Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.522

О ВНЕШНИХ ТЕЧЕНИЯХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННЫХ СТРУЯМИ

Л. П. Горбачев, Н. В. Никитин, Е. П. Потанин

(Москва)

Предлагается метод расчета течений, вызываемых подсосом жидкости в струю, вне области пограничного слоя. Струя заменяется совокупностью стоков, интенсивность которых задается по известным из теории пограничного слоя решениям.

За небольшим исключением [1-3], задачи о струйном течении вязкой жидкости решаются при больших числах Рейнольдса в рамках теории пограничного слоя. В этом приближении для струи с заданным импульсом характерно наличие подсоса в струю, приводящего к движению жидкости в остальной части пространства. Во внешней области течения скорости движения жидкости и числа Рейнольдса невелики, что позволяет в уравнениях Навье — Стокса пренебречь инерционными членами. Струю из-за ее тонкости можно заменить системой стоков, расположенных на ее оси; интенсивность стоков определяется по известным решениям, описывающим струйные течения в приближении пограничного слоя [4,5].

В такой постановке линейная задача о внешнем течении решается аналитически для различных видов струйного движения жидкости. Рассмотрим несколько примеров.

1. Внешнее течение, вызванное струей, бьющей из тонкой трубки. Введем сферическую систему координат с началом в месте истечения и углом θ, отсчитываемым от оси струи. Компоненты скорости и давления будем искать в виде

$$v_r = \frac{\nu}{r} f(\theta), \quad v_\theta = \frac{\nu}{r} \varphi(\theta), \quad \frac{P}{\rho} = \frac{\nu^2}{r^2} F(\theta) \tag{1.1}$$

Линеаризируя систему уравнений движения [6], имеем

$$\begin{gathered} f'' + f'\operatorname{ctg}\theta + 2F = 0 \\ -f' + F' = 0, \quad f + \varphi' + \varphi\operatorname{ctg}\theta = 0 \end{gathered} \tag{1.2}$$

После исключения f и F получим уравнение

$$\varphi'\sin^2\theta - \varphi\sin\theta\cos\theta = M\cos 2\theta + N\cos\theta + R \tag{1.3}$$

Здесь M, N, R — произвольные постоянные интегрирования. Общее решение (1.3) можно записать в виде

$$\varphi = A_1\sin\theta + \frac{A_2}{\sin\theta} + A_3\operatorname{ctg}\theta + A_4\sin\theta\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right) \tag{1.4}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — некоторые новые постоянные.

Из последнего уравнения системы (1.2) определим f

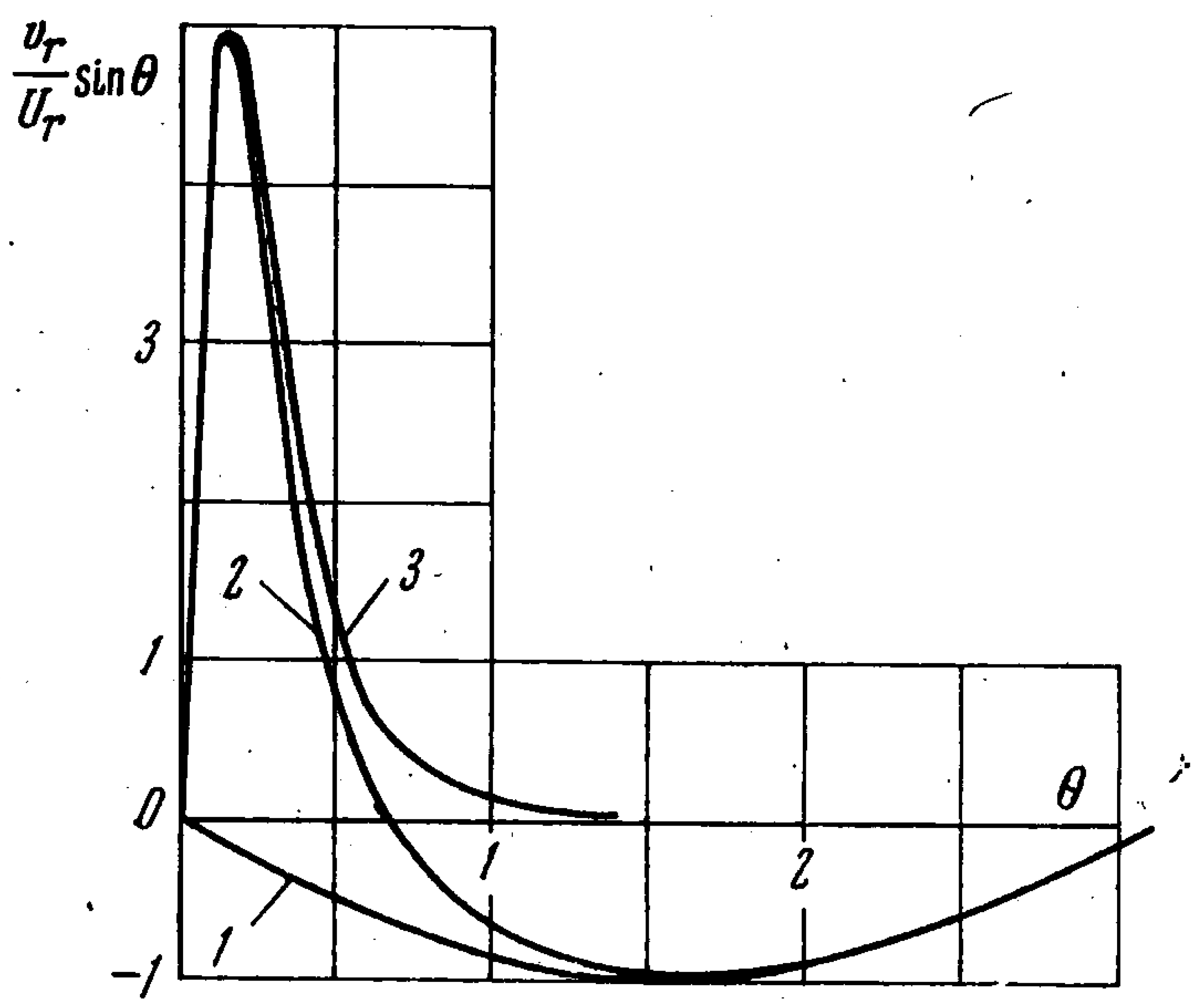
$$f = -2A_1\cos\theta + A_3 - A_4\left[2\cos\theta\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right) - 1\right]$$

Рассмотрим струю, распространяющуюся в неограниченном пространстве [1].

Из условия исчезновения v_θ при $\theta = \pi$ и ограниченности v_r при $\theta = 0$ имеем $A_2 = A_3$, $A_4 = 0$. Следовательно,

$$\varphi = A_1 \sin\theta + A_3 \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \tag{1.5}$$

Постоянную A_3 определим из условия, что полный расход жидкости через сферическую поверхность S произвольного радиуса должен быть равен нулю. Учитывая, что через часть этой сферы S_0, являющуюся сечением струи, вытекает количество жидкости $8\pi\nu r$ [4] и, пренебрегая площадью S_0 по сравнению с S, имеем



Фиг. 1

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\pi 2\pi r^2 v_r \sin\theta\, d\theta = -8\pi\nu$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности, полученное соотношение преобразуем к виду

$$\lim\nolimits_{\theta\to 0} 2\pi r \sin\theta\, v_\theta = -8\pi\nu \tag{1.6}$$

Подставляя в (1.6) $v_\theta = (\nu / r)\,\varphi(\theta)$ с учетом (1.5), найдем $A_3 = -2$. Поток импульса внешнего течения равен

$$I_1 = 2\pi r^2 \int_0^\pi \Pi_{rr} \cos\theta \sin\theta\, d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \left(-P + 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

Положив $I_1 = 0$, получим $A_1 = 0$. Таким образом, компоненты скорости внешнего течения имеют вид

$$v_r = -\frac{2\nu}{r}, \qquad v_\theta = -\frac{2\nu}{r}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} \tag{1.7}$$

Выражение (1.7) полностью совпадает с решением работы [1] в случае сильной струи и углов θ, при которых выполняется соотношение $\sin^{1/2}\theta \gg \alpha / 2$, где $\alpha = 32\nu^2\rho / (3I_0)$, I_0 — импульс струи.

На фиг. 1 приведено решение (1.7) для радиальной компоненты скорости (кривая *1*). Кривая *2* соответствует точному решению полной системы уравнений Навье — Стокса, кривая *3* — решению уравнений пограничного слоя [4]. Численные расчеты выполнены для $\alpha = 0.25$, $U_r = 2\nu/r$.

2. Внешнее течение, вызванное струей, распространяющейся вдоль оси конического диффузора с углом 2β при вершине. Неизвестные константы A_1, A_2, A_3, A_4 решения (1.4) определим из следующих граничных условий: исчезновение компонент скорости при $\theta = \beta$ и ограниченность v_r при $\theta = 0$, получим

$$A_3 = 2A_1 \cos\beta, \qquad A_2 = -A_1(1 + \cos^2\beta), \qquad A_4 = 0 \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.4), получим

$$\varphi = -\frac{A_1}{\sin\theta}(\cos\theta - \cos\beta)^2$$

Используя (1.6), определим $A_1 = \sin^{-4}{}^1/_2\beta$. Таким образом, компоненты скорости запишутся в виде

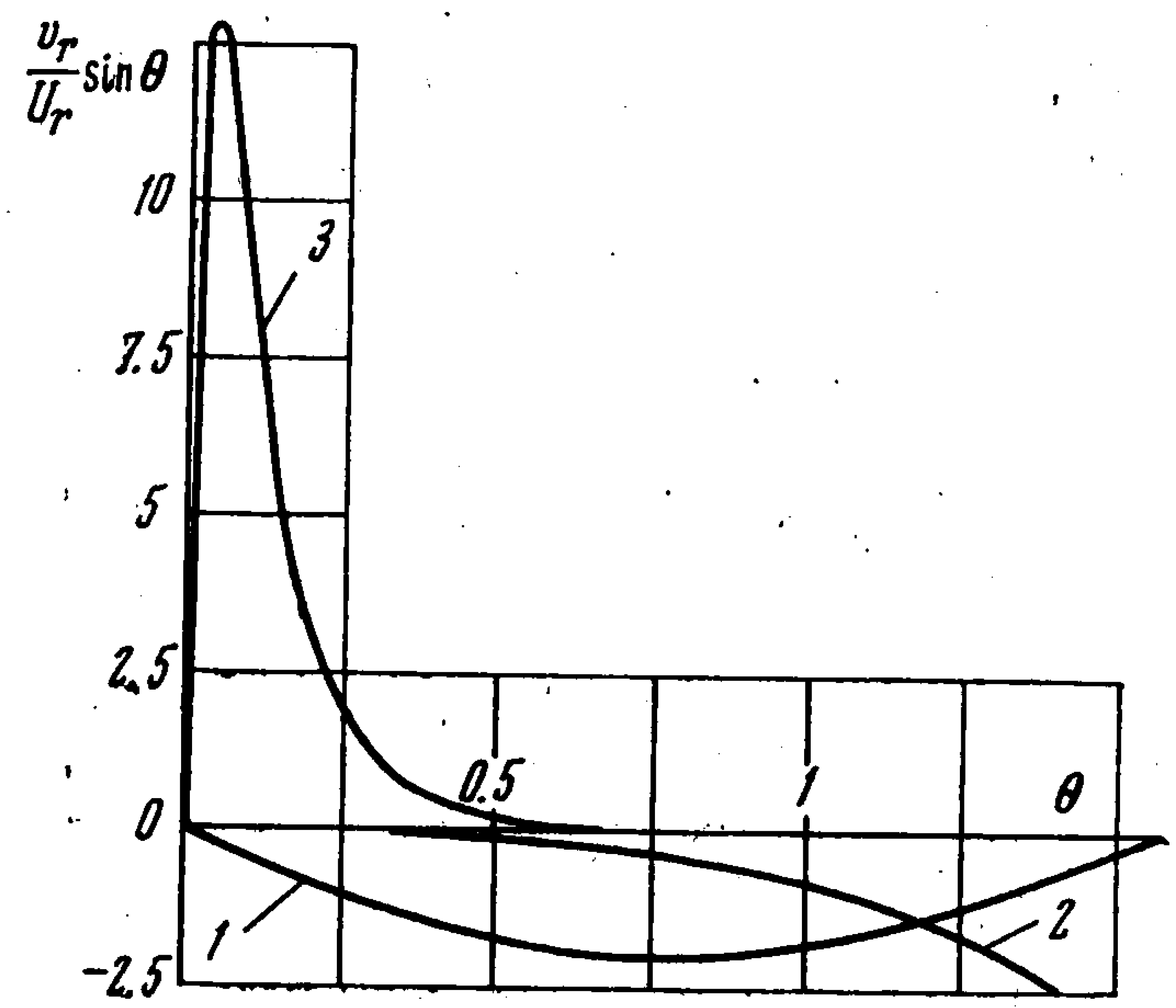
$$v_r = -\frac{\nu}{r}\frac{2}{\sin^4{}^1/_2\beta}(\cos\theta - \cos\beta)$$

$$v_\theta = -\frac{\nu}{r}\frac{1}{\sin^4{}^1/_2\beta\sin\theta}(\cos\theta - \cos\beta)^2 \qquad (2.2)$$

В рассматриваемом случае $I_1 \neq 0$, и решение (2.2) справедливо, когда $I_1 / I_0 \ll 1$. Отсюда можно получить условие $\alpha \ll {}^2/_3\,(1 - \cos\beta)$, которое накладывает ограничение на угол раствора диффузора.

На фиг. 2 приведена кривая *1*, соответствующая решению для внешнего течения (2.2), вызываемого струей в случае $\beta = \pi/2$. Кривая *2* дает внешнее течение, полученное в работе [2] при $I_0 \to \infty$, а кривая *3* получена в результате решения уравнений пограничного слоя [4] при $\alpha = 0.1$.

Следует отметить, что различие между кривыми *1* и *2* объясняется тем, что решения работ [2, 3] не удовлетворяют условию прилипания на стенке.



Фиг. 2

3. Внешнее течение, вызванное струей, бьющей из плоской щели. Введем полярную систему координат $r\varphi$ с началом в месте истечения и углом φ, отсчитываемым от оси струи. Линеаризованное уравнение движения для функции тока ψ имеет вид

$$\Delta^2\psi = 0; \qquad v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \qquad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (3.1)$$

Учитывая решение [5], функцию тока ψ будем искать в виде

$$\psi = 1.65\sqrt[3]{\frac{\nu I_0}{\rho}}\,r\,F(\varphi) \qquad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (3.1), получим уравнение для F

$$F^{IV} + {}^{26}/_9F'' + {}^{25}/_{81}F = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F = B_1\sin{}^5/_3\varphi + B_2\cos{}^5/_3\varphi + B_3\sin{}^1/_3\varphi + B_4\cos{}^1/_3\varphi$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 — постоянные интегрирования.

Сначала рассмотрим случай, когда струя распространяется в неограниченном пространстве.

Поставим следующие граничные условия:

$$v_r = 0, \quad v_\varphi = -1.65 \sqrt[3]{\frac{\nu I_0}{\rho} r}, \quad \varphi = 0$$

$$v_\varphi = \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = \pi$$

Полагая известной интенсивность подсоса жидкости в струю [5], получим систему уравнений для B_1, B_2, B_3, B_4

$$\begin{gathered} 5B_1 + B_3 = 0, \quad B_2 + B_4 = 1 \\ -\sqrt{3}B_1 + B_2 + \sqrt{3}B_3 + B_4 = 0 \\ -25\sqrt{3}B_1 + 25B_2 + \sqrt{3}B_3 + B_4 = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Определяя B_1, B_2, B_3, B_4 из (3.3), найдем ψ

$$\psi = \frac{1.65}{6} \sqrt[3]{\frac{\nu I_0}{\rho} r} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} (\sin {}^5/_3\varphi + 5 \sin {}^1/_3 \varphi) + (5 \cos {}^1/_3\varphi + \cos {}^5/_3 \varphi) \right]$$

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Если струя распространяется в диффузоре с углом 2γ при вершине, то из условия исчезновения компонент скорости на стенке имеем

$$\begin{gathered} B_1 \sin {}^5/_3\gamma + B_2 \cos {}^5/_3\gamma + B_3 \sin {}^1/_3\gamma + B_4 \cos {}^1/_3\gamma = 0 \\ 5B_1 \cos {}^5/_3\gamma - 5B_2 \sin {}^5/_3\gamma + B_3 \cos {}^1/_3\gamma - B_4 \sin {}^1/_3\gamma = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Условия при $\varphi = 0$ не меняются.

В случае струи, бьющей из плоской стенки ($\gamma = \pi / 2$), из (3.4) с учетом (3.3)

$$\psi = \frac{1.65}{22} \sqrt[3]{\frac{\nu I_0}{\rho} r} \, [3 \sqrt{3} (5 \sin {}^1/_3\varphi - \sin {}^5/_3\varphi) + (17 \cos {}^5/_3\varphi + 5 \cos {}^1/_3 \varphi)]$$

Примеры показывают, что предлагаемая методика может быть использована для описания внешних течений, вызываемых струями.

Поступила 6 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Об одном новом точном решении уравнений Навье — Стокса. Докл. АН СССР, 1944, т. 43, № 7.
2. Squire H. B. Some viscous fluid flow problem, I. Jet emerging frome a hole in a plane wall. Phil. Mag., 1952, ser. 7, vol. 43, No. 344, pp. 942—945.
3. Кашкаров В. П. Некоторые точные решения в теории струй несжимаемой жидкости. В кн.: Исследование физических основ рабочего процесса топок и печей. Алма-Ата, АН КазахССР, 1957, стр. 54.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз. 1962, с. 167, с. 37.
5. Schlichting H. Laminare Strahlausbreitung. Z. Angew. Math. und Mech., 1933, Bd 13, No. 4, pp. 260—263.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967, с. 118.