}(t)\sin tx \end{pmatrix} \frac{dt}{t} \qquad (\varphi_{0,2}(0) = 0) \tag{1.1}$$

но для плотностей $\varphi_m(t)$ допустим более общее асимптотическое поведение на бесконечности, совпадающее с принятым в [4]

$$\varphi_m(t) = t^\nu [1 + O(t^{-\varepsilon})] \qquad (t \to \infty,\ 0 \leqslant \nu < 1,\ \varepsilon > 0,\ m = 0, 1, 2, 3) \tag{1.2}$$

Пусть на участке $(-a, a)$ поверхности основания сцеплен штамп, на который действует произвольная система сил с главным моментом M (полюс приведения в средней точке участка) и с составляющими главного вектора P (вертикальная) и Q (горизонтальная). Требуется определить нормальное $p(x)$ и касательное $q(x)$ контактные напряжения.

Если обозначить через $g_1(x)$ и $g_2(x)$ соответственно вертикальные и горизонтальные смещения точек контакта, то задачу можно сформулировать [1, 3, 4] в виде следующей системы интегральных уравнений:

$$\theta_0 \int_{-a}^{a} v_0(x-y)\,p(y)\,dy + \theta_1 \int_{-a}^{a} v_1(x-y)\,q(y)\,dy = g_1(x) \tag{1.3}$$

$$\theta_2 \int_{-a}^{a} v_2(x-y)\,q(y)\,dy - \theta_3 \int_{-a}^{a} v_3(x-y)\,p(y)\,dy = g_2(x)$$

$$(|x| < a)$$

Если штамп имеет плоское основание, то

$$g_1(x) = \delta + \theta x, \quad g_2(x) = \varepsilon \tag{1.4}$$

где δ — вертикальная осадка штампа, θ — угол поворота, ε — горизонтальное смещение штампа, величины которых следует определять из условий равновесия штампа.

С целью применить к решению системы (1.3) метод ортогональных многочленов [5] выделим, пользуясь (1.1) и формулой 3.761 из [6], нерегулярные части у функций влияния, т. е. представим их в виде

$$v_{0,2}(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)\cos{}^1\!/_2\nu\pi}{\pi}\left[\frac{1}{\nu|x|^\nu} - l_{0,2}(x)\right] \tag{1.5}$$

$$v_{1,3}(x) = \frac{\Gamma(\nu)\sin{}^1\!/_2\nu\pi}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sgn} x}{|x|^\nu} - l_{1,3}(x)\right]$$

$$l_{0,2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\cos{}^1\!/_2\nu\pi}\int_0^\infty \frac{t^\nu - \varphi_{0,2}(t)}{t}\cos tx\,dt$$

$$l_{1,3}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)\sin{}^1\!/_2\nu\pi}\int_0^\infty \frac{t^\nu - \varphi_{1,3}(t)}{t}\sin tx\,dt$$

В силу (1.2) функции $l_m(x)$ $(m = 0, 1, 2, 3)$ будут по крайней мере непрерывными. Имея в виду (1.5), характеристическую часть системы (1.3) можем записать в виде

$$\theta_0^* \int_{-a}^{a} \frac{p(y)\,dy}{\nu|x-y|^\nu} + \theta_1^* \int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{|x-y|^\nu}\,q(y)\,dy = f_1(x) \tag{1.6}$$

$$\theta_2^* \int_{-a}^{a} \frac{q(y)\,dy}{\nu|x-y|^\nu} - \theta_3^* \int_{-a}^{a} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)}{|x-y|^\nu}\,p(y)\,dy = f_2(x)$$

$$(\pi\theta_{0,2}^* = \Gamma(\nu+1)\cos{}^1\!/_2\nu\pi\theta_{0,2}, \quad \pi\theta_{1,3}^* = \Gamma(\nu)\sin{}^1\!/_2\nu\pi\theta_{1,3})$$

Займемся получением точного решения этой системы. Сделаем замену $x = a\xi$, $y = a\eta$, разделим первое уравнение на θ_1^*, а второе — на θ_3^* и введем обозначения

$$\varkappa_*^2 = \theta_0^*\theta_2^* / \theta_1^*\theta_3^*, \qquad \varkappa^2 = \theta_0^*\theta_3^* / \theta_1^*\theta_2^* \tag{1.7}$$

$$r(\eta) = \varkappa^{1/2}a^{1-\nu}p(a\eta), \qquad s(\eta) = \varkappa^{-1/2}a^{1-\nu}q(a\eta)$$

Умножив первое уравнение полученной системы на $i\varkappa^{-1/2}$, а второе — на $-\varkappa^{1/2}$ и результаты сложив, получим

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+i\operatorname{ctg}{}^1/_2\lambda\pi}{|\xi-\eta|^\nu}\chi(\eta)\,d\eta = f(\xi) \tag{1.8}$$

$$(|\xi|\leqslant 1,\quad \operatorname{ctg}{}^1/_2\lambda\pi = (\theta_0\theta_2)^{1/2}(\theta_1\theta_3)^{1/2}\operatorname{ctg}{}^1/_2\nu\pi)$$

Здесь

$$\chi(\eta) = r(\eta)+is(\eta),\ f(\xi) = i\varkappa^{-1/2}(\theta_1^*)^{-1}f_1(a\xi) - \varkappa^{1/2}(\theta_3^*)^{-1}f_2(a\xi) \tag{1.9}$$

Интегральное уравнение (1.8) допускает точное решение. Например, в работе [4] можно найти его решение в форме квадратур.

Такая форма решения может оказаться полезной для получения приближенного решения исходной системы (1.3) методом регуляризации Карлемана. Применительно к основанию в виде упругого слоя этот метод использован в работах [3, 7]. Для целей данной работы более предпочтительной является форма решения в виде ряда по многочленам Якоби $P_m^{\alpha,\beta}(z)$

$$\chi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{f_m P_m{}^\rho(\xi)}{i\sigma_\nu\lambda_m\psi_\rho(\xi)},\qquad P_m{}^\rho(\xi) = P_m^{-\omega-i\rho,\,-\omega+i\rho}(\xi)$$

$$\psi_\rho(\xi) = \frac{(1-\xi)^{i\rho+\omega}}{(1+\xi)^{i\rho-\omega}},\quad \omega = \frac{1-\nu}{2},\quad \rho = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sin{}^1/_2(\nu+\lambda)\pi}{\sin{}^1/_2(\nu-\lambda)\pi} \tag{1.10}$$

$$\sigma_\nu = \frac{2\pi\,[\sin{}^1/_2(\nu+\lambda)\pi\sin{}^1/_2(\nu-\lambda)\pi]^{1/2}}{\sin\nu\pi\sin{}^1/_2\lambda\pi},\qquad f_m = \int_{-1}^{1}\frac{f(\xi)P_m{}^{-\rho}(\xi)\,d\xi}{\psi_{-\rho}(\xi)}$$

$$\lambda_m = 2^\nu|\Gamma(1-\omega+i\rho+m)|^2[m!^2(\nu+2m)\Gamma(\nu)]^{-1}$$

Формула (1.10) вытекает из спектрального соотношения, содержащегося в работах [4, 8]

$$\int_{-1}^{1}\frac{[\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+i\operatorname{ctg}{}^1/_2\lambda\pi]\,P_m{}^\rho(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^\nu\psi_\rho(\eta)} = \frac{i(\nu)_m\sigma_\nu}{m!}P_m^{-\rho}(\xi) \tag{1.11}$$

2. Спектральное соотношение (1.11) позволяет применить для получения приближенного решения системы (1.3) метод ортогональных многочленов. Представим предварительно ее в виде одного интегрального уравнения относительно функции $\chi(\xi)$, определяемой формулами (1.7) и (1.9). Для этого следует совершить те же самые преобразования, что и проделанные выше над системой (1.6), учитывая при этом представление (1.5). В результате вместо (1.3) будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left[\frac{\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+i\operatorname{ctg}{}^1/_2\lambda\pi}{|\xi-\eta|^\nu} - l^+(\xi-\eta)\right]\chi(\eta) - l^-(\xi-\eta)\overline{\chi(\eta)}\right\}d\eta = g(\xi)$$

$$g(\xi) = i\varkappa^{-1/2}(\theta^*_1)^{-1}g_1(a\xi) - \varkappa^{1/2}(\theta_3^*)^{-1}g_2(a\xi) \tag{2.1}$$

$$2a^{-\nu}l^\pm(x) = l_3(ax)\pm i\varkappa_* l_2(ax)\pm l_1(ax)+i\varkappa_* l_0(ax)$$

Если теперь разыскивать решение полученного интегрального уравнения в виде ряда, подобного (1.10)

$$\chi(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_m P_m^{\rho}(\xi)}{\psi_\rho(\xi)}, \qquad \overline{\chi(\xi)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{z_m} P_m^{-\rho}(\xi)}{\psi_{-\rho}(\xi)} \tag{2.2}$$

то, пользуясь приемами метода ортогональных многочленов [5], легко получить бесконечную систему алгебраических уравнений относительно z_m. Например, если регулярные части ядерных функций аппроксимировать многочленами вида

$$l_m(s) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(m)} s^{2j} \quad (m = 0, 2), \qquad l_m(s) = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(m)} s^{2j+1} \quad (m = 1, 3) \tag{2.3}$$

то упомянутая бесконечная система алгебраических уравнений вырождается в конечную систему

$$z_l = \frac{1}{i\sigma_\nu \lambda_l}\left[g_l + \sum_{m=0}^{N-l}\left(z_m \sum_{k=m+l}^{N} C_k^{+} B_{mk}^{l+} + \bar{z}_m \sum_{k=m+l}^{N} \bar{c}_k B_{mk}^{l-}\right)\right] \tag{2.4}$$

$$(l = 0, 1 \ldots N, \ N = 2n + 1)$$

$$z_l = g_l (i\sigma_\nu \lambda_l)^{-1} \qquad (l > N)$$

Здесь

$$g_m = \int_{-1}^{1} \frac{P_m^{-\rho}(\xi)}{\psi_\rho(-\xi)} g(\xi)\, d\xi \qquad (\psi_{-\rho}(\xi) = \psi_\rho(-\xi)) \tag{2.5}$$

$$2a^{-\nu-2k} C_{2k}^{\pm} = i\varkappa_* (a_k^{(0)} \pm a_k^{(2)}), \qquad 2a^{-\nu-2k-1} C_{2k+1}^{+} = a_k^{(3)} \pm a_k^{(1)}$$

$$B_{mk}^{l\pm} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{P_m^{\pm\rho}(\tau)\, P_l^{-\rho}(\xi)\, (\xi - \tau)^k\, d\xi\, d\tau}{\psi_\rho(\pm\tau)\, \psi_\rho(-\xi)} = \sum_{j=l}^{k-m} (-1)^j \binom{k}{j} b_{k-j}^{m}(\pm\rho)\, b_j^{l}(-\rho)$$

$$b_j^m(\rho) = 0, \quad j < m; \quad b_j^m(\rho) = \frac{2^{\nu+j}\Gamma(1 - \omega - i\rho + j)\,\Gamma(1 - \omega + i\rho + m)\,(-j)_m}{m!\,\Gamma(\nu + j + n + 1)}$$

$$j > m$$

Для отделения мнимой части от вещественной в системе уравнений (2.4) полезна формула (ср. [1])

$$\overline{B_{mk}^{l\pm}} = (-1)^{m+k+l} B_{mk}^{l\pm}$$

Следует иметь в виду, что правая часть интегрального уравнения, согласно (1.4), задана только с точностью до аддитивной линейной функции вида

$$g(\xi) = -\varepsilon^* + i\delta^* + i\theta^*\xi \tag{2.6}$$

$$(\sqrt{\varkappa}\,\varepsilon = \theta_3^* \varepsilon^*, \qquad \delta = \sqrt{\varkappa}\,\theta_1^* \delta^*, \qquad a\theta = \theta_1^* \sqrt{\varkappa}\theta^*)$$

параметры которой определяют поворот штампа (θ) и смещение его центра тяжести (ε, δ). Для отыскания этих параметров надлежит воспользоваться условиями равновесия штампа.

Для получения последних следует найти моменты вида

$$J_k = \int_{-1}^{1} \xi^k \chi(\xi)\, d\xi, \qquad k = 0, 1 \tag{2.7}$$

Принимая во внимание (2.2) и используя ортогональность многочленов Якоби, найдем

$$J_0 = \frac{2^\nu R_\nu z_0}{\Gamma(\nu+1)}, \quad J_1 = \frac{2^{\nu+1} R_\nu}{\Gamma(\nu+2)} \left[\frac{(1+\nu)^2 + 4\rho^2}{4(\nu+2)} z_1 + i\rho z_0 \right] \tag{2.8}$$

$$(R_\nu = \Gamma(1 - \omega + i\rho)\, \Gamma(1 - \omega - i\rho))$$

Если учесть, что

$$[P, Q] = \int_{-a}^{a} [p(x), q(x)]\, dx, \qquad M = \int_{-a}^{a} xp(x)\, dx$$

и принять во внимание (1.7), (1.9), (2.7) и (2.8), то требуемые условия дают

$$\varkappa^{1/2} P + i\varkappa^{-1/2} Q = \frac{(2a)^\nu R_\nu}{\Gamma(\nu+1)} z_0 \tag{2.9}$$

$$\frac{\varkappa^{1/2} \Gamma(\nu+2) M}{(2a)^{\nu+1} R_\nu} = \operatorname{Re} \left[\frac{(1+\nu)^2 + 4\rho^2}{4(\nu+2)} z_1 + i\rho z_0 \right]$$

Если штамп с плоским основанием, т. е. имеет место (1.4), то правая часть в интегральном уравнении (2.1) в точности равна функции (2.6). В этом случае

$$g_0 = \frac{2^\nu R_\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left(-\varepsilon^* + i\delta^* + \frac{2\rho\theta^*}{1+\nu} \right), \quad g_1 = \frac{2^{\nu-1} i\, [(1+\nu)^2 + 4\rho^2]\, R_\nu \theta^*}{\Gamma(\nu+3)} \tag{2.10}$$

$$g_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4 \ldots)$$

и, следовательно, согласно (2.4), ряд (2.2), определяющий решение интегрального уравнения (2.1) при условии (2.3), вырождается в конечную сумму с $N + 1$ членами. При этом для определения параметров ε, δ, θ из условий равновесия (2.9), а также для удобства решения системы уравнений (2.4) следует пользоваться представлением

$$z_n = (-\varepsilon^* + i\delta^*) z_n^* + \theta^* z_n^\theta \qquad (n = 0, 1 \ldots N) \tag{2.11}$$

Здесь z_n^* — решение системы (2.4) при $g_0 = 2^\nu R_\nu \Gamma^{-1}(\nu+1)$, $g_n = 0$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, z_n^θ — решение системы (2.4) при

$$g_0 = \frac{2^{\nu+1} \rho R_\nu}{\Gamma(\nu+2)}, \quad g_1 = \frac{i 2^{\nu-1} [(1+\nu)^2 + 4\rho^2]\, R_\nu}{\Gamma(\nu+3)}, \quad g_n = 0 \quad (n \geqslant 2) \tag{2.12}$$

Подстановка в условия значений z_0 и z_1, согласно (2.11), приведет к уравнениям для ε^*, δ^*, θ^* или, согласно (2.6), — для ε, δ, θ.

Описанные выше построения выполнены в предположении, что $\nu > \lambda$. Однако они сохраняют силу и для случая $\lambda > \nu$. При этом только следует вместо (1.11) использовать следующее спектральное соотношение, вытекающее из результатов работ [4, 8]:

$$\int_{-1}^{1} \frac{[\operatorname{sgn}(\xi-\eta)+i\operatorname{ctg}{}^1/_2\lambda\pi]\,P_m{}^\beta(\eta)\,d\eta}{|\xi-\eta|^\nu\,\psi_\beta(\eta)} = \frac{(\nu)_m\,\mu_\nu P_m{}^\beta(-\xi)}{(-1)^{m+1}\,m!} \tag{2.13}$$

$$P_m^\beta(x) = P_m^{{}^1/_2\nu-1-i\beta,\ {}^1/_2\nu+i\beta}(x), \qquad \psi_\beta(x) = (1-x)^{1-{}^1/_2\nu+i\beta}(1+x)^{-{}^1/_2\nu-i\beta}$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sin{}^1/_2\pi(\lambda+\nu)}{\sin{}^1/_2\pi(\lambda-\nu)}, \qquad \mu_\nu = \frac{2\pi\,[\sin{}^1/_2\pi(\lambda+\nu)\sin{}^1/_2\pi(\lambda-\nu]^{1/2}}{\sin\pi\nu\sin{}^1/_2\lambda\pi}$$

3. Перейдем к частному случаю рассматриваемого линейно-деформируемого основания, представляющего собой упругое полупространство с модулем упругости, изменяющемся по закону $E = E_\nu z^\nu$. Следуя работе [9], обнаружим, что в рассматриваемом случае

$$v_0(x) = v_2(x) = \nu^{-1}|x|^{-\nu}, \qquad v_1(x) = v_3(x) = |x|^{-\nu}\operatorname{sgn}x$$

$$\theta_0 = \frac{(1-\mu^2)\,\gamma C_\nu\sin{}^1/_2\gamma\pi}{(1+\nu)E_\nu}, \qquad \theta_2 = \frac{(1-\mu^2)(1+\nu)\,C_\nu\sin{}^1/_2\gamma\pi}{\gamma E_\nu} \tag{3.1}$$

$$\theta_3 = \theta_1 = -\frac{(1-\mu^2)\,C_\nu\cos{}^1/_2\gamma\pi}{\nu E_\nu}, \qquad C_\nu = \frac{2^{\nu+1}\Gamma\,[{}^1/_2(\nu+\gamma+3)]\,\Gamma\,[{}^1/_2(\nu-\gamma+3)]}{\pi\Gamma(\nu+2)}$$

$$\gamma = \sqrt{(1+\nu)\,[1-\mu\nu(1-\mu)^{-1}]} \quad (\mu \text{ — коэффициент Пуассона})$$

Если положить

$$\gamma - 1 = \lambda \qquad (\varkappa = (1+\lambda)(1+\nu)^{-1}) \tag{3.2}$$

то рассматриваемую контактную задачу для линейно-деформируемого основания (3.1), согласно изложенному в п. 1, можно привести к интегральному уравнению (1.8) с $f(\xi) = g(\xi)$ и получить его точное решение либо в виде квадратур, либо в виде ряда (1.10). При этом легко показать, что для рассматриваемого основания всегда $\nu - \lambda > 0$. Если иметь в виду штамп с плоским основанием, т. е. полагать справедливым (1.4), (2.6) и (2.10), то условия равновесия (2.9) такого штампа примут вид

$$\varkappa^{1/2}P + i\varkappa^{-1/2}Q = \frac{(2a)^\nu R_\nu}{i\Gamma(\nu+1)\,\sigma_\nu}\left(-\varepsilon^* + i\delta^* + \frac{2\rho\theta^*}{1+\nu}\right) \tag{3.3}$$

$$\frac{\Gamma(\nu+2)\,\sigma_\nu\varkappa^{1/2}M}{(2a)^{\nu+1}R_\nu} = -\rho\varepsilon^* + \frac{\theta^*}{1+\nu}\left[2\rho^2 + \frac{(1+\nu)^2+4\rho^2}{2\nu(\nu+2)}\right]$$

Отсюда с учетом (2.6) получим формулы

$$\delta = \frac{\Gamma(1+\nu)\,\sigma_\nu\varkappa\theta_1 P}{(2a)^\nu R_\nu}$$

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{\nu\sigma_\nu\Gamma(\nu+1)\,T}{R_\nu(2a)^\nu} \qquad \left(T = \frac{(\nu+2)(\nu+1)\,[a^{-1}(\nu+1)\,M + 2\rho Q\varkappa^{-1}]}{(1+\nu)^2+4\rho^2}\right) \tag{3.4}$$

$$\varepsilon = \frac{\Gamma(\nu+1)\,\sigma_\nu\theta_1}{(2a)^\nu R_\nu}\left\{\left[1 + \frac{4\nu(\nu+2)\,\rho^2}{(1+\nu)^2+4\rho^2}\right]\frac{Q}{\varkappa} + \frac{2\nu(\nu+1)(\nu+2)\,\rho M}{a\,[(1+\nu)^2+4\rho^2]}\right\}$$

Учитывая эти формулы, а также (1.7), (1.9), (1.10), (2.6), (2.10) и (3.2), после отделения мнимой от вещественной части получим искомые контактные напряжения под плоским штампом, загруженным силами P и Q

и моментом M

$$p(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)(2a)^{-\nu}}{R_\nu (a^2 - x^2)^\omega} \left\{ \left[P + \frac{xT}{a(\nu+1)} \right] \cos\left(\rho \ln \frac{a+x}{a-x}\right) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{Q}{\varkappa} - \frac{2\rho T}{\nu+1} \right] \sin\left(\rho \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \right\} \tag{3.5}$$

$$q(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)(2a)^{-\nu}\varkappa}{R_\nu (a^2 - x^2)^\omega} \left\{ \left[\frac{Q}{\varkappa} - \frac{2\rho T}{\nu+1} \right] \cos\left(\rho \ln \frac{a+x}{a-x}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{xT}{a} + P \right] \sin\left(\rho \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \right\}$$

Если на штамп действует только прижимающая сила ($T = Q = 0$), то видно, что и в случае неоднородного полупространства с $E = E_\nu z^\nu$ имеет место отмеченное В. М. Абрамовым [10] для обычного полупространства пульсация напряжений в крайних точках контакта.

Устремляя в полученных формулах $\nu \to 0$, получим все известные формулы для обычного полупространства. Отметим, что для вычисления R_ν, даваемой формулой из (2.8), удобно пользоваться следующим ее представлением, вытекающим из формул 8.381 (4) и 8.384 (1) [6]:

$$\frac{\pi}{R_\nu} = \frac{2^\nu}{\Gamma(\nu)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch} 2\rho t \cos^{\nu-1} t \, dt \qquad (0 < \nu < 1) \tag{3.6}$$

4. Пусть с линейно-деформируемым основанием, рассмотренным в п. 1, сцеплена балка конечной длины $2a$ и с высотой h, на которую действует вертикальная $p_1(x)$ и горизонтальная $q_1(x)$ нагрузка. Нетрудно показать, что проблему расчета такой балки можно свести к решению следующей интегро-дифференциальной системы:

$$\theta_0 \int_{-a}^{a} v_0(x-y) p(y) \, dy + \theta_1 \int_{-a}^{a} v_1(x-y) q(y) \, dy = w(x) \tag{4.1}$$

$$\theta_2 \int_{-a}^{a} v_2(x-y) q(y) \, dy - \theta_3 \int_{-a}^{a} v_3(x-y) p(y) \, dy = u(x) + \frac{h}{2} \frac{d\psi}{dx}$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = p_1(x) - p(x) - \frac{h}{2} \left[\frac{dq}{dx} + \frac{dq_1}{dx} \right], \quad C \frac{d^2 u}{dx^2} = q(x) - q_1(x)$$

Здесь w — прогибы балки, u — горизонтальные смещения, D — изгибная жесткость балки, C — жесткость балки на растяжение. К записанной интегро-дифференциальной системе надлежит еще добавить условия закрепления на концах балки. Если концы балки свободны, то эти условия можно заменить условиями равновесия балки как жесткого тела. Обращая содержащиеся дифференциальные операторы в (4.1) при помощи функций типа Грина [11], можно исключить из первых двух уравнений $w(x)$ и $u(x)$.

В результате получим, как и в случае задачи о штампе, систему интегральных уравнений относительно контактных напряжений (содержащуюся в третьем уравнении производную от $q(x)$ исключим интегрированием по частям). Так же, как и в случае штампа, правые части интегральных уравнений будут содержать произвольные постоянные, которые следует находить либо из условий закрепления концов балки, либо из условий равновесия. Упомянутую систему приемами, описанными в п. 1, можно свести к интегральному уравнению типа (2.1) и для его приближенного решения применить метод, изложенный в п. 2.

Следует сказать, что рассматриваемой здесь задаче применительно к частному случаю линейно-деформируемого основания, когда имеют место формулы (3.1), посвящена работа [2]. В этой работе для приближенного решения соответствующей системы (4.1) предлагается использовать для контактных напряжений вместо ряда (2.2) ряды по многочленам Гегенбауэра

$$[p(\xi a), q(\xi a)] = \frac{1}{(1-\xi^2)^\omega} \sum_{m=0}^{\infty} [A_m, B_m] C_m^{1/2\nu}(\xi) \tag{4.2}$$

Недостатком такого представления в отличие от (2.2) является то, что здесь не учитывается истинный характер особенностей искомых напряжений на концах балки. Это приводит к тому, что в окрестности концов балки приближенное решение будет сколь угодно отличаться от точного. Однако главный дефект работы [2] состоит в том, что, во-первых, автор в соответствующей системе (4.1) помимо правильного равенства $\theta_1 = \theta_3$ принял еще $\theta_0 = \theta_2$ (видимо, по аналогии с обычным полупространством); как видно из формул (3.1), последнее равенство не имеет места. Во-вторых, при выборе искомых контактных напряжений в форме (4.2) автор [2] опирался на установленный факт [8], что многочлены Гегенбауэра являются собственными функциями ядра $|x - y|^\nu$ $(0 < \nu < 1)$, с которыми совпадают ядра $v_0(x - y)$ и $v_2(x - y)$ системы (4.1) в случае основания (3.1). Но в названной системе, согласно (3.1), содержится еще и ядро

$$\operatorname{sgn}(x-y)\,|x-y|^{-\nu} \tag{4.3}$$

Ссылаясь на полученное в работе [4] спектральное соотношение (1.11), автор [2] утверждает, что и для ядра (4.3) собственными функциями тоже являются многочлены Гегенбауэра. Однако это утверждение ошибочно. На самом деле из спектрального соотношения (1.11) вытекает соотношение, указанное в работе [8]

$$\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sgn}(x-y)\, P_m^{\nu/2,\,\nu/2-1}(y)\,dy}{|x-y|^\nu (1-y)^{\nu/2}(1+y)^{1-\nu/2}} = \frac{\pi(\nu)_m P_m^{\nu/2-1,\,\nu/2}(x)}{\sin {}^1/_2\nu\pi m!}$$

Поступила 16 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
2. Ширинкулов Т. О расчете полосы, лежащей на неоднородном сплошном основании, с учетом реактивных касательных напряжений. Докл. АН Уз.ССР, 1969 № 7.
3. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН Арм.ССР. Сер. физ.-матем. наук, 1963, т. 16, № 2.
4. Попов Г. Я. Вдавливание штампа в линейно-деформируемое основание с учетом сил трения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
5. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
7. Александров В. М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
8. Попов Г. Я. Некоторые новые соотношения для многочленов Якоби. Сиб. матем. ж., 1967, т. 8, № 6.
9. Ростовцев Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
10. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4.
11. Зюкин Ю. П., Попов Г. Я. Изгиб балки конечной длины на линейно-деформируемом основании. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 5.