Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

ИМПУЛЬСНОЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ТОЧКИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается игровая задача [1–3] о встрече двух материальных точек с единичными массами, движущихся в трехмерном пространстве под действием одних только управляющих сил F_1, F_2, произвольных по направлению. Предполагается, что сила F_1 ограничена по импульсу, а сила F_2 — по модулю. Рассмотрены параллельно две задачи на минимакс времени до «жесткой» (по координатам) и до «мягкой» (по координатам и скоростям) встречи. Все пространство позиций в обеих задачах разделено на две области. В первой области сформированы оптимальные управления первого (минимизирующего) игрока (точки) и второго (максимизирующего) игрока (точки), а также вычислено минимаксное время. Во второй области сформировано управление второго игрока, позволяющее ему избежать встречи при любых действиях первого игрока. Проведено сравнение с ранее рассмотренным случаем [4], в котором обе точки могут двигаться вдоль некоторой фиксированной прямой.

1. Пусть уравнения движения имеют вид

$$x^{\cdot} = y, \qquad y^{\cdot} = u + v \tag{1.1}$$

$$\mu - \int_0^{\tau} |u|\, dt = \mu^{(1)}(\tau) \geqslant 0 \tag{1.2}$$

$$|v| \leqslant 1 \tag{1.3}$$

$$y^{(1)} = y + \mu_1, \qquad \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1| \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Соотношения (1.1) — (1.4), в которых x, y, u, v, μ_1 — трехмерные векторы, а μ, $\mu^{(1)}$ — неотрицательные числа, можно интерпретировать как уравнения относительного ($r_1 - r_2 = x$, $r_1^{\cdot} - r_2^{\cdot} = y$) движения двух точек с массами m_1, m_2, положения и скорости которых относительно некоторого неподвижного центра задаются векторами (r_1, r_2), $(r_1^{\cdot}, r_2^{\cdot})$ соответственно. Предполагается, что точки подвержены действию одних только управляющих сил F_1, F_2, произвольных по направлению и стесненных ограничениями (1.2), (1.3) при $u = F_1 / m_1$, $v = -F_2 / m_2$. Ограничение (1.2) допускает мгновенное изменение вектора y и числа μ по формулам (1.4), где μ_1 — конечный вектор с евклидовым модулем $|\mu_1|$. В этом случае управление $u = \mu_1 \delta$ будем называть импульсным.

Вектор $w = [x, y, \mu]$ будем называть позицией, а результат импульсных действий первой точки (игрока) обозначать через

$$w^{(1)} = [x, y^{(1)} = y + \mu_1(w), \ \mu^{(1)} = \mu - |\mu_1(w)|]$$

Если вектор $w^{(1)}$ $(t \geqslant 0)$ задан как функция времени, то позицией w $(t > 0)$ назовем вектор $w^{(1)}$ $(t - 0)$, а при $t = 0$ примем $w(0) = [x(0),\ y(0),\ \mu(0)]$.

Пару управлений $u(w, v)$, $v(w)$ и отвечающую им единственную траекторию $w^{(1)}$ $(t \geqslant 0, \{u(w, v), v(w)\}\ w(0))$ назовем допустимыми, если при всех t выполнены ограничения (1.2), (1.3) и почти при всех t удовлетворяются уравнения (1.1). Кроме того, траектория при всех t непрерывна справа, на всяком конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant t_1$ допускает конечное число скачков, согласных с (1.4) и абсолютно непрерывна на интервалах непрерывности.

На допустимых траекториях рассмотрим игру с множеством окончания (множеством встречи)

$$M\ [|\,x\,| = 0,\ k(\mu - |\,y\,|) \geqslant 0,\ k = 0{,}1]$$

При $k = 0$ скорость y произвольна и встречу назовем жесткой. При $k = 1$ первый игрок может мгновенно сделать скорость нулем и встреча будет мягкой.

Во всякой возможной позиции игроки решают одну из двух задач.

Задача 1. Указать пару $u^\circ(w, v), v^\circ(w)$ такую, чтобы время $T\,[u\,(w, v), v\,(w)]$ первого попадания позиции на множество M удовлетворяло оценкам

$$T\,[u^\circ, v] \leqslant T\,[u^\circ,\ v^\circ] \leqslant T\,[u,\ v^\circ]$$

Задача 2. Указать управление $v_0(w)$ такое, чтобы при любом управлении $u\,(w, v)$ позиция не попадала на M за конечное время.

Совокупности позиций, допускающих решение задачи 1 и задачи 2, обозначим через $W^0(M)$ и $W_0(M)$.

Обозначим через y_α, y_β проекции вектора y на вектор x и на плоскость, перпендикулярную вектору x, и выберем правую единичную тройку ортов j_α, j_β, j_γ, согласно формулам

$$j_\alpha = x\,/\,|\,x\,|,\quad j_\beta = y_\beta\,/\,|\,y_\beta\,| \quad \text{при } w \in D_1[\,|\,x\,| > 0,\ |\,y_\beta\,| > 0]$$
$$j_\alpha = x\,/\,|\,x\,|;\ j_\beta,\ j_\gamma \ \text{ произвольны при } w \in D_2[\,|x| > 0, |y_\beta| = 0]$$
$$j_\alpha, j_\beta, j_\beta \ \text{ произвольны при } w \in D_3\ [\,|\,x\,| = 0]$$

Обозначая компоненты трехмерного вектора по указанным ортам индексами α, β, γ, получим следствия уравнений (1.1), (1.2), (1.4)

$$|\,x\,|^\cdot = y_\alpha,\qquad y_\alpha^{\ \cdot} = u_\alpha + v_\alpha + y_\beta^{\,2}\,/\,|\,x\,| \tag{1.5}$$
$$|\,y_\beta\,|^\cdot = u_\beta + v_\beta - y_\alpha\,|\,y_\beta\,|\,/\,|\,x\,|$$

$$|\,x\,|^\cdot = y_\alpha,\quad y_\alpha^{\ \cdot} = u_\alpha + v_\alpha,\quad |\,y_\beta\,|^\cdot = \sqrt{(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2} \tag{1.6}$$

$$|\,x\,|^\cdot = |\,y\,| \tag{1.7}$$

$$y_\alpha^{(1)} = y_\alpha + \mu_{1,\alpha},\qquad |\,y_\beta^{(1)}\,| = \sqrt{(\,|\,y_\beta\,| + \mu_{1,\beta})^2 + \mu_{1,\gamma}^2} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.5) — (1.7) следуют из уравнений (1.1) при $w \in D_1, D_2, D_3$ соответственно, а уравнения (1.8) следуют из (1.4) при $w \in D_1 \cup D_2$.

Интуитивно ясно, что решение зависит только от величин $|x|$, y_α, $|y_\beta|$, μ, k. Сохраним за их совокупностью обозначение w.

2. Отметим одно простое свойство задачи. Пусть существует функция $\nu(w)$, удовлетворяющая оценкам

$$y_\alpha + \nu < 0 \tag{2.1}$$

$$q_1(w, \nu) = \mu + k(y_\alpha + \nu) - \sqrt{y_\beta^2 + \nu^2} + |x| / (y_\alpha + \nu) \geqslant 0$$

и такая, что из равенства

$$\nu(|x|, y < 0, \ |y_\beta| = 0, \mu, k) = 0 \tag{2.2}$$

для любых $|x_2| \leqslant |x|$, $\mu_2 \leqslant \mu$ следует равенство

$$\nu(|x_2|, y_\alpha < 0, \ |y_\beta| = 0, \mu_2, k) = 0 \tag{2.3}$$

Тогда управление

$$u_\nu = \nu(w)\delta j_\alpha - |y_\beta|\delta j_\beta, \quad w \in [y_\beta^2 + \nu^2 > 0]$$

$$u_\nu = -v, \qquad w \in [y_\beta^2 + \nu^2 = 0]$$

приводит позицию на множество M за время

$$T[u_\nu, v] = -|x| / (y_\alpha + \nu(w))$$

Действительно, управление $u_\nu = -v$ ведет траекторию из вектора

$$w^{(1)}(0) = [|x(0)|, y_\alpha^{(1)}(0) < 0, |y_\beta^{(1)}(0)| = 0, \mu^{(1)}(0) > 0, k]$$

согласно уравнениям

$$|x|^{\cdot} = y_\alpha^{(1)}(0), \ y_\alpha^{\cdot} = |y_\beta|^{\cdot} = 0, \quad \mu^{\cdot} = -|v|, \quad \nu^{\cdot} = 0 \tag{2.4}$$

Оценки $y_\alpha^{(1)}(0) < 0$, $\mu^{(1)}(0) \geqslant 0$ следуют из оценок (2.1). Производная $q_1^{\cdot}(w, \nu) = 1 - |v| \geqslant 0$ неотрицательна и, следовательно, оценка $q_1(w, \nu) \geqslant 0$ при движении в силу уравнений (2.4) не нарушается, а справедливость уравнения $\nu^{\cdot} = 0$ следует из (2.2), (2.3). Уравнения (2.4) приводят позицию на множество $|x| = 0$ с сохранением оценки $\mu + ky_\alpha = \mu - k|y| \geqslant 0$. Это значит, что в момент $t_1 = -x(0) / (y_\alpha^{(1)}(0)) = -|x| / (y_\alpha + \nu)$ осуществляется включение $w(t_1) \in M$.

Изложенные соображения естественно приводят к исследованию на максимум по переменной p в области $p < 0$ функции

$$q(w, p) = \mu + kp - \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha)^2} + |x| / p$$

Вычисляя первую $q^{(1)}$ и вторую $q^{(2)}$ производные по p при фиксированном w, имеем при $w \in D_1$

$$q^{(1)} = -(p - y_\alpha) / l(w, p) + k - |x| / p^2$$

$$\lim q^{(1)} = -\infty, \qquad p \to -0 \tag{2.5}$$

$$\lim q^{(1)} = 1 + k > 0, \qquad p \to -\infty$$

$$q^{(2)} = -y_\beta^2 / l^3(w, p) + 2|x| / p^3 < 0$$

$$l(w, p) = \sqrt{y_\beta^2 + (p - y_\alpha)^2}$$

В области D_2 имеем

$$q^{(1)} = \begin{cases} -1 + k - |x| / p^2, & p - y_\alpha > 0 \\ 1 + k - |x| / p^2, & p - y_\alpha < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Формулы (2.5), (2.6) показывают, что при $w \in D_1 \cup D_2$ существует единственная функция $p_1(w)$, которая при $w \in D_1$ будет решением уравнения $q^{(1)}(w, p) = 0$, а при $w \in D_2$ дается формулами

$$p_1(w) = -\sqrt{|x|/(1+k)}, \qquad w \in F = D_2 \cap [a(w) = -\sqrt{|x|/(1+k)} - y_\alpha < 0]$$

$$p_1(w) = y_\alpha, \qquad w \in E = D_2 \cap [a(w) \geqslant 0] \tag{2.7}$$

Эта функция реализует максимум функции $q(w, p)$ на переменной p в области $p < 0$. Обозначая этот максимум через $r(w)$, имеем

$$r(w) = q(w, p_1(w)) = \max_{p<0} q_1(w, p), \qquad w \in D_1 \cup D_2$$

На множество $D_0 [\ |x| = 0, k(\mu - |y|) < 0, \ k = 1]$ продолжим функцию $r(w)$ по формуле

$$r(w) = \mu - |y|, \qquad w \in D_0$$

Оставляя пока в стороне рассмотрение множеств D_0, M, докажем в области $D_1 \cup D_2$ лемму.

Лемма 2.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1 \delta$ реализует неположительное приращение

$$\Delta q = q(w_*^{(1)}, p) - q(w, p) \leqslant 0 \tag{2.8}$$

причем оценка (2.8) обращается в равенство только на семействе управлений

$$u(w, p, m) = m(p - y_\alpha)\delta j_\alpha - m\, |y_\beta|\, \delta j_\beta$$

$$[0 \leqslant m \leqslant \lambda_1(w, p) = \min[1, \mu / l(w, p)]$$

Доказательство. Предположим от противного, что

$$\Delta q = l(w, p) - |\mu_1| - l(w^{(1)}, p) > 0 \tag{2.9}$$

Из оценки (2.9) следуют оценки

$$l(w, p) - |\mu_1| \geqslant 0 \tag{2.10}$$

$$(l(w, p) - |\mu_1|)^2 - l^2(w^{(1)}, p) = -2(|y_\beta|\, \mu_{1,\beta} + (p - y_\alpha)\, \mu_{1,\alpha} + |\mu_1|\, l(w, p)) > 0 \tag{2.11}$$

Оценка (2.11) нарушается при любом векторе μ_1. Противоречие доказывает оценку (2.8). Равенство $\Delta q = 0$ влечет следствием оценку (2.10) и равенство нулю левой части оценки (2.11). Из этого равенства следует, что векторы μ_1 и $u(w, p, 1)$ должны быть пропорциональны $\mu_1 = nu(w, p, 1)$; $n \geqslant 0$. Если число $\lambda_1(w, p) < 1$, то максимальным допустимым значением $|\mu_1|$ является число μ. Если же $\mu / l(w, p) > 1$, то при $\mu_1 > l$ нарушается оценка (2.10). Это доказывает, что оценка (2.8) обращается в равенство на управлениях семейства $u(w, p, m)$ и только на них.

Лемма 2.1 позволяет получить следствие.

Следствие 2.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta$ реализует неположительное приращение

$$\Delta r = r(w^{(1)}) - r(w) \leqslant 0 \qquad (2.12)$$

причем оценка (2.12) обращается в равенство только на семействе управлений

$$u_1(w, p_1(w), m) = m(p_1(w) - y_\alpha)\delta j_\alpha - m\,|y_\beta|\,\delta j_\beta$$
$$0 \leqslant m \leqslant \lambda_1(w, p_1(w)) \qquad (2.13)$$

Оценка (2.12) — простое следствие леммы 2.1. Докажем, что на семействе (2.13) оценка (2.12) обращается в равенство. По лемме 2.1 имеем оценку $q(w^{(1)}(w, u_1), p) \leqslant \leqslant q(w^{(1)}(w, u_1), p_1(w))$, причем она переходит в равенство при $p = p_1(w)$. Это значит, что $p_1(w^{(1)}(w, u_1)) = p_1(w)$. Последнее равенство доказывает обращение (2.12) в равенство на семействе (2.13) и только на нем.

3. Вычислим правую производную по времени в силу уравнений (1.5) в совокупности с уравнением $\mu^{\bullet} = -|u|$ от функции $r(w)$, разбивая производную на два слагаемых

$$r^{\bullet}(w) = R_1(w, p_1) + R_2(w, p_1, u, v)$$

где $p_1 = p_1(w)$, а слагаемое $R_2(w, p_1, u, v)$ уничтожается при $u = v = 0$.

Вначале проведем вычисления при $w \in D_1 \cup F$, поскольку в этой области не исчезает функция $l(w, p_1)$ и вычисления можно производить по правилу дифференцирования неявной функции $p_1(w)$, определяемой по уравнению $q^{(1)}(w, p) = 0$.

Согласно указанным соображениям, имеем

$$R_1(w, p_1) = p_1 y_\beta^2 / |x|\, l(w, p_1) + y_\alpha / p_1 - 1 + 1 =$$
$$= p_1 / |x| [\,y_\beta^2 / l(w, p_1) - (p_1 - y_\alpha)|x| / p_1^2] + 1$$

Заменяя во втором слагаемом квадратной скобки множитель $|x| / p_1^2$ на выражение $(p_1 - y_\alpha) / l(w, p_1) + k$, по уравнению $q^{(1)}(w, p) = 0$ получим

$$R_1(w, p_1(w)) = (p_1 / |x|)(l(w, p_1) - k(p_1 - y_\alpha)) + 1 < 1 \qquad (3.1)$$

Оценка (3.1) — следствие оценки $p_1(w) < 0$. Слагаемое R_2 имеет вид

$$R_2(w, p_1, u, v) = -|u| + ((p_1 - y_\alpha)(u_\alpha + v_\alpha) -$$
$$- |y_\beta|(u_\beta + v_\beta)) / l(w, p_1) \qquad (3.2)$$

Вычисление производной $r^{\bullet}(w)$ при $w \in E$ требует деталей, которые попутно докажут непрерывность функции $p_1(w)$ при $w \in E$.

Замена $z = p - y_\alpha$ приводит уравнение $q^{(1)} = 0$ к виду

$$z(y_\alpha + z) + (|x| - k(y_\alpha + z)^2)\sqrt{y_\beta^2 + z^2} = 0 \qquad (3.3)$$

а замена $|x| = (k - s)\, y_\alpha^2$ приводит (3.3) к форме

$$z(y_\alpha + z)^2 + (-sy_\alpha^2 - 2ky_\alpha z - kz^2)\sqrt{y_\beta^2 + z^2} = 0 \qquad (3.4)$$

Будем вести рассмотрение при малых $|y_\beta| > 0$ в окрестностях областей E_1, E_2, E_3, выделяемых из области E соотношениями $[s = 0]$, $[-1 < s < 0;\ 0 < s < 1]$, $[s = -1]$, где $s(w) = k - |x| / y_\alpha^2$.

В окрестности области E_1 применим замену $z = Zs \mid y_\beta \mid$, которая придает уравнению (3.4) вид

$$s \mid y_\beta \mid ((Z - 1) y_\alpha^2 + P(w, Z)) = 0 \tag{3.5}$$

Через w обозначена совокупность s, y_α, $\mid y_\beta \mid$, k. Функция $P(w, z)$ непрерывна и обращается в нуль при $s \mid y_\beta \mid = 0$. Вид уравнения (3.5) показывает, что в окрестности области E_1 решение $z(w)$ уравнения (3.3) можно представить в виде

$$z_1(w) = Z_1(w) s \mid y_\beta \mid, \quad s = k - |x| / y_\alpha^2 \tag{3.6}$$

Здесь $Z_1(w)$ — положительная ограниченная функция, обращающая в нуль третий множитель левой части уравнения (3.5).

В окрестности областей E_2, E_3 будем изучать следствие уравнения (3.3), взятое в форме

$$z^2 (y_\alpha + z)^4 - (\mid x \mid - k (y_\alpha + z)^2)^2 (y_\beta^2 + z^2) = 0 \tag{3.7}$$

В окрестности области E_2 замена

$$|x| = y_\alpha^2 (k - s), \qquad z = (s / \sqrt{1 - s^2} + Z) \mid y_\beta \mid$$

приведет (3.7) к виду

$$P_2 + P_1 Z + P_0 = 0 \tag{3.8}$$

Здесь P_2 — многочлен по Z степени, не ниже второй, с непрерывными коэффициентами; P_1, P_0 непрерывны и не зависят от Z, причем P_1 не уничтожается при $\mid y_\beta \mid = 0$, $s \neq 0$, а P_0 уничтожается при $|y_\beta| = 0$. Обозначая через $Z_2(w)$ непрерывное решение уравнения (3.8), уничтожающееся при $\mid y_\beta \mid = 0$, получим решение уравнения (3.7) в форме

$$z_1(w) = (s / \sqrt{1 - s^2} + Z_2(w)) \mid y_\beta \mid \tag{3.9}$$

В окрестности области E_3 уравнение (3.7) удобно представить в виде

$$\psi(w, z) = \psi_1(w, z) + \psi_2(w, z) = 0$$

$$\psi_1(w, z) = z^2 (z - \lambda) (2y_\alpha + \lambda + z) [(y_\alpha + z)^2 (1 - k) + \\ + (\lambda + y_\alpha)^2 (1 + k)]$$

$$\psi_2(w, z) = -[(\lambda + y_\alpha)^2 (1 + k) - k (y_\alpha + z)^2]^2 \mid y_\beta \mid^2$$

Здесь через λ обозначена функция $-\sqrt{\mid x \mid / (1 + k)} - y_\alpha$, равная нулю при $s = k - \mid x \mid / y_\alpha^2 = -1$.

Подстановка

$$z = Z y_\beta^{2/3} + {}^1/_2 (\lambda - \mid \lambda \mid)$$

позволяет при $Z \leqslant 0$ получить оценку

$$\psi(w, z) = \psi_3(w, Z) \geqslant y_\beta^2 [(1 + k) 4 y_\alpha^3 Z^3 - 4 y_\alpha^4 + P_3(w, Z)] \tag{3.10}$$

переходящую в точное равенство при $\mid y_\beta \mid Z = 0$. Функция $P_3(w, N)$ зависит непрерывно от w, Z и обращается в нуль при $\mid y_\beta \mid = \lambda = 0$. Оценка (3.10) показывает, что уравнение $\psi_3(w, Z) = 0$ допускает строго отрицательное ограниченное решение $Z_3(w) < 0$ при $\mid y_\beta \mid > 0$. Это значит, что решение уравнения (3.7) в окрестности области E_3 можно представить в виде

$$z_1(w) = Z_3(w) |y_\beta|^{2/3} + {}^1/_2 (\lambda(w) - \mid \lambda(w) \mid) < 0 \tag{3.11}$$

Нетрудно проверить, что функция $z_1(w)$, даваемая формулами (3.9), (3.11) — решение уравнения (3.3). Действительно, из уравнения (3.7) вытекает либо уравнение (3.3), либо уравнение

$$z(y_\alpha + z)^2 + (sy_\alpha^2 + 2ky_\alpha^2 + kz^2)\sqrt{y_\beta^2 + z^2} = 0 \tag{3.12}$$

Однако подстановка выражений (3.9), (3.11) в левую часть (3.12) показывает, что уравнение (3.12) заведомо нарушится при достаточно малых $|y_\beta|$.

Применение равенства (3.9) позволяет в области E_2 придать производной $r^\bullet(w)$ вид

$$r^\bullet(w) = 1 - |u| + s(u_\alpha + v_\alpha) - \sqrt{1-s^2}\sqrt{(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2} \tag{3.13}$$

При $w \in E_3$ приращение Δr функции $r(w)$ можно представить в виде

$$\Delta r = \Delta\,|x|\,/\,y_\alpha + \Delta\mu + s\Delta y_\alpha + P(w, \Delta w, z(w + \Delta w))$$

где функция P не содержит слагаемых измерения меньшего, чем два по приращениям Δx, Δy_α, $\Delta\,|y_\beta|\,\Delta z(w) = z(w + \Delta w)$. Деление на Δt и переход к пределу при $\Delta t \to 0$ дают, согласно (3.11), уравнение

$$z^\bullet(w) = 1 - |u| + s(u_\alpha + v_\alpha)$$

Оно показывает, что равенство (3.13) справедливо и при $s = -1$. Аналогичные выкладки показывают справедливость равенства (3.13) и при $s = 0$.

4. Полученные выше соотношения позволяют построить управление

$$v_1(w) = -[(p_1 - y_\alpha)j_\alpha - |y_\beta|\,j_\beta]\,/\,l(w, p_1), \quad w \in D_1 \cup F \tag{4.1}$$

$$v_1(w) = -s(w)\,j_\alpha + \sqrt{1 - s^2(w)}\,(\cos\varphi j_\beta + \sin\varphi j_\gamma), \qquad w \in E \tag{4.2}$$

$$v_1(w) = y\,/\,|y|, \quad w \in D_0, \quad [\,|x| = 0,\ \mu - |y| < 0,\ k = 1] \tag{4.3}$$

где угол φ в формуле (4.2) произволен, и доказать теорему.

Теорема 4.1. Любая допустимая пара $u(w, v)$, $v_1(w)$ не может привести траекторию из области $M_0 = [\,|x| > 0;\ r(w) < 0] \cup D$ на множество M за конечное время.

Доказательство. Предположим от противного, что $w(0) \in M_0$ и $x(0) > 0$, но при некотором конечном $\tau > 0$ выполнено равенство $x(\tau) = 0$. Поскольку траектория имеет только конечное число скачков, то

$$|x(\tau)|^\bullet = -|y(\tau)|, \qquad |y_\beta((\tau)| = 0 \tag{4.4}$$

Уравнение $q^{(1)}(w, p) = 0$ и формула (2.8) позволяют получить оценку $p_1(w) < -\sqrt{|x|\,/\,(1 + k)}$, из которой вытекает равенство

$$\lim\,(|x|\,/\,p_1(w)) = 0, \quad t \to \tau \tag{4.5}$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\lim\,(p_1(w(t)) - y_\alpha(t)) = 0, \quad t \to \tau, \quad k = 0 \\ &p_1(w(t)) - y_\alpha(t) \geqslant 0, \quad t \to \tau, \quad k = 1 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Действительно, при $y_\alpha(\tau) < 0$ и $k = 0$, $\lim s(w) = \lim - |x| / y_\alpha^2 = 0$ при $t \to \tau$, и формула (3.6) устанавливает первое равенство. При $k = 1$, $y_\alpha(\tau) < 0$ справедливо равенство $\lim s(w) = 1$ при $t \to \tau$, и формула (3.9) устанавливает второе соотношение системы (4.6). Кроме того, следствие 2.2 и формулы (3.1), (3.2). (3.13) позволяют установить, что функция $r(w)$ не возрастает вдоль любой допустимой траектории, отвечающей паре $u(w, v)$, $v_1(w)$. Равенства (4.4), (4.5) и соотношения (4.6) позволяют установить оценку (при $y_\alpha(\tau) = 0$ она устанавливается рассуждениями от противного)

$$\lim r(w(\tau)) = \mu(\tau) - k\,|y(\tau)| < 0, \qquad t \to \tau$$

Эта оценка устанавливает непрерывность $r(w)$ при $w \in D_0$ и показывает, что при $k = 0$ нарушено фазовое ограничение $\mu \geqslant 0$, а при $k = 1$ справедливо включение $w(\tau) \in D_0$. Переход из области D_0 при $v = v_1(w)$ возможен только в область $[|x| > 0,\ r(w) < 0]$. Доказательство закончено.

Предыдущие результаты естественно приводят к рассмотрению функции $p_2(w)$ — наименьшего корня уравнения $q(w, p) = 0$ в области M^0 $[r(w) \geqslant 0;\ |x| > 0]$, управлений (единичный вектор $v_2(w)$ антипараллелен вектору $u_2(w)$,

$$\left.\begin{aligned} u_2(w) &= (p_2 - y_\alpha)\,\delta j_\alpha - |y_\beta|\,\delta j_\beta \\ v_2(w) &= -u_2(w) / |u_2(w)| \end{aligned}\right\} w \in (D_1 \cup F) \cap [r(w) \geqslant 0] \tag{4.7}$$

$$\left.\begin{aligned} u_2(w, v) &= -v \\ v_2(w) &= v_1(w) \end{aligned}\right\} \quad w \in E \cap [r(w) = 0] \tag{4.8}$$

а также функции

$$T(w) = -|x| / p_2(w); \quad w \in (D_1 \cup F \cup E) \cap [r(w) \geqslant 0]$$

$$T(w) = 0, \ w \in M$$

Производная $(T(w))^{\boldsymbol{\cdot}}$ при $w \in (D_1 \cup F) \cap [r(w) > 0]$ имеет вид

$$\begin{aligned} (T(w))^{\boldsymbol{\cdot}} = -1 - (l - k(p_2 - y_\alpha)) / (p_2 q^{(1)}) - \\ - |x|\,(R_2(w, u, v) + 1) / (p_2^2 q^{(1)}) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь

$$q^{(1)} = q^{(1)}(w, p_2) = -(p_2 - y_\alpha) / l + k - |x|\, p_2^2 > 0$$

$$p_2 = p_2(w) < 0$$

$$l = l(w, p_2) = \sqrt{y_\beta^2 + (p_2 - y_\alpha)^2} \tag{4.10}$$

$$R_2(w, u, v) = -|u| + [(p_2 - y_\alpha)(u_\alpha + v_\alpha) - |y_\beta|(u_\beta + v_\beta)]\, l^{-1}$$

Оценка $q^{(1)} > 0$ вытекает из определения функции $p_2(w)$, как наименьшего корня уравнения $q(w, p) = 0$, а оценка $p_2(w) < 0$ вытекает из очевидного неравенства $p_2(w) \leqslant p_1(w) < 0$.

Из формул (4.9), (4.10) следует оценка

$$T^{\cdot}(w, u(w, v), v_2(w)) > -1 \quad \text{при } w \in (D_1 \cup F) \cap [r(w) > 0] \tag{4.11}$$

Лемма 2.1 позволяет выдвинуть

Следствие 4.1. Любое импульсное управление $u = \mu_1\delta$, сохраняющее включение $w^{(1)}(w, u) \in M^0$, реализует неотрицательное приращение

$$\Delta T = T(w^{(1)}) - T(w) \geqslant 0 \tag{4.12}$$

и оценка (4.12) обращается в строгое равенство только на семействе управлений $mw_2(w)$, $0 \leqslant m \leqslant 1$.

Доказательство. По лемме 2.1 имеем $q(w^{(1)}, p) \leqslant q(w, p)$ и при $u \neq mu_2(w)$ справедлива оценка

$$q(w^{(1)}, p_2(w)) < q(w, p_2(w)) = 0$$

Из этой оценки вытекают оценки

$$p_2(w^{(1)}) > p_2(w), \qquad \Delta T > 0$$

Если же управление взято из семейства $mu_2(w)$, то по лемме $q(w^1, p) < q(w, p < < p_2(w))^2$ и $q(w^{(1)}, p_2(w)) = q(w, p_2(w)) = 0$. Это значит, что $p_2(w^{(1)}) = p_2(w)$ и $\Delta T = 0$.

В области $[\,|x| > 0,\ r(w) = 0]$ лемма 2.1 и формулы (3.1), (3.2), (3.13) показывают, что любое управление $u \neq u_2(w, v)$ в паре с $v_2(w)$ переводит позицию в область $[|x| > 0,\ r(w) < 0]$. Исключение составляет только позиция $w \in E_3 \cap [r(w] = 0]$, в которой равенство $r^{\cdot}(w) = 0$ сохраняет любое управление

$$u^* = u_\alpha j_\alpha, \quad u_\alpha \leqslant 0$$

а производная $(T(\omega))$ имеет вид

$$(T(w)^{\cdot} = \begin{cases} -{}^1/_2, & -1 + {}^1/_2(k+1) < u_\alpha \leqslant 0 \\ -1 + (u_\alpha + 1)\,|x|\,/\,y_\alpha^2, & u_\alpha \leqslant -1 + {}^1/_2(k+1) \end{cases}$$

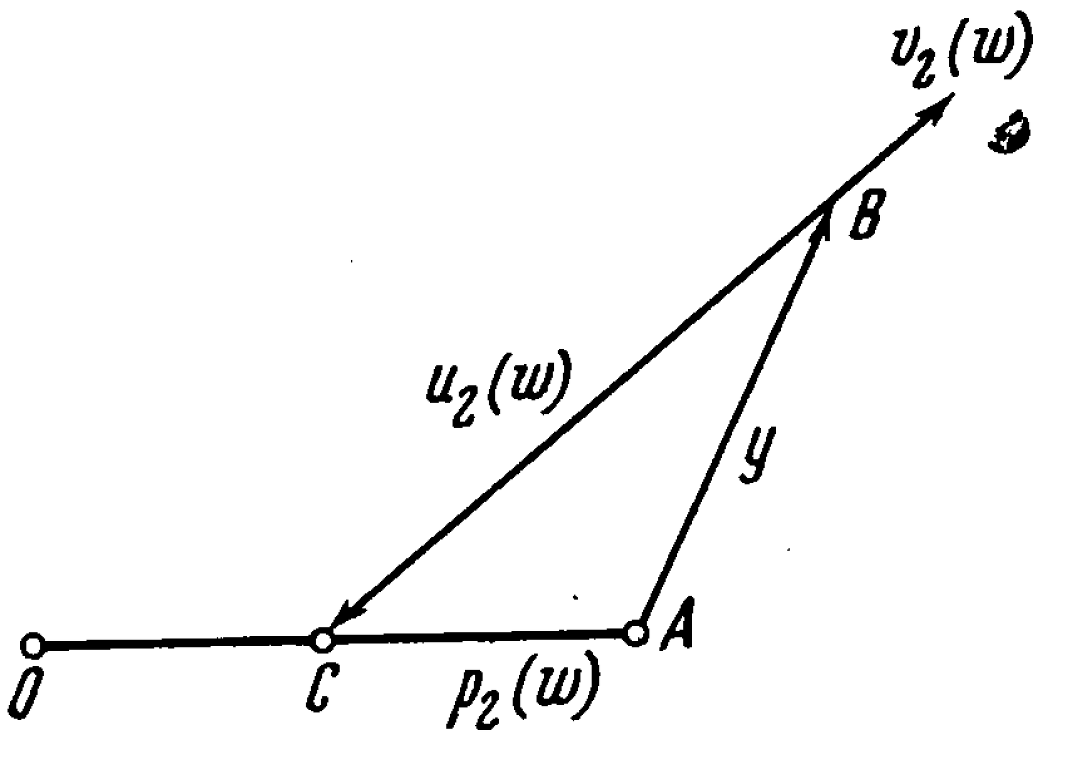
Оценка $u_\alpha \leqslant -1 + {}^1/_2(k+1)$ эквивалентна оценке $s^{\cdot}(w, u^*, v_2(w)) \leqslant 0$. Это значит, что из оценки $(T(w))^{\cdot} < -1$ следуют оценки $u_\alpha + 1 < 0$, $s^{\cdot}(w, u^*, v_2(w)) < 0$, которые показывают, что любое конечное управление u^*, реализующее неравенство $(T(w))^{\cdot} < -1$, мгновенно переводит позицию в область E_2. Импульсные же управления $u = \mu_1\delta$ в этой позиции недопустимы, так как реализуют включение $w^{(1)} \in [r(w) < 0]$. Непрерывность функций $p_2(w)$, $T(w)$ и $p_1(w)$ в области $[\,|x| > 0,\ r(w) > 0]$ следует из теоремы о неявных функциях.

В области $[\,|x| > 0, r(w) = 0]$ предположим от противного, что существует последовательность $w_i \to w$ при $t \to \infty$, такая, что последовательность $p_2(w_i)$ не сходится к $p_2(w)$. Она, очевидно, не может быть неограниченной, не иметь $p = 0$ своей предельной точкой, так как $q(w, p) \to -\infty$ при $p \to -0, -\infty$. Следовательно, существует p_3; $p_2(w) \neq p_3 \leqslant 0$ — предельная точка последовательности $p_2(w_i)$, причем $q(w, p_3) = 0$ вследствие непрерывности функции $q(w, p)$. Равенства $r(w) = q(w, p_3) = 0$, $p_1(w) = p_2(w)$ противоречат оценке $r(w) > q(w, p)$ при $0 > p \neq p_1(w)$.

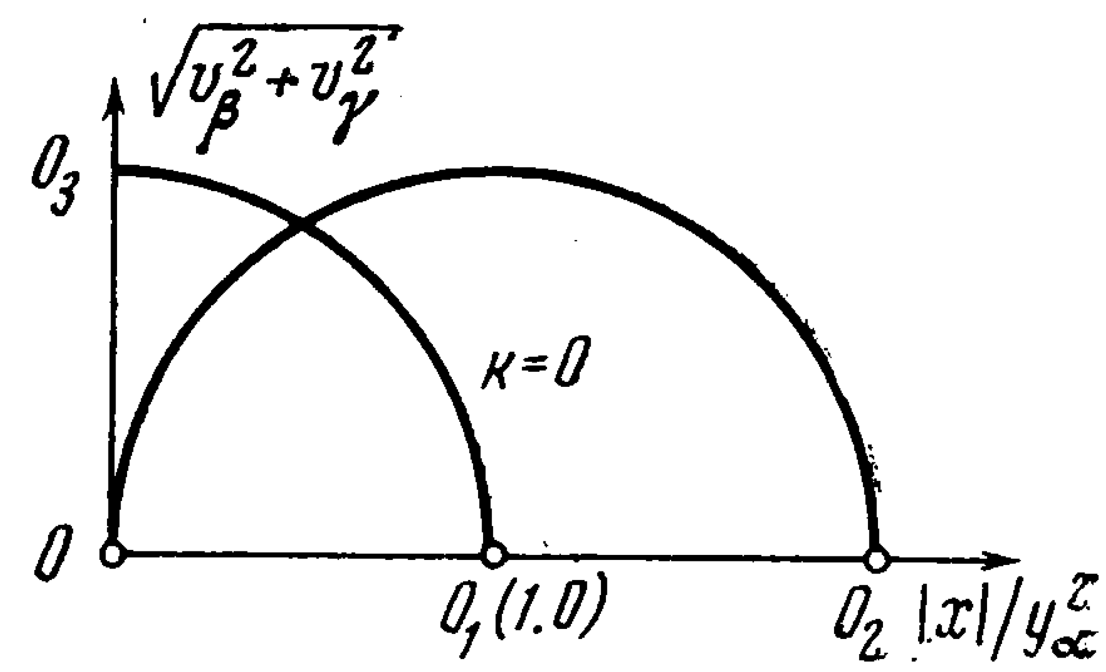
Заметим, что аналогичным рассуждением можно независимо доказать непрерывность функций $p_1(w)$, $r(w)$ при $|x| > 0$.

Пусть $p_4(w) \neq p_1 < 0$ — предельная точка последовательности $p_1(w_i)$, тогда $q(w, p_4) < r(w)$; с другой стороны, противоположная оценка $r(w) = q(w, p_1(w)) \leqslant q(w, p_3)$ следует из оценки $q(w_i, p_1(w)) \leqslant \leqslant q(w_i, p_1(w_i))$.

Все предыдущие соображения и оценки (4.11), (4.12) позволяют утверждать, что никакая пара $u(w, v)$, $v_2(w)$ не может привести позицию на M ранее, чем к моменту $T(w)$. С другой стороны, любая пара $u_2(w, v)$, v приводит позицию на M в точности к моменту $T(w)$. Несмотря на то, что изучение структуры производной T при $w \in E \cap [r(w) = 0]$ может позволить построить управление $u_3(w, v)$, которое при $v \neq v_2(w)$ приведет



Фиг. 1



Фиг. 2

позицию на M ранее, чем к моменту $T(w)$, решение этого вопроса не сможет улучшить результат при $v = v_2(w)$. В итоге можно сформулировать теорему.

Теорема 4.2. Пара управлений $u^\circ = u_2(w, v)$ $v^\circ = v_2(w)$ решают задачу 1 в области $M^\circ [r(w) \geqslant 0;\ |x| > 0]$ со временем $T[u^\circ, v^\circ] = T(w)$.

Теоремы 4.1 и 4.2 позволяют разбить все пространство позиций на два множества

$$W^\circ(M) = M^\circ \cup M, \quad W_0(M) = M_0$$

в первом из которых разрешима задача 1, а во втором — задача 2.

5. Дадим краткую геометрическую интерпретацию результатов. Пусть плоскость чертежа (фиг. 1) содержит вектор $x \neq 0$ (OA) и вектор y (AB). Оптимальным действием первого игрока является реализация импульса $u_2(w)$ (BC), так, чтобы вектор $y^{(1)}$ (AC) был антипараллелен вектору x и равен по модулю величине $|p_2(w)|$, где $p_2(w)$ — наименьший корень уравнения $q(w, p) = 0$.

Действия второго игрока изображены вектором $v_2(w)$, антипараллельным вектору $u_2(w)$.

В дальнейшем при $t > 0$ справедливо включение $w^{(1)}(t) \in E \cap [r(w) = 0]$ и второй игрок реализует оптимальное управление $v^\circ(w) = v_2(w)$;

$w \in E \cap [r(w) = 0]$. Составляющая вектора, перпендикулярная вектору x, произвольна по направлению в плоскости, нормальной к x, а ее модуль в случае $k = 0$ следует вдоль единичного круга (O_1, O_3), а в случае $k = 1$ — вдоль единичного круга (O_2, O) (фиг. 2). Составляющая v_α следует при $k = 0$ вдоль отрезка (A_1O) (фиг. 3), а при $k = 1$ — вдоль отрезка $(A_3O_1A_2)$.

Проведем сравнение с одномерными аналогами случаев $k = 0$ и $k = 1$.

При $k = 0$, $x > 0$ очевидными оптимальными действиями обоих игроков являются управления

$$u^\circ = -\mu\delta, \qquad v^\circ = +1 = v_\alpha$$

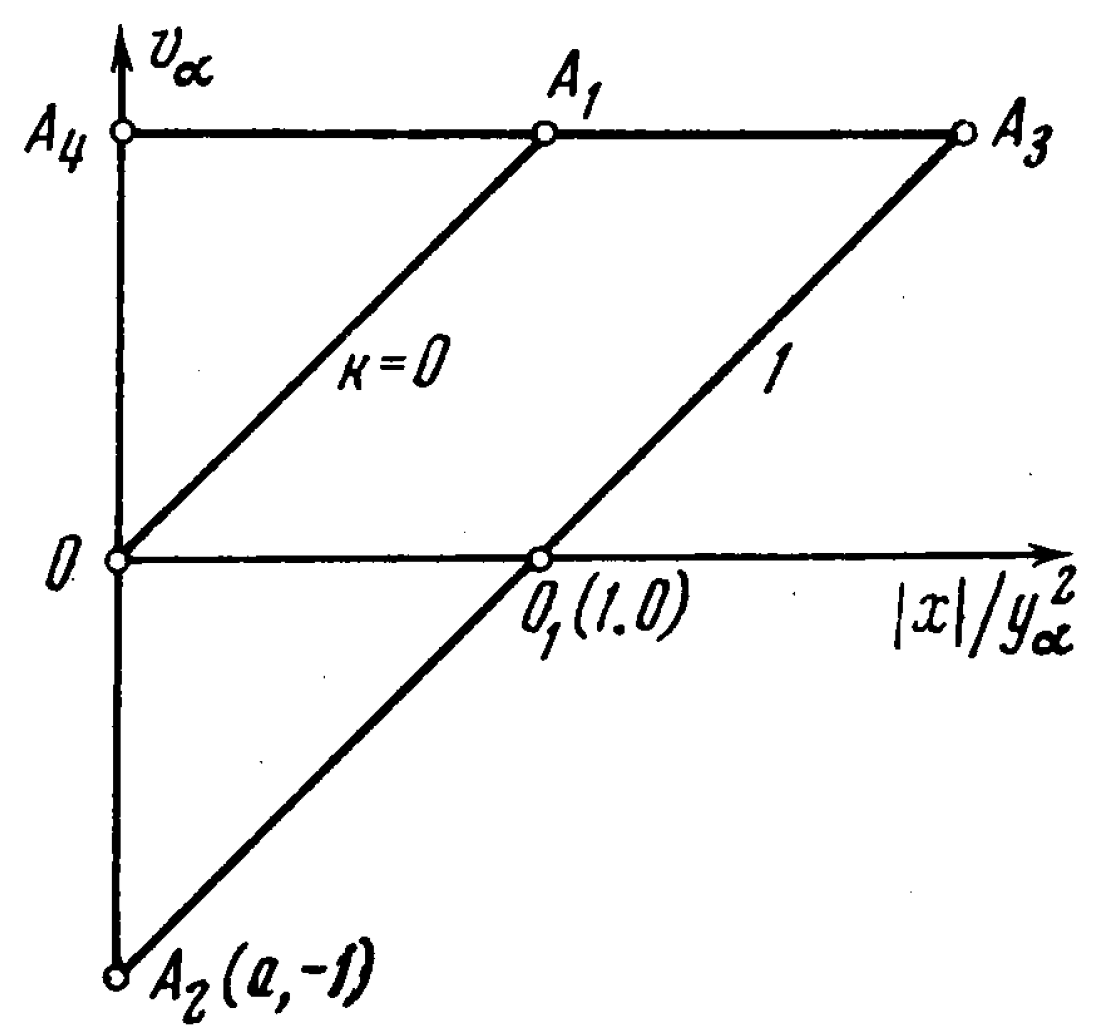
и встреча происходит к моменту

$$T[u^\circ, v^\circ] = (1/2)\left[-(y_\alpha - \mu) - \sqrt{(y_\alpha - \mu)^2 - 4x}\right]$$

в области W° $[y_\alpha - \mu \leqslant 2\sqrt{x}]$. В случае $k = 1$ [4] оптимальное управление $v^\circ = v_\alpha = +1$ на всем множестве W°.

В позициях одномерных аналогов, повторяющих в смысле равенств

$$|x_{(1)}| = |x|, \quad y_\beta = 0, \quad y_\alpha = y_{(1)}, \quad \mu = \mu_{(1)}$$



Фиг. 3

позиции трехмерной задачи, оптимальное время строго меньше оптимального времени трехмерной задачи. Этот факт объясняется отсутствием бокового маневра в одномерной задаче.

Поступила 24 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры, М., «Мир», 1967.
2. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, 1966, т. 21, № 4.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
4. Пожарицкий Г. К. К задаче об импульсной встрече движений. ПММ. 1971, т. 35, вып. 5.