Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Рассматривается задача оптимального управления линейными системами с последействием и квадратическим критерием качества. Выделен класс таких систем, для которых коэффициенты оптимального управления и минимизируемого функционала вычисляются в явном виде.

1. Пусть дана управляемая система

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-h) + D(t)\,u(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.1}$$

Здесь вектор $x(t)$ принадлежит евклидову пространству R_n размерности n, управление $u(t) \in R_m$, постоянная $h \geqslant 0$, наконец, A, B, D — заданные матрицы с кусочно непрерывными элементами.

Решение системы (1.1) определяется начальными условиями

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \qquad -h \leqslant \tau \leqslant 0 \tag{1.2}$$

где заданная измеримая ограниченная функция $\varphi(\tau) \in R_n$.

Задача 1. Найти управление $u(t)$, доставляющее минимум функционалу

$$x'(T)\,Hx(T) + \int_0^T [x'(s)\,N_1(s)\,x(s) + u'(s)\,N(s)\,u(s)]\,ds \tag{1.3}$$

на траекториях $x(t)$ системы (1.1), (1.2). Здесь штрих — знак транспонирования, элементы матриц $N_1(s)$, $N(s)$ — кусочно непрерывные функции, матрицы H и $N_1(s)$ — неотрицательно определены, а матрица $N(s)$ — положительно определена при всех $s \in [0, T]$.

Исследованию задачи 1 посвящен ряд работ. Результаты работ [1,2], в которых намечен общий подход к решению задачи 1, показывают, в частности, что явное определение коэффициентов оптимального управления в общем случае затруднительно. В связи с этим ряд дальнейших исследований был посвящен вопросам аппроксимации задачи 1. Исследовалась возможность аппроксимации системы (1.1) управляемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений [3–5]. Предложен метод построения оптимального управления с помощью «деформации» системы (1.1) [1]. Другой возможный способ приближенного изучения задачи 1 состоит в построении приближений к оптимальному управлению. При $H = 0$ установлен вид последовательных приближений Беллмана [6]. Для общих линейных стохастических систем с последействием и произвольной матрице H установлены [7] формулы последовательных приближений к оптимальному управлению и функционалу, сходимость последовательных приближений, предельные уравнения в частных производных для коэффициентов оптимального управления, а также условия в терминах параметров систем управления существования решения у этих предельных уравнений.

В связи с результатами работ [1-7] возникает задача определения класса управляемых систем (1.1) — (1.3), для которых коэффициенты оптимального управления и соответствующего этому управлению функционала (1.3) вычисляются в явном виде.

Ниже эти коэффициенты вычислены для системы (1.1) — (1.3) при $N_1(t) \equiv 0$, а затем — для стохастических систем. По поводу ограничения $N_1(t) \equiv 0$ отметим, что при $N_1(t) \neq 0$ уравнения для оптимальных коэффициентов, вообще говоря, не интегрируются в явном аналитическом виде даже при $h = 0$.

2. Всюду в дальнейшем предполагается, что $N_1(t) \equiv 0$, коэффициенты в (1.1), (1.3) удовлетворяют требованиям п.1, а элементы матрицы $B(t)$ — кусочно непрерывно дифференцируемы. Тогда (см. [7]) справедливы следующие результаты. Оптимальное управление $u_0(t)$ в задаче 1

$$u_0(t) = -N^{-1}(t)\,D'(t)\Big[P(t)\,x(t) + \int_{-h}^{0} Q(t,\tau)\,x(t+\tau)\,d\tau\Big] \tag{2.1}$$

соответствующее управлению (2.1) значение функционала (1.3), в котором нижний предел интегрирования равен t, на траекториях системы (1.1) при начальном условии

$$x(\sigma) = \varphi(\sigma), \quad t-h \leqslant \sigma \leqslant t$$

равно

$$\begin{aligned} I(t) &= \varphi'(t)\,P(t)\,\varphi(t) + \varphi'(t)\int_{-h}^{0} Q(t,\tau)\,\varphi(t+\tau)\,d\tau + \\ &+ \int_{-h}^{0}\varphi'(t+\tau)\,Q'(t,\tau)\,d\tau\,\varphi(t) + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\varphi'(t+\tau)\,R(t,\tau,\rho)\,\varphi(\rho+t)\,d\tau\, d\rho \end{aligned} \tag{2.2}$$

В частности, значение функционала (1.3) при управлении (2.1)

$$I_0 = I(0)$$

При этом матрицы P, Q, R почти всюду удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} P^{\boldsymbol{\cdot}}(t) + A'(t)\,P(t) + P(t)\,A(t) + Q(t,0) + Q'(t,0) = P(t)\,D_1(t)P(t) \\ A'(t)\,Q(t,\tau) + R(t,0,\tau) + \frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial t} - \frac{\partial Q(t,\tau)}{\partial \tau} = P(t)\,D_1(t)\,Q(t,\tau) \\ \frac{\partial R(t,\tau,\rho)}{\partial t} - \frac{\partial R(t,\tau,\rho)}{\partial \tau} - \frac{\partial R(t,\tau,\rho)}{\partial \rho} = Q'(t,\tau)\,D_1(t)\,Q(t,\rho) \\ 0 \leqslant t \leqslant T, \quad -h \leqslant \tau,\ \rho \leqslant 0,\ D_1(t) = D(t)\,N^{-1}(t)\,D'(t) \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $N^{-1}(t)$ — матрица, обратная к $N(t)$.

Граничными условиями для системы (2.3) служат

$$\begin{gathered} P(T) = H, \quad Q(T,\tau) = R(T,\tau,\rho) \equiv 0, \quad -h < \tau, \quad \rho \leqslant 0 \\ B'(t)\,P(t) - Q'(t,-h) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \\ 2B'(t)\,Q(t,\tau) - R(t,-h,\tau) - R'(t,\tau,-h) = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

Значит, задача синтеза оптимального управления для системы (1.1) будет решена, если будет построено решение краевой задачи (2.3), (2.4). Отметим, что при $h > 0$ первое из уравнений системы (2.3) есть матричное дифференциальное уравнение типа Риккати. Сформулируем ответ

Обозначим через $z(t)$ матрицу

$$z(t) = \exp\int_0^t A(s)\,ds$$

Определим матрицу $B_1(t)$ как решение задачи Коши

$$B_1^{\cdot}(t) = -B_1(t+h)\,z(t+h)^{-1}B(t+h)\,z(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$B_1(T) = I, \qquad B_1(t) \equiv 0, \qquad t > T \tag{2.5}$$

Здесь I — единичная матрица, а матрицу $P_1(t)$ зададим с помощью соотношений

$$P_1^{\cdot}(t) = P_1(t)\,B_1(t)\,z(t)^{-1}D_1(t)\,z'(t)^{-1}B_1'(t)\,P_1(t)$$
$$P_1(T) = z'(T)Hz(T) \tag{2.6}$$

Тогда коэффициенты P, Q, R оптимального управления и оптимального значения функционала (1.3) равны

$$P(t) = z'(t)^{-1}B_1'(t)P_1(t)B_1(t)\,z(t)^{-1}$$
$$Q(t, \tau) = -z'(t)^{-1}B_1'(t)\;P_1(t)\,B_1^{\cdot}(t+\tau)\,z(t+\tau)^{-1} \tag{2.7}$$
$$R(t, \tau, \rho) = z'(t+\tau)^{-1}\dot{B}_1'(t+\tau)\,P_1(t)\,\dot{B}_1(t+\rho)\,z(t+\rho)^{-1}$$

причем в единственной точке $t = T - h$ разрыва первого рода производной $B_1^{\cdot}(t)$ эта производная $B_1^{\cdot}(t)$ определяется по непрерывности слева. Справедливость этих соотношений для P, Q, R проверяется непосредственной подстановкой их в (2.3), (2.4). Таким образом, функции P, Q, R определяются через матрицы $B_1(t)$ и $P_1(t)$.

Для вычисления матрицы $B_1(t)$ следует проинтегрировать систему (2.5) от точки $t = T$ до $t = 0$. Нетрудно получить, используя метод математической индукции, что при $T - (j+1)h \leqslant t \leqslant T - jh$ матрица $B_1(t)$ равна (целое число $j \geqslant 1$)

$$B_1(t) = I + \int_t^{T-h} f(s)\,ds + \int_t^{T-2h} f(s)\,ds\int_{s+h}^{T-h} f(s_1)\,ds_1 + \ldots +$$
$$+ \int_t^{T-jh} f(s)\,ds\int_{s+h}^{T-jh+h} f(s_1)\,ds_1 \ldots \int_{s_{j-2}+h}^{T-h} f(s_{j-1})\,ds_{j-1}$$

Здесь в силу (2.5) матрица $f(t)$ есть

$$f(t) = z(t+h)^{-1}B(t+h)\,z(t)$$

Ясно также, что $B_1(t) \equiv I$ при $T - h \leqslant t \leqslant T$. Тем самым $B_1(t)$ вычислена.

Заметим далее, что матрица $I + \alpha$ положительно определена при любой неотрицательно определенной матрице α. Отсюда и из (2.6) заключаем, что

$$P_1(t) = \left[I + z'(T)\,Hz(T)\int_t^T B_1(s)\,z(s)^{-1}D_1(s)\,z'(s)^{-1}B_1'(s)\,ds\right]^{-1} z'(T)\,Hz(T)$$

3. Приведем метод получения формул (2.7). Отметим, что указанный метод не зависит от размерности системы (1.1). Поэтому ограничимся изложением его лишь для простейшей скалярной системы (1.1) в виде

$$x^{\boldsymbol\cdot}(t) = x(t-h) + u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad x(\tau) = \varphi(\tau), \quad -h \leqslant \tau \leqslant 0 \tag{3.1}$$

с функционалом (1.3), равным

$$x^2(T) + \int_0^T u^2(s)\,ds \tag{3.2}$$

Сформулируем вначале вспомогательные утверждения, необходимые при рассмотрении задачи 1 для системы (1.1)—(1.3).

Пусть вектор $y(t) \in R_n$ удовлетворяет уравнению

$$y^{\boldsymbol\cdot}(t) = A(t)\,y(t) + f(t) + D(t)\,v(t), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.3}$$

Здесь матрицы A и D те же, что и в (1.1), а $f(t)$ — заданная измеримая ограниченная функция.

Рассмотрим для системы (3.3) задачу 1 с минимизируемым функционалом (1.3), в котором вместо $x(t)$ стоит $y(t)$, а вместо $u(t)$ — $v(t)$. Стандартное применение принципа динамического программирования в терминах существования функций Ляпунова у системы (3.3) показывает (см. [8]), что справедлива.

Лемма. Оптимальное управление $v_0(t)$ в задаче 1 для системы (3.3), (1.3) равно

$$v_0(t) = -N^{-1}(t)\,D'(t)\,[r(t)\,y(t) + g'(t)] \tag{3.4}$$

Соответствующее управлению $v_0(t)$ значение функционала (1.3) есть

$$y_0'\,r(0)\,y_0 + g(0)\,y_0 + y_0'g'(0) + q(0) \tag{3.5}$$

В последних двух формулах матрица $r(t)$, вектор $g(t) \in R_n$ и скалярная функция $g(t)$ определяются из уравнений

$$\begin{gathered} r^{\boldsymbol\cdot}(t) + A'(t)\,r(t) + r(t)\,A(t) - r(t)\,D_1(t)\,r(t) + N_1(t) = 0 \\ r(T) = H \end{gathered} \tag{3.6}$$

$$g^{\boldsymbol\cdot}(t) + f'(t)\,r(t) + g(t)\,A(t) - g(t)\,D_1(t)\,r(t) = 0, \quad r(T) = 0$$

$$q^{\boldsymbol\cdot}(t) + g(t)\,f(t) + f'(t)\,g'(t) - g(t)\,D_1(t)\,g(t) = 0, \quad q(T) = 0$$

Вернемся теперь к определению функций P, Q, R в задаче 1 для системы (3.1), (3.2). На основании принципа динамического программирования

$$\min\nolimits_{u(t),\,0\leqslant t\leqslant T}\left[x^2(T) + \int_0^T u^2(s)\,ds\right] = \tag{3.7}$$

$$= \min\nolimits_{u(t),\,0\leqslant t\leqslant T-h}\left[\int_0^{T-h} u^2(s)\,ds + \min\nolimits_{u(t),\,T-h\leqslant t\leqslant T}\left((x^2(T) + \int_{T-h}^T u^2(t)\,dt\right)\right]$$

Предположим, что оптимальное управление $u(t)$ и соответствующая ему траектория $x(t)$ уравнения (3.1) найдены на отрезке $[0, T-h]$. Тогда для определения оптимального управления $u(t)$ на отрезке $[T-h,$

T] достаточно ввиду (3.1), (3.2), (3.7) решить задачу 1 для обыкновенного уравнения без последействия

$$y^{\cdot}(t) = f(t) + u(t), \; y(T-h) = x(T-h), \; T-h \leqslant t \leqslant T$$

с функционалом

$$y^2(T) + \int\limits_{T-h}^{T} u^2(t)\,dt$$

где известная функция $f(t)$ при $T-h \leqslant t \leqslant T$ равна $x(t-h)$.

Решение последней задачи на основании леммы доставляют соотношения (3.4) — (3.6). С другой стороны, решение этой задачи дают также и функции P, Q, R в соответствии с (2.1), (2.2). Приравняем далее полученные этими двумя способами значения оптимального управления. Выполняя простые, но громоздкие вычисления, можно получить, что при $T-h \leqslant t \leqslant T$, $-h \leqslant \tau \leqslant 0$ функция $P(t) = r(t)$, а $Q(t, r) = 0$, если $t + \tau > T - h$ и

$$Q(t,\tau) = r(t+\tau+h)\exp\int\limits_{t+\tau+h}^{t} r(s)\,ds, \quad t+\tau \leqslant T-h$$

Преобразуем выражение для $Q(t, \tau)$ при $t + \tau \leqslant T-h$. На основании (3.1), (3.6) уравнение для $r(t)$ записывается в виде

$$r^{\cdot}(t) = r^2(t), \quad r(T) = 1$$

Значит, для $T-h \leqslant t \leqslant T$ функция $r(t) > 0$.
Отсюда, интегрируя, имеем

$$Q(t,\tau) = r(t+\tau+h)\exp\int\limits_{t+\tau+h}^{t} r^{\cdot}(s)r^{-1}(s)\,ds = r(t), \quad t+\tau \leqslant T-h$$

Аналогичным образом, приравнивая друг к другу полученные двумя способами значения минимизируемого функционала, получаем, что

$$R(t, \tau, \rho) = r(t), \; (T-h \leqslant t \leqslant T)$$

в области $t + \tau \leqslant T-h$, $t + \rho \leqslant T-h$, $-h \leqslant \tau$, $\rho \leqslant 0$, а вне этой области $R(t, \tau, \rho) \equiv 0$.

Таким образом, коэффициенты P, Q, R на отрезке $[-h+T, T]$ определены. Следовательно, для решения задачи 1 для системы (3.1), (3.2) достаточно найти управление $u(t)$, доставляющее на основании (3.7) и значений $P(T-h)$, $Q(T-h, \tau)$, $R(T-h, \tau, \rho)$ минимум функционалу

$$\int\limits_{0}^{T-h} u^2(t)\,dt + P(T-h)\Bigl(x^2(T-h) + 2\int\limits_{T-2h}^{T-h} x(t)\,dt + \\ + \int\limits_{T-2h}^{T-h}\int\limits_{T-2h}^{T-h} x(s)x(t)\,ds\,dt\Bigr) \qquad (3.8)$$

Подобно рассуждениям, примененным на $[T-h, T]$, для определения оптимального управления для $T-2h \leqslant t \leqslant T-h$ достаточно найти управление $u(t)$, доставляющее ввиду (3.8) минимум функционалу

$$\int_{T-2h}^{T-h} u^2(t)\,dt + P(T-h)\Big(x(T-h) + \int_{T-2h}^{T-h} x(t)\,dt\Big)^2 \tag{3.9}$$

на траекториях системы (3.1) при произвольной начальной функции $x(\tau)$, $T-3h \leqslant \tau \leqslant T-2h$.

Непосредственно использованный на $[T-h, T]$ прием сравнения еще неприменим, так как последнее слагаемое в (3.9) не есть квадрат координаты в последний момент времени. Эту трудность можно обойти, положив

$$y(t) = x(t)(1+T-h-t) + \int_{T-2h}^{t} x(s)\,ds \tag{3.10}$$

Из (3.1), (3.10) следует, что $y(t)$ определяется уравнением

$$y^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = (x(t-h) + u(t))\,(1+T-t-h), \quad T-2h \leqslant t \leqslant T-h \tag{3.11}$$

причем в силу (3.10) функционал (3.9) равен

$$\int_{T-2h}^{T-h} u^2(t)\,dt + P(T-h)\,y^2(T-h) \tag{3.12}$$

Используя лемму, найдем решение задачи 1 для системы (3.11), (3.12) (напомним, что $x(t-h)$ в (3.11) считается известной функцией времени). Очевидно также, что минимальное значение функционала (3.12) на траекториях (3.11) совпадает с минимальным значением функционала (3.9) на траекториях системы (3.1). Заменим теперь в найденном с помощью леммы значении оптимального управления функцию $y(t)$ правой частью (3.10) и приравняем полученное (2.1). Тогда получим, что при $T-2h \leqslant t \leqslant T-h$, $-h \leqslant \tau \leqslant 0$

$$P(t) = (1+T-h-t)^2 r(t) \tag{3.13}$$

$$Q(t,\tau) = r(t)\,(1+T-h-t), \quad \text{если } t+\tau > T-2h$$

$$Q(t,\tau) = (1+T-2h-t-\tau)\,r(t+\tau+h)\,(1+T-h-t)\times$$

$$\times \exp \int_{t+\tau+h}^{t} r(s)(1+T-h-s)^2\,ds, \quad t+\tau \leqslant T-2h$$

Преобразуем выражение для $Q(t,\tau)$ при $t+\tau \leqslant T-2h$, используя уравнение (3.6), определяющее $r(t)$. В силу (3.11) это уравнение записывается в виде

$$r^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = r^2(t)\,(1+T-h-t)^2, \quad r(T-h) = P(T-h)$$

Отсюда и из (3.13) заключается, что при $t+\tau \leqslant T-2h$

$$Q(t,\tau) = (1+T-2h-t-\tau)(1+T-h-t)\,r(t+\tau+h)\times$$

$$\times \exp \int_{t+\tau+h}^{t} r^{\boldsymbol{\cdot}}(s)\,r(s)^{-1}\,ds = (1+T-2h-t-\tau)(1+T-h-t)\,r(t),$$

Приравняем далее полученные двумя способами значения минимизируемого функционала (см. формулы (3.5), (2.2)). Заменяя в (3.5) функцию $y(t)$ правой частью (3.10), получаем, что $R(t, \tau, \rho)$ при $T-2h \leqslant t \leqslant T-h$, $-h \leqslant \tau$, $\rho \leqslant 0$ можно записать в виде (2.7). Тем самым функции P, Q, R определены на интервале $[T-2h, T-h]$. Из установленного вида функций P, Q, R следует, что они допускают представление (2.5) — (2.7) при $T-2h \leqslant t \leqslant T$. Аналогичным образом, используя принцип динамического программирования, лемму и подходящую замену переменных вида (3.10), можно убедиться в справедливости представления (2.5) — (2.7) на интервале $T-3h \leqslant t \leqslant T$. Справедливость же соотношений (2.7) на всем интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ проверяется непосредственной подстановкой (2.7) в (2,3), (2.4).

4. *Замечание* 1. Используя результаты работы [7] о виде уравнений в частных производных для коэффициентов оптимального управления в случае общих линейных стохастических систем, а также способ их решения, предложенный в п. 2, можно установить формулы для этих коэффициентов для некоторых стохастических систем с несколькими дискретными запаздываниями.

Приведем в качестве примера решение задачи синтеза оптимального управления для стохастической системы

$$x^{\boldsymbol{\cdot}}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,x(t-h) + D(t)\,u(t) + \sigma(t)\,\xi(t) \tag{4.1}$$

которая представляет собой систему (1.1), находящуюся под действием гауссовского белого шума $\xi(t)$ интенсивности $\sigma(t)\,\sigma'(t)$, где $\sigma(t)$ — заданная матрица с кусочно непрерывными элементами. Выбором управления $u(t)$ требуется минимизировать на траекториях (4.1), (1.2) функционал

$$M\left(x'(T)\,Hx(T) + \int_0^T u'(s)\,N(s)\,u(s)\,ds\right) \tag{4.2}$$

где M — знак математического ожидания.

Подобно п. 2, используя [7], получаем, что оптимальное управление в поставленной задаче определяется формулой (2.1), а соответствующее ему значение функционала (4.2)

$$I_0 + \int_0^T \operatorname{Tr} P(t)\,\sigma(t)\,\sigma'(t)\,dt$$

Здесь I_0 задается равенством (2.2), матрицы P, Q, R определяются соотношениями (2.5) — (2.7), $\operatorname{Tr} A$ — след матрицы A.

Замечание 2. Укажем еще некоторые типы уравнений в частных производных типа (2.3), решение которых можно найти в явном виде и которые встречаются при исследовании некоторых управляемых систем с последействием.

1) Матрицы P, Q, R, задаваемые (2.5) — (2.7), являются решением краевой задачи (2.3), (2.4) также и в том случае, когда последнее из требований (2.4) имеет вид

$$(0 \leqslant t \leqslant T, \quad -h < \tau \leqslant 0)$$

$$B'(t)\,Q(t, \tau) + Q'(t, \tau)\,B(t) - R(t, -h, \tau) - R(t, \tau - h) = 0$$

2) Пусть даны скалярные кусочно непрерывные функции $A(t)$, $D(t)$, $N(t)$, кусочно непрерывно дифференцируемая функция $B(t)$ и постоянная $H \geqslant 0$. Требуется определить скалярные функции $P(t)$, $Q(t, \tau)$, $R(t, \tau, \rho)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $-h \leqslant r$, $\rho \leqslant 0$, удовлетворяющие уравнениям

$$P^{\cdot}(t) + 2A(t)P(t) + 2Q(t, 0) = P^2(t)D_1(t)$$

$$2A(t)Q(t, \tau) + R(t, 0, \tau) + \frac{\partial Q}{\partial t}(t, \tau) - \frac{\partial Q}{\partial \tau}(t, \tau) = P(t)D_1(t)Q(t, \tau)$$

$$2A(t)R(t, \tau, \rho) + \frac{\partial R}{\partial t}(t, \tau, \rho) - \frac{\partial R}{\partial t}(t, \tau, \rho) -$$

$$- \frac{\partial R}{\partial \rho}(t, \tau, \rho) = Q(t, \tau)Q(t, \rho)D_1(t)$$

и граничным условиям (2.4). Решением поставленной задачи служат функции

$$P(t) = B_1^2(t)P_1(t), \quad Q(t, \tau) = -B_1(t)P_1(t)B^{\cdot}_1(t + \tau)$$

$$R(t, \tau, \rho) = P(t)B_1^{\cdot}(t + \tau)B^{\cdot}_1(t + \rho), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \quad -h \leqslant \tau, \quad \rho \leqslant 0$$

где $B_1(t)$, $P_1(t)$ определяются из соотношений

$$B_1^{\cdot}(t) = -B_1(t + h)B(t + h), \quad B_1(T) = 1, \quad B_1(\sigma) \equiv 0, \sigma > T$$

$$P^{\cdot}_1(t) = -2A(t)P_1(t) + B_1^2(t)P_1^2(t), \quad P_1(T) = H \qquad (4.3)$$

При этом уравнения (4.3) легко интегрируются в явном виде подобно (2.5), (2.6).

Выражаю благодарность Ф. Л. Черноусько за постоянное внимание к работе и Т. Л. Майзенберг за полезные дискуссии.

Поступила 12 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Красовский Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. В сб. Оптимальные системы, статистические методы. Тр. II конгр. ИФАК, М., «Наука», 1965.
3. Салуквадзе М. Е. К задаче синтеза оптимального регулятора в линейных системах с запаздыванием, подверженных постоянно действующим возмущениям. Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 2.
4. Репин Ю. М., Третьяков В. Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регулятора на моделирующих устройствах. Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 6.
5. Красовский Н. Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
6. Kushner H. J., Barnea D. I. On the control of a linear functional — differential equation with guadratic cost. SIAM, j., control., 1970, vol. 8, No 2.
7. Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л. Оптимальное управление стохастическими системами с последействием. Автоматика и телемеханика, 1973, т. 34, № 1.
8. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. к кн. И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения», М., «Наука», 1966.