Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВРЕМЕНИ ПЕРВОГО ПОГЛОЩЕНИЯ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Рассматривается линейная задача преследования в условиях локальной выпуклости [1]. Приводится необходимое условие оптимальности времени первого поглощения во всех точках пространства (глобальной оптимальности).

Общие достаточные условия оптимальности времени преследования даны в работах [2,3].

1. Пусть линейная задача преследования в n-мерном евклидовом пространстве R описывается

а) линейным векторным дифференциальным уравнением

$$dz/dt = Cz - u + v, \qquad u = u(t) \in P, \qquad v = v(t) \in Q \tag{1.1}$$

где C — постоянная квадратная матрица порядка n, u, v — измеримые при $t \geqslant 0$ вектор-функции, называемые управлениями игроков (соответственно догоняющего и убегающего), $P \subset R$ и $Q \subset R$ — выпуклые компакты;

б) терминальным множеством M, представимым в виде $M = M_0 + W_0$, где M_0 — линейное подпространство пространства R, W_0 — некоторое компактное выпуклое множество в пространстве L, являющемся ортогональным дополнением в R к M_0.

Будем предполагать, что для задачи (1.1) выполнены условия 1—3 работы [4], обозначения которой сохраним и в данной статье. Матрицу e^{tC} обозначим через $\Phi(t)$, единичный шар в L (его граница есть сфера K) — через S.

2. В дополнительных предположениях о достаточной гладкости функции $\lambda(z, t)$ необходимые условия оптимальности [4] могут быть переписаны в дифференциальной форме.

Именно, пусть $c(t)$ — функция, даваемая леммой 2 в [4], и D — совокупность пар $(z, t) \in R \times (0, +\infty)$ таких, что

$$\lambda(z, t) < c(t) \tag{2.1}$$

(Непрерывность обеих частей неравенства (2.1) гарантирует открытость множества D.) Тогда имеют место следующие известные леммы (см. [2,5]).

Лемма 1. Если $(z, t) \in D$, то существует единственный вектор $\psi(z, t) \in K$ такой, что

$$\pi\Phi(t) z = -\lambda(z, t)\psi(z, t) + W(t, \psi(z, t)) \tag{2.2}$$

функция $\psi(z, t)$ непрерывно дифференцируема на D, причем $\psi(z, T(z)) \equiv \varphi(z)$, если $0 < T(z) < +\infty$.

Обозначим $G(z, t) = Cz - u(t, \psi(z, t)) + v(t, \psi(z, t))$, где $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ — функции, даваемые условием 1 в [4].

Лемма 2. Функция $\lambda(z, t)$ непрерывно дифференцируема на D, причём ($\Phi^*(t)$ — оператор, сопряженный оператору $\Phi(t)$)

$$\partial\lambda(z, t)/\partial z = -\Phi^*(t)\psi(z, t)$$

$$\partial\lambda(z, t)/\partial t = -(\psi(z, t)\cdot\pi\Phi(t)G(z, t))$$

В частности

$$\frac{\partial\lambda(z, t)}{\partial t} = \left(\frac{\partial\lambda(z, t)}{\partial z}\cdot G(z, t)\right)$$

Наконец, непосредственным подсчетом легко убедиться, что функция $\lambda(z, t)$ дважды непрерывно дифференцируема на D, причем

$$\frac{\partial^2\lambda(z, t)}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2\lambda(z, t)}{\partial z\partial t}\cdot G(z, t)\right) \tag{2.3}$$

Предположим, что функция $\partial^2\lambda(z, t)/\partial t^2$ дифференцируема на D.

Теорема 1. Пусть $z_0 \in R \setminus M$, $T_0 = T(z_0) < +\infty$ таково, что

$$\frac{\partial\lambda(z_0, T_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2\lambda(z_0, T_0)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.4}$$

Тогда, если время $T_0 = T(z_0)$ оптимально, то

$$H(z_0) = \frac{\partial^3\lambda(z_0, T_0)}{\partial t^3} - \left(\frac{\partial^3\lambda(z_0, T_0)}{\partial z\partial t^2}\cdot G(z_0, T_0)\right) \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi_0 = \varphi(z_0)$$

$$z(s) = \Phi(s)\left[z_0 - \int_0^s \Phi(-r)\left[u(T_0 - r, \varphi_0) - v(T_0 - r, \varphi_0)\right]dr\right]$$

Тогда, как легко проверить

$$\lambda(z(s), T_0 - s) = 0,\ \pi\Phi(T_0 - s)z(s) = W(T_0 - s, \varphi_0) \tag{2.6}$$

так что (см. (2.2)) $(z(s), T_0 - s) \in D$; $\psi(z(s), T_0 - s) = \varphi_0$ и

$$\begin{aligned} G(z(s), T_0 - s) &= Cz(s) - u(T_0 - s, \varphi_0) + v(T_0 - s, \varphi_0) = \\ &= dz(s)/ds \end{aligned} \tag{2.7}$$

Поэтому в соответствии с (2.3) и (2.7)

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\lambda(z(s), T_0 - s)}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial^2\lambda(z(s), T_0 - s)}{\partial z\partial t}\cdot\frac{dz(s)}{ds}\right) - \frac{\partial^2\lambda(z(s), T_0 - s)}{\partial t^2} = 0$$

отсюда в силу (2.4)

$$\frac{\partial\lambda(z(s), T_0 - s)}{\partial t} \equiv 0, \qquad s \in [0, T_0] \tag{2.8}$$

Поскольку $T(z_0)$ оптимально, то в силу теоремы 2 работы [4]

$$\lambda(z(s), \tau) \leqslant 0, \qquad \tau \in [0, T_0 - s]$$

что вместе с (2.6), (2.8) дает

$$\frac{\partial^2\lambda\,(z\,(s),\,T_0-s)}{\partial t^2}\leqslant 0 \tag{2.9}$$

Объединяя (2.4) и (2.9), получим (см. (2.7))

$$0\geqslant\lim_{s\to+0}\frac{1}{s}\left[\frac{\partial^2\lambda\,(z\,(s),\,T_0-s)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\lambda\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^2}\right]=$$
$$=\left(\frac{\partial^3\lambda\,(z_0,\,T_0)}{\partial z\partial t^2}\cdot\frac{\partial z\,(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0}\right)-\frac{\partial^3\lambda\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^3}=-H\,(z_0)$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Пусть $\mu\,(z,\,t)$ — трижды непрерывно дифференцируемая положительная на D функция и $F\,(z,\,t)=\mu\,(z,\,t)\cdot\lambda\,(z,\,t)$. Тогда, если $z_0\in R\setminus M$ удовлетворяет (2.4), то

$$Y\,(z_0)=\frac{\partial^3F\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^3}-\left(\frac{\partial^3F\,(z_0,\,T_0)}{\partial z\partial t^2}\cdot G\,(z_0,\,T_0)\right)\equiv\mu\,(z_0,\,T_0)\cdot H\,(z_0)$$

Доказательство. Непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^3F}{\partial z\partial t^2}=\frac{\partial\mu}{\partial z}\,\frac{\partial\lambda}{\partial t^2}+2\,\frac{\partial^2\mu}{\partial z\partial t}\,\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{\partial^3\mu}{\partial z\partial t^2}\,\lambda+\mu\,\frac{\partial^3\lambda}{\partial z\partial t^2}+2\,\frac{\partial\mu}{\partial t}\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t}+\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\,\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

Первое, второе и третье слагаемые в точке $(z_0,\,T_0)\in D$ обращаются в соответствии с (2.4) в нуль. Так что в этой точке

$$\left(\frac{\partial^3F}{\partial z\partial t^2}\cdot G\right)=\mu\left(\frac{\partial^3\lambda}{\partial z\partial t^2}\cdot G\right)+2\,\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial t}\cdot G\right)+\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\cdot G\right)$$

Второе слагаемое равно нулю в силу (2.3) и (2.4), а третье — в силу леммы 2 и (2.4). Аналогично убеждаемся, что

$$\frac{\partial^3F\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^3}=\mu\,(z_0,\,T_0)\,\frac{\partial^3\lambda\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^3}$$

Это и завершает доказательство леммы.

Из леммы 3 и очевидной эквивалентности условий

$$\frac{\partial^i\lambda\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^i}=0,\quad i=0,1,2,\qquad\qquad \frac{\partial^iF\,(z_0,\,T_0)}{\partial t^i}=0,\quad i=0,1,2$$

вытекает, что теорема 1 останется в силе, если в ее формулировке всюду функцию $\lambda\,(z,\,t)$ заменить на $F\,(z,\,t)$.

3. Необходимое условие оптимальности [4] связано с данной точкой z_0. Ниже приведено необходимое условие глобальной оптимальности времени $T\,(z)$ верхнего слоя, т. е. оптимальности $T\,(z)$ в каждой точке пространства R.

Определение. Точку $z_0\in R$ назовем «особой», если существуют такие числа $0<T_1<T_0<+\infty$, что $(T_1=T\,(z_0))$

$$\lambda\,(z_0,\,t)<0,\quad t\in[0,\,T_1)\cup(T_1,\,T_0);\qquad\lambda\,(z_0,\,T_0)=0 \tag{3.1}$$

$$|\,\Phi^*\,(T_1)\,\varphi_1\,|\,\Phi^*\,(T_0)\,\varphi_0\neq|\,\Phi^*\,(T_0)\,\varphi_0\,|\,\Phi^*\,(T_1)\,\varphi_1 \tag{3.2}$$

$$(\varphi_0\cdot\Phi\,(T_0)\,[u\,(T_0,\,\varphi_0)-v\,(T_0,\,\varphi_0)-u\,(T_1,\,\varphi_1)+v\,(T_1,\,\varphi_1)])<0 \tag{3.3}$$

Здесь $\varphi_0 = \psi(z_0, T_0)$, $\varphi_1 = \psi(z_0, T_1)$.

Теорема 2. Пусть для задачи (1.1) существует особая точка z_0. Тогда в R найдется также и точка z_*, для которой время $T(z_*) < +\infty$ неоптимально.

Доказательство. Положим

$$b = |\Phi^*(T_0)\varphi_0|\Phi^*(T_1)\varphi_1 - |\Phi^*(T_1)\varphi_1|\Phi^*(T_0)\varphi_0$$

тогда (см. (3.2)) $(\varphi_1 \cdot \Phi(T_1)b) > 0$. В силу непрерывности функции $\psi(z, t)$ (см. лемму 1 и неравенство (3.1)) существует такое $\varepsilon \in (0, T_0 - T_1) \cap \cap (0, T_1)$, что

$$(\psi(z_0, t) \cdot \Phi(t)b) > 0, \qquad t \in E_1 = [T_1 - \varepsilon, \ T_1 + \varepsilon]$$

Возьмем произвольную бесконечно малую последовательность $\delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$ и положим

$$\lambda_i = \min|\lambda(z_0, t)| > 0, \qquad t \in [0, T_0 - \delta_i] \setminus E_1$$

$$\gamma = \max|(\psi(z_0, t) \cdot \Phi(t)b)|, \qquad t \in [0, T_0]$$

$$z_i = z_0 + \alpha_i b, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

где $\alpha_i = {}^1/_2\lambda_i\gamma^{-1} \to 0$ при $t \to \infty$.

Тогда для всех $t \in [0, T_0 - \delta_i]$

$$\begin{aligned}\lambda(z_i, t) &\leqslant (\psi(z_0, t) \cdot [W(t, \psi(z_0, t)) - \pi\Phi(t)(z_0 + \alpha_i b)]) = \\ &= \lambda(z_0, t) - \alpha_i(\psi(z_0, t) \cdot \Phi(t)b) < 0\end{aligned} \tag{3.4}$$

Поскольку $(\varphi_0 \cdot \Phi(T_0)b) < 0$, то в силу леммы 1 неравенство

$$\beta_i = (\psi(z_i, T_0) \cdot \Phi(T_0)b) < 0$$

выполнено для всех достаточно больших i. Поэтому (см. лемму 1, [4])

$$\begin{aligned}\lambda(z_i, T_0) &= (\psi(z_i, T_0) \cdot [W(T_0, \psi(z_i, T_0)) - \pi\Phi(T_0)(z_0 + \alpha_i b)]) = \\ &= (\psi(z_i, T_0) \cdot [W(T_0, \psi(z_i, T_0)) - W(T_0, \varphi_0)]) - \alpha_i\beta_i > 0\end{aligned} \tag{3.5}$$

Сравнивая неравенства (3.4) и (3.5), получаем $T_i = T(z_i) \in [T_0 - \delta_i, T_0]$ для всех достаточно больших i, так что

$$T_i \to T_0, \qquad i \to \infty \tag{3.6}$$

В соответствии с леммой 1

$$\psi_i = \varphi(z_i) = \psi(z_i, T_i) \to \psi(z_0, T_0) = \varphi_0, \qquad i \to \infty \tag{3.7}$$

Покажем, что для достаточно больших i время $T(z_i)$ неоптимально (это и завершит доказательство теоремы). Предположим противное: пусть T_i оптимально для любого $i = 1, 2, \ldots$. Предлагаем догоняющему для преследования, начинающегося из точки z_i, выбирать свое управление $u_i(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon_i = \alpha_i^{1/2}$ равным

$$u_i(r) \equiv u(T_1 + \varepsilon_i - r, \psi(z_i, T_i + \varepsilon_i))$$

В силу предположенной оптимальности времени $T(z_i)$ убегающий может так выбрать свое управление $v_i(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon_i$, что для движения

$$z_i(t) = \Phi(t)\left(z_i - \int_0^t \Phi(-r)\,[u_i(r) - v_i(r)]\,dr\right), \quad t \in [0, \varepsilon_i]$$

выполнены неравенства

$$\lambda(z_i(\varepsilon_i), T_i - \varepsilon_i) \leqslant 0, \qquad \lambda(z_i(\varepsilon_i), T_1) < 0 \tag{3.8}$$

В противном случае имели бы либо $T(z_i(\varepsilon_i)) < T_i - \varepsilon_i$, либо $T(z_i(\varepsilon_i)) \leqslant T_1$ и, следовательно, $T(z_i(\varepsilon_i)) < T_i - \varepsilon_i$ для всех достаточно больших i, откуда в соответствии с теоремой 1 из [4] следовала бы неоптимальность $T(z_i)$ — противоречие.

Покажем, что система (3.8) все-таки противоречива для всех достаточно больших i, и, что, следовательно, предположение об оптимальности $T(z_i)$ было неверным.

Положим

$$\varphi_i = \psi(z_i(\varepsilon_i), T_1), \quad \theta_i = \psi(z_i, T_1 + \varepsilon_i); \quad \lambda^i = \lambda(z_i, T_1 + \varepsilon_i)$$

Второе из неравенств (3.8) дает после преобразований (см. лемму 2 из [4] и лемму 1)

$$0 > \lambda(z_i(\varepsilon_i), T_1) = (\varphi_i \cdot [W(T_1, \varphi_i) - W(T_1, \theta_i)]) +$$

$$+ \lambda^i \cdot (\varphi_i \cdot \theta_i) + \left(\varphi_i \cdot \int_{T_1}^{T_1+\varepsilon_i} \Phi(s)\,[v(s, \theta_i) - v_i(T_1 + \varepsilon_i - s)]\,ds\right) \geqslant \tag{3.9}$$

$$\geqslant c_1(1 - (\varphi_i \cdot \theta_i)) + \lambda^i \cdot (\varphi_i \cdot \theta_i) + \left(\varphi_i \cdot \int_{T_1}^{T_1+\varepsilon_i} \Phi(s)\,[v(s, \theta_i) - v_i(T_1 + \varepsilon_i - s)]\,ds\right)$$

$$(c_1 = c(T_1) > 0)$$

Выбирая, если необходимо, из $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ подпоследовательность, можно считать (множество Q — выпуклый компакт!), что

$$\lim_{i \to \infty} \frac{1}{\varepsilon_i} \int_0^{\varepsilon_i} v_i(r)\,dr = v_0 \in Q$$

Далее, в силу формулы (3.4), для всех достаточно больших i

$$|\lambda^i| \leqslant |\lambda(z_0, T_1 + \varepsilon_i)| + 2\varepsilon_i^2\gamma \tag{3.10}$$

Поскольку $\lambda(z_0, t)$ — дифференцируемая функция параметра t, принимающая в точке $t = T_1$ максимальное значение $\lambda(z_0, T_1) = 0$, то

$$\frac{\lambda(z_0, T_1 + \varepsilon_i)}{\varepsilon_i} \to \frac{\partial \lambda(z_0, T_1)}{\partial t} = 0, \quad i \to \infty$$

Последнее соотношение вместе с (3.10) дает

$$|\lambda^i|\,\varepsilon_i^{-1} \to 0, \qquad i \to \infty \tag{3.11}$$

Наконец, поскольку $z_i \to z_0$; $z_i(\varepsilon_i) \to z_0$, то в силу леммы 1 $\varphi_i \to \psi(z_0, T_1) = \varphi_1$ и $\theta_i \to \varphi_1$. Следовательно (функция $v(r, \varphi)$ равномерно непрерывна на $[T_1, T_0] \times K$, см. условие 1, [4])

$$\max_{T_1 \leqslant s \leqslant T_1+\varepsilon_i} |v(s, \theta_i) - v(T_1, \varphi_1)| \to 0, \qquad i \to \infty \tag{3.12}$$

Деля неравенство (3.9) на $\varepsilon_i > 0$ и переходя к пределу при $i \to \infty$, получим, используя (3.11) и (3.12)

$$0 \geqslant c_1 \lim_{i\to\infty} \frac{1-(\varphi_i \cdot \theta_i)}{\varepsilon_i} + (\varphi_1 \cdot \Phi(T_1)[v(T_1, \varphi_1) - v_0])$$

Оба слагаемых в правой части полученного неравенства неотрицательны, поэтому в соответствии с условием 1 в [4] $v_0 = v(T_1, \varphi_1)$.

Первое из неравенств (3.8) дает после преобразований (здесь $\chi_i = \psi(z_i(\varepsilon_i), T_i - \varepsilon_i)$ и $c = \min c(t)$, $t \in [T_1, T_0]$; $c > 0$ (см. лемму 2 в [4]))

$$\begin{gathered} 0 \geqslant \lambda(z_i(\varepsilon_i), T_i - \varepsilon_i) = \Big(\chi_i \cdot \Big[W(T_i - \varepsilon_i, \chi_i) - W(T_i - \varepsilon_i, \psi_i) - \\ - \int\limits_{T_i-\varepsilon_i}^{T_i} \Phi(s)[u(s, \psi_i) - v(s, \psi_i)]\,ds + \int\limits_0^{\varepsilon_i} \Phi(T_i - r)[u_i(r) - v_i(r)]\,dr\Big]\Big) \geqslant \\ \geqslant c \cdot (1 - (\chi_i \cdot \psi_i)) - \Big(\chi_i \cdot \int\limits_{T_i-\varepsilon_i}^{T_i} \Phi(s)[u(s, \psi_i) - v(s, \psi_i)]\,ds\Big) + \\ + \int\limits_0^{\varepsilon_i} (\chi_i \cdot \Phi(T_i - r)[u(T_1 + \varepsilon_i - r, \theta_i) - v_i(r)])\,dr \end{gathered} \tag{3.13}$$

Деля обе части (3.13) на $\varepsilon_i > 0$ и переходя к пределу, получим

$$\begin{gathered} 0 \geqslant c \lim_{i\to\infty} \frac{1-(\chi_i \cdot \psi_i)}{\varepsilon_i} - (\varphi_0 \cdot \Phi(T_0)[u(T_0, \varphi_0) - v(T_0, \varphi_0)]) + \\ + (\varphi_0 \cdot \Phi(T_0)[u(T_1, \varphi_1) - v(T_1, \varphi_1)]) \end{gathered}$$

Здесь использованы равномерная непрерывность функций $u(r, \varphi)$ и $v(r, \varphi)$ на $[T_1, T_0] \times K$, формула (3.7) и соотношения $\chi_i \to \varphi_0$, $\theta_i \to \varphi_1$, $i \to \infty$. Поскольку первое слагаемое неотрицательно, то полученное неравенство противоречит (3.3). Теорема доказана.

Таким образом, необходимое условие глобальной оптимальности времени $T(z)$ заключается в отсутствии особых точек z в пространстве R.

4. Будем дополнительно предполагать, что $0 \in P$, $0 \in Q$ и что

$$\dim M_P = \dim M_Q = \dim L \tag{4.1}$$

где M_P и M_Q — подпространства наименьшей размерности, содержащие соответственно P и Q.

В [3] показано, что условие

$$u(r, \varphi) \equiv u(\varphi), \quad v(r, \varphi) \equiv v(\varphi), \quad r > 0, \quad \varphi \in K \tag{4.2}$$

вместе с условием полного выметания достаточно для оптимальности времени $T(z)$.

Теорема 3. Для того, чтобы имело место (4.2), необходимо и достаточно, чтобы существовали такие непрерывные положительные скалярные функции $f(r)$ и $g(r)$, $r>0$ и такие линейные гомеоморфизмы $A: M_P \to L$ и $B: M_Q \to L$, что для всех $r>0$

$$\pi\,\Phi(r)\,u = f(r)\,Au, \qquad u \in P \tag{4.3}$$
$$\pi\,\Phi(r)\,v = g(r)\,Bv, \qquad v \in Q$$

Доказательство проведем для параметра u (для v оно аналогично).

Пусть выполнено (4.3). По определению

$$0 < (\varphi\cdot\Phi(r)\,[u(r,\varphi) - u]) = f(r)\,(\varphi\cdot A\,[u(r,\varphi) - u]), \quad u(r,\varphi) \neq u \in P$$

так что $u(r,\varphi)$ дает строгий максимум выражению $(\varphi\cdot Au)$, $u \in P$, откуда и следует (4.2).

Обратно, пусть выполнено (4.2). В соответствии с условием 1 [4] внутренность $\pi\,\Phi(r)\,P$ в L непуста, поэтому из (4.1) следует, что для любого $r>0$ отображение $\pi(r) = \pi\,\Phi(r): M_P \to L$ есть линейный гомеоморфизм «на», а значит, и сопряженное к нему отображение $\tau(r) = \pi^*(r): L \to M_P$ является [6] линейным гомеоморфизмом «на». Возьмем произвольные $\psi \in M_P$, $|\psi| = 1$ и $r>0$. Пусть $\varphi(\psi, r) \in K$ таково, что

$$\psi = \frac{\tau(r)\,\varphi(\psi,r)}{|\tau(r)\,\varphi(\psi,r)|}$$

Тогда для всех $u \in P$ будем иметь

$$(\psi\cdot u) = \frac{(\varphi(\psi,r)\cdot\pi\Phi(r)\,u)}{|\tau(r)\,\varphi(\psi,r)|}$$

Максимум правой части этого равенства достигается на единственном векторе $u(\varphi(\psi,r))$, а следовательно, и максимум левой части, которая, однако, не зависит от r. Поэтому для любых $r_1, r_2 > 0$ выполнено $u(\varphi(\psi,r_1)) = u(\varphi(\psi,r_2))$. Далее, в силу локальной выпуклости поверхности $\pi\,\Phi(r)\,u(K)$ найдется такое $c_1 > 0$ (см. лемму 1, [4]), что

$$0 = (\varphi(\psi,r_1)\cdot\pi\Phi(r)\,[u(\varphi(\psi,r_1)) - u(\varphi(\psi,r_2))]) \geqslant c_1\,(1 -$$
$$-(\varphi(\psi,r_1)\cdot\varphi(\psi,r_2))) \geqslant 0$$

Таким образом, $\varphi(\psi,r_1) = \varphi(\psi,r_2) \equiv \varphi(\psi)$ для любых $r_1, r_2 > 0$ и $\psi \in M_P$, $|\psi| = 1$. Так что

$$\psi \equiv \frac{\tau(r)\,\varphi(\psi)}{|\tau(r)\,\varphi(\psi)|}, \qquad r>0 \tag{4.4}$$

Зафиксируем $T>0$. Пусть $\varphi \in K$ и $\psi = \tau(T)\,\varphi/|\tau(T)\,\varphi|$. Тогда в соответствии со сказанным выше $\varphi = \varphi(\psi)$. Поэтому в силу (4.4) для любого $r>0$

$$\tau(r)\,\varphi \equiv f(r,\varphi)\,\tau(T)\,\varphi, \quad f(r,\varphi) = |\tau(r)\,\varphi| \,/\, |\tau(T)\,\varphi|$$

Покажем, что $f(r,\varphi)$ не зависит от φ. Действительно, пусть φ_1 и φ_2— линейно независимые векторы из K. Тогда векторы $\tau(T)\,\varphi_1$ и $\tau(T)\,\varphi_2$ линейно независимы ($\tau(T)$ — гомеоморфизм!). Поэтому из очевидного соотношения

$$f\left(r, \frac{\varphi_1+\varphi_2}{|\varphi_1+\varphi_2|}\right)\frac{\tau(T)\varphi_1+\tau(T)\varphi_2}{|\varphi_1+\varphi_2|} = \tau(r)\frac{\varphi_1+\varphi_2}{|\varphi_1+\varphi_2|} =$$

$$= \frac{f(r,\varphi_1)\tau(T)\varphi_1 + f(r,\varphi_2)\tau(T)\varphi_2}{|\varphi_1+\varphi_2|}$$

получаем для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, $r > 0$

$$f(r,\varphi_1) = f\left(r, \frac{\varphi_1+\varphi_2}{|\varphi_1+\varphi_2|}\right) = f(r,\varphi_2)$$

Таким образом, существует такая функция $f(r) > 0$, что

$$\tau(r)\varphi \equiv f(r)\tau(T)\varphi; \qquad r > 0, \qquad \varphi \in K \tag{4.5}$$

Умножая (4.5) скалярно на $u \in P$ и пользуясь произвольностью φ, получим $\pi\Phi(r)u \equiv f(r)\pi\Phi(T)u$ для всех $u \in P$, $r > 0$. Отсюда, в частности, следует и непрерывность $f(r)$. Теорема доказана.

5. Пусть

$$0 < T_0 = T(z_0) < +\infty, \qquad \varphi_0 = \varphi(z_0)$$

$$I(t,\tau) = \lambda\left(\Phi(t)\left[z_0 - \int_0^t \Phi(-r)\left[u(T_0 - r,\varphi_0) - v(T_0 - r,\varphi_0)\right]dr\right], \tau\right)$$

В работе [4] показано, что для оптимальности времени $T(z_0)$ необходимо, чтобы имело место неравенство

$$\mathrm{I}(t,\tau) \leqslant 0; \quad t \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad t+\tau \leqslant T_0 \tag{5.1}$$

Рассмотрим один важный частный случай, для которого проверка неравенства (5.1) значительно упрощается. Предположим, что для задачи (1.1) выполнены условия теоремы 3, причем

$$AP = BQ = S \tag{5.2}$$

а также, что

$$W_0 = lS, \qquad l \geqslant 0 \tag{5.3}$$

Тогда $\pi\Phi(r)u(\varphi) = f(r)\varphi$; $\pi\Phi(r)v(\varphi) = g(r)\varphi$; $W(t,\varphi) = h(t)\varphi$, где

$$h(t) = l + \int_0^t [f(r) - g(r)]\,dr > 0, \qquad t > 0$$

(см. условие 3, [4]); $\lambda(z,t) = h(t) - |\pi\Phi(t)z|$, $T_0 = T(z_0)$ — наименьший неотрицательный корень уравнения

$$F(z_0, t) = h^2(t) - |\pi\Phi(t)z_0|^2 = 0 \tag{5.4}$$

Здесь и далее используется более удобная, чем $\lambda(z,t)$, функция $F(z,t)$, имеющая те же корни. Наконец, $\varphi(z_0) = \pi\Phi(T_0)z_0/h(T_0)$.

Теорема 4. Если для задачи (1.1) выполнены соотношения (5.2), (5.3), то неравенство (5.1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$I(t, T_i) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_0 - T_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.5}$$

где $0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_m$ — все точки локального максимума функции $h(t)$, рассматриваемой на отрезке $[0, T_0]$ (ими, в частности, могут оказаться и концы отрезка).

Доказательство. Необходимость формулы (5.5) очевидна. Докажем достаточность. Пусть, напротив, неравенства (5.5) выполнены, но существуют $t_0 > 0$, $\tau_0 > 0$, $t_0 + \tau_0 < T_0$ такие, что

$$\lambda\left(\Phi(t_0)\left[z_0 - \int_0^{t_0} \Phi(-r)\,[u(\varphi_0) - v(\varphi_0)]\,dr\right],\ \tau_0\right) > 0$$

или, что то же самое (см. (5.4))

$$h^2(\tau_0) - |h(\tau_0)\,\varphi_0 - \Psi|^2 > 0, \qquad \Psi = h(\tau_0 + t_0)\,\varphi_0 - \pi\Phi(\tau_0 + t_0) z_0$$

Отсюда

$$-|\Psi|^2 + 2h(\tau_0)\,\alpha > 0, \qquad \alpha = (\varphi_0 \cdot \Psi) \tag{5.6}$$

и, в частности

$$\alpha > 0 \tag{5.7}$$

Из определения $T(z_0)$ и неравенства $\tau_0 + t_0 < T_0$ имеем (см. (5.4))

$$h^2(\tau_0 + t_0)^2 - |\pi\Phi(\tau_0 + t_0)\,z_0 - (h(\tau_0 + t_0) - h(\tau_0 + \tau_0))\,\varphi_0|^2 < 0$$

или, что то же

$$-|\Psi|^2 + 2h(\tau_0 + t_0)\,\alpha < 0 \tag{5.8}$$

Вычитая из (5.6) неравенство (5.8), получим

$$2\alpha\,(h(\tau_0) - h(\tau_0 + t_0)) > 0$$

откуда в силу (5.7) $h(\tau_0) > h(\tau_0 + t_0)$.

Пусть $T^* = T_{i0}$ — точка локального максимума функции $h(t)$ на отрезке $[0, T_0]$, такая, что $T^* < \tau_0 + t_0$ и $h(T^*) \geqslant h(\tau_0)$. Тогда (см. (5.7))

$$2\alpha\,(h(T^*) - h(\tau_0)) \geqslant 0$$

Прибавляя это неравенство к (5.6), будем иметь

$$h^2(T^*) - |\pi\Phi(\tau_0 + t_0)\,z_0 - (h(\tau_0 + t_0) - h(T^*))\,\varphi_0|^2 > 0$$

Это эквивалентно неравенству $I(t^*, T_{i_0}) > 0$, где $t^* = \tau_0 + t_0 - T^* > 0$, что противоречит (5.5). Теорема доказана.

Дословным повторением приведенных выше рассуждений можно убедиться, что утверждение теоремы 4 останется в силе, если неравенства (5.1) и (5.5) заменить соответственно на неравенства

$$I(t, \tau) < 0, \quad t \geqslant 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad t + \tau < T_0 = T(z_0) \tag{5.9}$$

$$I(t, T_i) < 0, \quad t \geqslant 0, \quad t < T_0 - T_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

6. Оказывается, что условие (5.9) даже в комбинации с (5.2), (5.3) может оказаться недостаточным для оптимальности времени $T(z_0)$, если на $[0, T_0]$ не выполнено условие полного выметания (см. [3]).

Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пусть в задаче (1.1) (для удобства вектор-столбцы выписываем в строчку) $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, \psi, \theta$ — ν-мерные векторы ($\nu \geqslant 4$)

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5), \quad |\psi| \leqslant 1, \quad |\theta| \leqslant 1, \quad \lambda = 10^9$$

$$u = (100\psi + \lambda\psi, 0, 840\psi, 0, 960\psi), \quad v = (\lambda\theta, 340\theta, 0, 1320\theta, 0)$$

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad M = M_0 = \{z\colon\ z_1 = 0\}$$

Тогда, как легко проверить

$$\pi\Phi(t)\, z = z_1 + tz_2 + \frac{t^2}{2} z_3 + \frac{t^3}{6} z_4 + \frac{t^4}{24} z_5$$

$$\pi\Phi(r)\, u = f(r)\, \psi, \qquad f(r) = 100 + \lambda + 420r^2 + 40r^4$$

$$\pi\Phi(r)\, v = g(r)\, \theta, \qquad g(r) = \lambda + 340r + 220r^3$$

$$h(t) = 23\,[1 + (8/23\, t - 1)(t - 1)^4] > 0$$

Так что условия (5.2), (5.3) выполнены.

Пусть $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — единичные ν-мерные векторы такие, что $(\varphi_0 \cdot \varphi_1) = 21/23$ и $(\varphi_i \cdot \varphi_j) = 0$ при $i \neq j$ в остальных случаях. Пусть $\delta > 0$, $\mu = 2\sqrt{386}$.

Рассмотрим начальное состояние $z_0 = (z_{10}, z_{20}, z_{30}, z_{40}, z_{50})$ где

$$z_{10} = 16\varphi_0 + \delta^2\varphi_3$$

$$z_{20} = -64\varphi_0 + 92\varphi_1 + \mu\varphi_2 - 1/2\, \delta^2\varphi_3$$

$$z_{30} = 192\varphi_0 - 276\varphi_1 - 5\mu\varphi_2$$

$$z_{40} = -z_{50} = -384\varphi_0 + 552\varphi_1 + 12\mu\varphi_2$$

Тогда

$$\pi\Phi(t)\, z_0 = 16(1 - t)^4 \varphi_0 + 23\,[1 - (1 - t)^4]\, \varphi_1 + 1/2\, \mu t\, (2 - t)(1 - t)^2 \varphi_2 + {} + 1/2\, \delta^2 (2 - t)\, \varphi_3$$

Непосредственный подсчет дает

$$F(z_0, t) = h^2(t) - |\pi\Phi(t)\, z_0|^2 = -(2 - t)^2\, [2(1 - t)^4 P_4(t) + 1/4\, \delta^4]$$

$$P_4(t) = 32 + 240t - 79t^2 + 184t^3 - 32t^4 > 0 \text{ на } [0, 2]$$

Так что $T_0 = T(z_0) = 2$, $\varphi(z_0) = \varphi_0$. Далее $T^* = 1$ — единственная точка локального максимума функции $h(t)$ на $[0, 2]$. Поэтому в силу теоремы 4 условие (5.9) также выполнено, ибо

$$F\left(\Phi(t)\left[z_0 - \int\limits_0^t \Phi(-r)\,[u(\varphi_0) - v(\varphi_0)]\, dr\right], T^*\right) = -(1 - t)^2 \left[t^4 Q_4(t) + \frac{\delta^4}{4}\right]$$

$$t \in (0, T_0 - T^*)$$

Здесь $Q_4(t) = 64t^4 - 32t^3 + 446t^2 + 924t + 630 > 0$ на $[0, 1]$.

Однако время $T_0 = T(z_0)$ неоптимально при достаточно малых δ (например, при $\delta = 10^{-8}$). Доказательство этого факта легко проводится от противного дословным повторением рассуждений п. 3, предполагая, что $T(z_0)$ оптимально и предлагая догоняющему на отрезке $[0, \delta]$ полагать свое управление равным

$$\psi(r) \equiv \varphi^* = \frac{\pi\Phi(T^* + \delta) z_0}{|\pi\Phi(T^* + \delta) z_0|}$$

Иными словами, $u(r) \equiv u(\varphi^*)$, $0 \leqslant r \leqslant \delta$. Возможность такого хода доказательства связана с тем, что при $\delta = 0$ точка z_0 — особая.

7. Для линейных задач преследования, изучавшихся в п. 5, т. е. удовлетворяющих условиям (5.2), (5.3), сказанное в п. 2 принимает следующий вид:

$$D = \{(z, t) : |\pi\Phi(t) z| > 0\}, \quad \psi(z, t) = \pi\Phi(t) z / |\pi\Phi(t) z|$$
$$\mu(z, t) = h(t) + |\pi\Phi(t) z|$$

так что функция $F(z, t)$ леммы 3 дается левой частью формулы (5.4)

Из формул (4.3), (5.2), (5.3) дифференцированием по r получим, что

$$\begin{aligned} \pi\Phi(r)[u(\varphi) - v(\varphi)] &= h'(r)\varphi \\ \pi\Phi(r) C [u(\varphi) - v(\varphi)] &= h''(r)\varphi \\ \pi\Phi(r) C^2[u(\varphi) - v(\varphi)] &= h'''(r)\varphi \end{aligned} \tag{7.1}$$

Здесь использованы соотношения

$$\Phi'(r) = \Phi(r) C, \qquad \Phi''(r) = \Phi(r) C^2, \qquad h'(r) = f(r) - g(r)$$

Условие (2.4) перепишется в виде

$$\frac{\partial F(z_0, T_0)}{\partial t} = 2h(T_0)[h'(T_0) - (\varphi_0 \cdot \Psi_1)] = 0, \qquad \Psi_1 = \pi\Phi(T_0) C z_0 \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial^2 F(z_0, T_0)}{\partial t^2} = 2\{h(T_0) h''(T_0) + [h'(T_0)]^2 - h(T_0)(\varphi_0 \cdot \Psi_2) - |\Psi_1|^2\} = 0$$

$$\Psi_2 = \pi\Phi(T_0) C^2 z_0$$

Первое из этих равенств дает ($|\varphi_0| = 1$)

$$|\pi\Phi(T_0) C z_0| \geqslant h'(T_0) \tag{7.3}$$

Функция $F(z, t)$ бесконечно дифференцируема на D. Непосредственно вычисляя левую часть (2.5), получим (см. определение $G(z, t)$ и формулы (7.1))

$$\begin{aligned} {}^1/_2 Y(z_0) = {} & h(T_0) h'''(T_0) + 3h'(T_0) h''(T_0) - h(T_0)(\varphi_0 \cdot \pi\Phi(T_0) C^3 z_0 - \\ & - 3(\Psi_1 \cdot \Psi_2) + \{(\pi\Phi(T_0) G(z_0, T_0) \cdot \Psi_2) + h(T_0)(\varphi_0 \cdot \pi\Phi(T_0) C^2 G(z_0, T_0)) + \\ & + 2(\Psi_1 \cdot \pi\Phi(T_0) C G(z_0, T_0))\} = \\ & = 3h'(T_0) h''(T_0) - h'(T_0)(\varphi_0 \cdot \Psi_2) - 2h''(T_0)(\varphi_0 \cdot \Psi_1) \end{aligned}$$

Применяя (7.2), получаем окончательно

$$Y(z_0) = \frac{2h'(T_0)}{h(T_0)} \{|\pi\Phi(T_0) C z_0|^2 - |h'(T_0)|^2\}$$

Поэтому, если $h'(T_0) \geqslant 0$, то в силу (7.3) необходимое условие (2.5) выполнено. Если же $h'(T_0) < 0$ и $|\pi\Phi(T_0)Cz_0| > |h'(T_0)|$, то время $T_0 = T(z_0)$ неоптимально.

Лемма 4. Пусть для задачи преследования (1.1) выполнены условия (5.2), (5.3). Пусть для точки $z_0 \in R$ выполнено соотношение (3.1), причем $h'(T_0) < 0$. Тогда для того, чтобы точка z_0 была особой, необходимо и достаточно выполнение неравенства $\varphi_1 \neq \varphi_0$.

Доказательство. Если $\varphi_1 = \varphi_0$, то условие (3.3) не выполнено и, следовательно, точка z_0 не является особой. Если же $\varphi_1 \neq \varphi_0$, то в силу (5.2), (5.3)

$$(\varphi_0 \cdot \Phi(T_0)\{u(T_0, \varphi_0) - v(T_0, \varphi_0) - u(T_1, \varphi_1) + v(T_1, \varphi_1)\}) =$$
$$= h'(T_0)(1 - (\varphi_0\varphi_1)) < 0$$

так что неравенство (3.3) выполнено.

Покажем, что справедливо и соотношение (3.2). Пусть

$$\alpha\Phi^*(T_0)\varphi_0 = \beta\Phi^*(T_1)\varphi_1 \qquad (7.4)$$

Здесь $\alpha = |\Phi^*(T_1)\varphi_1|$, $\beta = |\Phi^*(T_0)\varphi_0|$. Тогда, умножая (7.4) скалярно на $u(\varphi_0)$ и $u(\varphi_1)$, получим

$$\alpha f(T_0) = \beta f(T_1)(\varphi_0 \cdot \varphi_1), \qquad \alpha f(T_0)(\varphi_0 \cdot \varphi_1) = \beta f(T_1)$$

Отсюда $(\varphi_0 \cdot \varphi_1) = 1$ и, значит, $\varphi_1 = \varphi_0$. Противоречие.

Автор благодарит Е. Ф. Мищенко за внимание к работе и полезные замечания.

Поступила 6 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. Гусятников П. Б., Никольский М. С. Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3.
4. Гусятников П. Б. Необходимые условия оптимальности в линейной задаче преследования. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
5. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.
6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, т. 1. Общая теория. М., Изд-во иностр. лит., 1962.