Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62–50

АППРОКСИМАЦИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Н. Н. Красовский, А. И. Субботин

(Свердловск)

Рассматривается решение игровой задачи сближения [1], исследуется его устойчивость по отношению к ошибкам измерения текущей позиции игры. Описана модификация экстремальной стратегии, гарантирующая устойчивое сближение с целью. Приведены примеры, иллюстрирующие предлагаемый способ управления.

Рассмотрим управляемую систему

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v) \tag{1}$$

Здесь x — фазовый вектор; u, v — управляющие силы первого и второго игроков, стесненные ограничением

$$u \in P, \qquad v \in Q \tag{2}$$

причем P и Q — компакты. Примем, что функция f непрерывна по всем аргументам, удовлетворяет локальному условию Липшица по x и неравенству

$$\| f(t, x, u, v) \| \leqslant \varphi(1 + \| x \|)$$

где $\| x \|$ — евклидова норма вектора x; φ — постоянная.

Будем решать игровую задачу первого игрока о сближении [1] с множеством M при условии $\{t, x[t]\} \in N$. Здесь M и N — заданные и замкнутые множества в пространстве $\{t, x\}$. Задачу рассмотрим в рамках смешанных стратегий $U \div \mu(du;\ t, x)$ и $V \div \nu(dv;\ t, x)$, трактуя их и порождаемые ими движения $x[t]$ в соответствии с работой [1].

Отметим, что в работе [1] смешанные стратегии игроков U и V отождествляются с неоднозначными отображениями пространства $\{t, x\}$ на множества вероятностных мер $\{\mu(du)\}$ и $\{\nu(dv)\}$, нормированных на компактах P и Q соответственно, а здесь стратегии определяются как однозначные функции $U \div \mu(du;\ t, x)$ и $V \div \nu(dv,\ t, x)$. Однако указанное различие несущественно, и все результаты работы [1] остаются справедливыми для рассматриваемых здесь однозначных стратегий.

Из работы [1] следует, что для решения данной задачи сближения всех движений $x[t] = x[t, t_0, x_0, U^0]$ с M внутри N не позже, чем к некоторому моменту $\vartheta > t_0$, достаточно построить u-стабильное относительно M замкнутое множество $W^{(\vartheta)} \subset N$, содержащее начальную позицию $\{t_0, x_0\}$ и обрывающееся на M к моменту ϑ. Это множество

$$W^{(\vartheta)}{:}[W(t, \vartheta),\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta] \tag{3}$$

будем именовать в дальнейшем стабильным мостом в пространстве $\{t, x\}$. В частности, согласно [1], роль стабильного моста $W^{(\vartheta)}$ может играть множество W позиционного поглощения цели M к моменту ϑ. Стратегия $U_e \div \div \mu_e(du;\ t, x)$, экстремальная к стабильному мосту $W^{(\vartheta)}$, и будет той стратегией U^0, которая разрешит задачу.

Эти формальные утверждения раскрываются содержательно в стохастической аппроксимационной схеме, формирующей случайные движения $x_\Delta[t, t_0, x_0, U^0]$, которые при достаточно малом шаге $\delta = \sup_i (\tau_{i+1}-\tau_i)$ $(i = 0, 1, \ldots)$ с вероятностью p, сколь угодно близкой к единице, сближаются к моменту ϑ с ε-окрестностью M внутри ε-окрестности N, где $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым [2,3]. Здесь $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 0, 1, \ldots)$ — полуинтервалы, на которых постоянны случайные управления $u[t]$. Однако если величины $x_\Delta[\tau_i]$, определяющие управление $u[t] = u[\tau_i]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$, будут поступать в управляющие органы с ошибкой, то для устойчивой работы упомянутой схемы в некоторых нерегулярных случаях потребуется еще дополнительное ограничение шага δ аппроксимационной схемы также и снизу. При этом ограничения на ошибку в измерении $x_\Delta[\tau_i]$ могут оказаться чрезмерными.

Простейший пример такой нерегулярной ситуации доставляет задача о сближении точки $\xi[t]$, движущейся по прямой $-\infty < \xi < \infty$ и описываемой уравнением

$$\xi^{\cdot} = u - v, \quad |u| \leqslant 2, \quad |v| \leqslant 1 \tag{4}$$

с любой из двух точек $\xi^{(1)} = -1$, $\xi^{(2)} = 1$. Задача решается управлением $u(\xi) = 2$ при $\xi \geqslant 0$ и $u(\xi) = -2$ при $\xi < 0$. Однако при переходе к дискретной схеме в случае, когда величина $\xi[\tau_i]$ вводится в управление $u[t] = u(\xi[\tau_i])$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ с ошибкой $\Delta\xi$, которая может превышать величину $\alpha = {}^1/_2\,\delta = {}^1/_2 \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$, точка $\xi[t]$ может застрять в окрестности точки $\xi = 0$.

Цель данной заметки — указать одно небольшое видоизменение упомянутой аппроксимационной схемы [2,3] формирования случайных движений $x_\Delta[t]$, которое позволяет обойти указанное обстоятельство. Суть этого видоизменения состоит в том, что вместо экстремального управления $\mu_e(du;\ \tau_i, x_\Delta[\tau_i])$, нацеливающего движение $x_\Delta[t]$ в позиции $\{\tau_i, x_\Delta[\tau_i]\}$ на ближайшую точку $w^0[\tau_i]$ из $W(\tau_i, \vartheta)$, будет введено управление $\mu_w(du; \tau_i, x_\Delta[\tau_i], w_\Delta[\tau_i])$, которое нацеливает движение $x_\Delta[t]$ на некоторую, тоже достаточно близкую точку $w_\Delta[\tau_i]$ из $W(\tau_i, \vartheta)$, но уже не обязательно ближайшую к $x_\Delta[\tau_i]$ точку $w^0[\tau_i]$ из $W(\tau_i, \vartheta)$. Опишем это управление.

Будем рассматривать два движения. Ведомое движение $x_\Delta[t]$ в заданной реальной управляемой системе, описываемое уравнением (1), и ведущее движение $w_\Delta[t]$, вырабатываемое подходящей в меру прецизионной моделью и описываемое уравнением

$$w_\Delta^{\cdot}[t] = \int\limits_P \int\limits_Q f(t, w_\Delta[t], u, v)\, \mu_t(du)\, \nu_t(dv) \tag{5}$$

В уравнении (1), согласно постановке задачи, управление u назначается первым игроком, управление v — вторым игроком. В уравнении (5) оба «управления» μ и ν будут назначаться первым игроком. Итак, опишем построение управления $u[t]$ для движения $x_\Delta[t]$ и управлений $\mu_t(du)$ и $\nu_t(dv)$ для движения $w[t]$.

Пусть для данной начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ удалось найти стабильный мост $W^{(\vartheta)}$, содержащий эту позицию, лежащий в N и обрывающийся к моменту $t = \vartheta$ на M. Выбрав разбиение $\Delta : [\tau_i, i = 0, 1, \ldots, ; \tau_0 = t_0]$ полуоси $[t_0, \infty)$, будем формировать два движения $x_\Delta[t]$ и $w_\Delta[t]$ следующим образом. В начальный момент $t = t_0 = \tau_0$ полагаем $w_\Delta[t_0] = x_\Delta[t_0] = x_0$, управление $u[t] = u[\tau_0] \in P$ на полуинтервале $[\tau_0, \tau_1)$ выбираем произвольным. Выбираем произвольным образом меру $\nu(dv; \tau_0)$, нормированную на Q, и определяем смешанное программное управление $\mu_t(du; \tau_0)$ $(\tau_0 \leqslant t < \tau_1)$, так, чтобы для движения $w_\Delta[t]$, удовлетворяющего уравнению

$$\dot{w}_\Delta[t] = \iint f(t, w_\Delta[t], u, v)\, \mu_t(du; \tau_0)\, \nu(dv, \tau_0)$$
$$(w_\Delta[t_0] = x_0, \ \tau_0 \leqslant t < \tau_1) \tag{6}$$

выполнялось одно из условий

$$\{\tau_1, \ w_\Delta[\tau_1]\} \in W^{(\vartheta)} \tag{7}$$

или

$$\bigcup_t [\{t, w_\Delta[t]\}, \ \tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1] \cap M \neq \phi$$

Возможности выбора такого управления $\mu_t(du)$ вытекают из условия стабильности моста $W^{(\vartheta)}$.

Отметим, что в работе [1] условие стабильности означает существование движения $w[t]$, удовлетворяющего уравнению в контингенциях

$$\dot{w}[t] \in \overline{\mathrm{co}}\Big[\int_Q f(t, w[t], u, v)\, \nu(dv; \tau_0); u \in P\Big] \tag{8}$$

и одному из условий (7). Однако можно показать, что при соответствующем определении класса смешанных программных управлений $\mu_t(du)$ (см. [4]) всякое решение уравнения в контингенциях (8) будет решением уравнения вида (6).

Пусть теперь в момент $t = \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ реализовались точки $x_\Delta[\tau_i]$, $w_\Delta[\tau_i]$ и ведущее движение $w_\Delta[t]$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_i$ не попадало на множество M. Пусть на органы управления первого игрока поступила информация о реализовавшемся значении $x_\Delta[\tau_i]$ в виде сигнала $x_\Delta^*[\tau_i]$, связанного со значением $x_\Delta[\tau_i]$ неравенством

$$\| x_\Delta[\tau_i] - x_\Delta^*[\tau_i] \| \leqslant \zeta \tag{9}$$

Построим вектор $s = x_\Delta^*[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i]$ и рассмотрим маленькую игру, в которой платой служит величина $s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u, v)$ (штрих означает транспонирование), т. е. рассмотрим задачу об определении мер $\mu^0(du; \tau_i)$ и $\nu^0(dv; \tau_i)$, которые удовлетворяют условию (см. [1])

$$\iint_{PQ} s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u, v)\, \mu^0(du; \tau_i)\, \nu(dv) \leqslant$$
$$\leqslant \iint_{PQ} s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u, v)\, \mu^0(du; \tau_i)\, \nu^0(dv; \tau_i) \leqslant$$
$$\leqslant \iint_{PQ} s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u, v)\, \mu(du)\, \nu^0(dv; \tau_i) \tag{10}$$

Выберем управление $\mu_t(du;\ \tau_i)$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$, так, чтобы для движения $w_\Delta[t]$, удовлетворяющего уравнению

$$w_\Delta^{\boldsymbol{\cdot}}[t] = \iint\limits_{PQ} f(t, w_\Delta[t], u, v)\,\mu_t(du;\ \tau_i)\,\nu^0(dv;\ \tau_i)$$

$$(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$$

выполнилось одно из двух условий

$$\{\tau_{i+1},\ \ w_\Delta[\tau_{i+1}]\} \in W^{(\vartheta)} \tag{11}$$

или

$$\bigcup\ [\{t,\ w_\Delta[t]\};\ \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}] \cap M \neq \phi$$

Как и выше, возможности выбора такого управления $\mu_t(du;\ \tau_i)$ вытекают из условия стабильности моста $W^{(\vartheta)}$.

Управление $u[t] = u[\tau_i]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ для движения $x_\Delta[t]$ выберем в результате случайного испытания с вероятностным распределением $\mu^0(du;\ \tau_i)$.

Описанная аппроксимационная схема выбора случайных управлений первого игрока $u[t] = u[\tau_i]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ \ i = 0, 1, \ldots)$ реализуется в системе (1) в паре с произвольным детерминированным или случайным управлением второго игрока. При этом предполагается, что реализации управлений $u[t]$ и $v[t]$ стохастически независимы.

Физической предпосылкой для такого предположения может служить наличие ошибки в измерении фазового вектора $x_\Delta[t]$. Действительно, если оценка ошибки — число ζ для второго игрока больше, чем величина $\lambda\delta$, где λ — постоянная Липшица, а δ — шаг рассматриваемой аппроксимационной схемы, то второй игрок не сможет восстановить кусочно постоянное управление, выбираемое первым игроком. Отметим, что управления $u[t] = u[\tau_i]$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$ выбираются также независимо от реализующегося управления $v[t]$. Эти рассуждения можно ввести в рамки строгих понятий, задаваясь распределениями ошибки Δx.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и $p < 1$, можно указать столь малые числа $\zeta_{\varepsilon,p} > 0$ и $\delta_{\varepsilon,p} > 0$, что при выполнении неравенств $\zeta \leqslant \zeta_{\varepsilon,p}$ и $\delta \leqslant \delta_{\varepsilon,p}$ для движений $x_\Delta[t]$ встреча с ε-окрестностью M внутри ε-окрестности N к моменту ϑ будет гарантирована с вероятностью, не меньшей p.

Описанная выше аппроксимационная процедура отвечает теоретическим построениям, которые были приведены в работах [1,2]. Доказательство теоремы осуществляется по схеме, предложенной в этих работах, с той разницей, что здесь оценивается не расстояние от $x_\Delta[t]$ до множеств $W^{(\vartheta)}$ или M, а расстояние от $x_\Delta[t]$ до точки $w_\Delta[t]$, которая, двигаясь по мосту $W^{(\vartheta)}$, неизбежно попадает на M при $t \leqslant \vartheta$.

Если во всякой позиции $\{t, x\}$ и при всяком выборе вектора s маленькая игра (10) имеет седловую точку в чистых стратегиях u^0 и v^0, т. е. при всех значениях $t \leqslant \vartheta$, x и s выполняется равенство

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q} s'f(t, x, u, v) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P} s'f(t, x, u, v) \tag{12}$$

то движение $x_\Delta[t]$ будет получаться детерминированным, и утверждение теоремы о встрече $x_\Delta[t]$ с ε-окрестностью M внутри ε-окрестности N при $t \leqslant \vartheta$ сведется к тому, что эта встреча состоится наверняка. В этом случае предположение о взаимно независимом выборе управлений игроков можно опустить и для противника допускаются такие способы формирования v, которые используют информацию о реализующемся управлении первого игрока.

Если же требуется найти детерминированное решение позиционной задачи сближения в случае, когда равенство (12) нарушается, то в соответствии с результатами работ [5, 6] можно предложить следующую модификацию описанной выше аппроксимационной процедуры. Пусть для заданной начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ удалось найти минимаксно u-стабильный мост (3) (см. [6]). В начальный момент $t = t_0$ полагаем $x_\Delta[t_0] = w_\Delta[t_0] = x_0$. Предположим, что при $t \in [t_0, \tau_i]$ точка $\{t, w_\Delta[t]\}$ не попадала на множество M, тогда для построения движений $x_\Delta[t]$ и $w_\Delta[t]$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ поступаем следующим образом. Построим вектор $s = x_\Delta^*[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i]$, где, как и выше, $x_\Delta^*[\tau_i]$ — сигнал о векторе $x_\Delta[\tau_i]$, поступивший первому игроку. Рассмотрим маленькую игру в классе чистых стратегий $u \in P$ и контрстратегий $v(u) \in Q$, т. е. определим вектор $u^0[\tau_i] \in P$ и вектор-функцию $v^0(u; \tau_i)$, удовлетворяющие условию

$$s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u^0[\tau_i], v) \leqslant s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u^0[\tau_i], v^0(u^0[\tau_i]; \tau_i)) \leqslant$$
$$\leqslant s'f(\tau_i, x_\Delta^*[\tau_i], u, v^0(u, \tau_i))$$

Ведущее движение $w_\Delta[t]$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ определим как решение уравнения в контингенциях

$$w_\Delta^{\cdot}[t] \in \mathrm{co}\,[f(t, w_\Delta[t]\, u, v^0(u, \tau_i)), u \in P]$$

удовлетворяющее одному из условий (11). Существование такого движения вытекает из условия минимаксной u-стабильности моста $W^{(\vartheta)}$.

Ведомое движение $x_\Delta[t]$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ порождается постоянным управлением $u[t] = u^0[\tau_i]$ и некоторой реализацией управляющего воздействия второго игрока. Здесь также допускается формирование управления $v[t]$, использующее информацию о реализующемся управлении $u[t]$.

Теперь снова справедливо утверждение, аналогичное теореме на стр. 200, т. е. все построенные указанным способом движения $x_\Delta[t]$ при достаточно малых ζ и δ сближаются с ε-окрестностью M внутри ε-окрестности N к моменту ϑ.

Отметим, что при $i = 0$ вектор s совпадает с ошибкой измерения вектора $x_\Delta[t_0]$, т. е. $s = x_\Delta^*[t_0] - x_\Delta[t_0]$, поэтому так же, как и в предыдущем случае, управление $u^0[\tau_0] \in P$ можно выбирать произвольным образом.

В отдельных случаях формирование управления u по описанным схемам может привести к весьма легко реализуемым процедурам управления.

Рассмотрим, например, задачу об уклонении (см. [7], стр. 328—342) одного движения $z(t)$ от другого движения $y[t]$ в случае линейных однотипных объектов

$$y^{\cdot} = Ay + u, \qquad u \in P$$
$$z^{\cdot} = Az + v, \qquad v \in Q$$

причем выпуклые множества P и Q подобны и P больше Q. Встреча движений определяется как выполнение условия $(y[\tau] - z[\tau]) \in S$, где S — некоторое заданное замкнутое множество.

Данную задачу уклонения до момента ϑ можно трактовать при перемене местами букв u и v, как рассматриваемую в этой статье задачу сближения, если положить в качестве M гиперплоскость $t = \vartheta$, в качестве N — все полупространство $\{t, x\} = \{t, y - z\}$ при $t \leqslant \vartheta$ за вычетом некоторой подходящей открытой области, содержащей множество $\{t < \vartheta, (y - z) \in S\}$. Тогда оказывается, что управление $v = v[\tau_i] \in Q$ для реального движения $x_\Delta[t] = y[t] - z_\Delta[t]$ определяется условием

$$(x_\Delta^*[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i])' v[\tau_i] = \max_{v \in Q} (x_\Delta^*[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i])' v \tag{13}$$

а управление $u_w[\tau_i]$ и $v_w[\tau_i]$ для модельного движения $w_\Delta[t]$, которое удовлетворяет уравнению

$$w_\Delta^{\cdot}[t] = Aw_\Delta[t] + u_w - v_w \tag{14}$$

определяются условиями

$$(x_\Delta^*[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i])' u_w[\tau_i] = \max_{u \in P} (x_\Delta^*[\tau_i] - w_\Delta[\tau_i])' u$$
$$v_w[\tau_i] = \beta u_w[\tau_i] \tag{15}$$

где β — отношение размеров множества Q к размерам множества P.

Эти условия имеют следующий простой смысл. Условие (13) нацеливает реальную точку $x_\Delta[\tau_i]$ на модельную точку $w_\Delta[\tau_i]$, а условия (15) обеспечивают только такие реализации $\sigma[t]$ управления $\sigma = u_W - v_W$, которые содержатся во множестве $(\beta - 1)\,Q$. Но, согласно [7], при таких управлениях точка $w_\Delta[t]$ (14) не может сблизиться с целью S раньше, чем в момент ϑ, являющийся оптимальным временем преследования для данной начальной позиции.

В качестве другого примера рассмотрим задачу об уклонении от состояния $x_1 = x_2 = 0$ для системы, описываемой уравнениями [8]

$$\begin{gathered}
x_1^{\cdot} = x_3, \quad x_3^{\cdot} = u_1 \cos v_3 - u_2 \sin v_3 - v_1 \cos u_3 + v_2 \sin u_3 \\
x_2^{\cdot} = x_4, \quad x_4^{\cdot} = u_1 \sin v_3 + u_2 \cos v_3 - v_1 \sin u_3 - v_2 \cos u_3 \\
u_1^2 + u_2^2 \leqslant r_1^2, \quad v_1^2 + v_2^2 \leqslant r_2^2, \quad |u_3| \leqslant \alpha, \quad |v_3| \leqslant \beta \\
\alpha < \pi/2, \quad \beta < \pi/2, \quad r_1 \cos\beta > r_2 \cos\alpha
\end{gathered} \tag{16}$$

Опираясь на материал из статьи [8], можно убедиться, что наилучший способ уклонения для данной задачи в схеме управления, описанной в этой работе, определяется следующими условиями:

для реального движения $x_\Delta[t]$

$$v_1[\tau_i] = r_2 s_1[\tau_i] / \|s[\tau_i]\|, \quad v_2[\tau_i] = r_2 s_2[\tau_i] / \|s[\tau_i]\| \tag{17}$$

$v_3[\tau_i] = \pm\beta$ с вероятностями $p\{v_3 = -\beta\} = p\{v_3 = \beta\} = 1/2$

для модельного движения $w_\Delta[t]$

$$\begin{gathered}
u_1^{(w)}[\tau_i] = r_1 \cos\beta\, s_1[\tau_i] / \|s[\tau_i]\|, \quad u_2^{(w)}[\tau_i] = r_1 \cos\beta\, s_2[\tau_i] / \|s[\tau_i]\| \\
u_3^{(w)} = 0 \\
v_1^{(w)}[\tau_i] = u_1^{(w)}[\tau_i]\, r_2 \cos\alpha / r_1 \cos\beta \\
v_2^{(w)}[\tau_i] = u_2^{(w)}[\tau_i]\, r_2 \cos\alpha / r_1 \cos\beta, \quad v_3^{(w)} = 0
\end{gathered} \tag{18}$$

причем вектор $s = \{s_1, s_2\} = \{x_{\Delta,3}^* - w_{\Delta,3}, x_{\Delta,4}^* - w_{\Delta,4}\}$.

Такова реализация аппроксимационной схемы для данной задачи в случае, когда ее решение требуется найти в классе стохастических способов управления. Если же требуется найти детерминированное решение, то соотношения (17), (18) следует заменить так:

$$v_1[\tau_i] = r_2 s_1[\tau_i] / \| s[\tau_i] \|, \quad v_2[\tau_i] = r_2 s_2[\tau_i] / \| s[\tau_i] \|$$

$$v_3[\tau_i] = 0$$

$$u_1^{(w)}[\tau_i] = r_1 s_1[\tau_i] / \| s[\tau_i] \|, \quad u_2^{(w)}[\tau_i] = r_1 s_2[\tau_i] / \| s[\tau_i] \|$$

$$u_3^{(w)}[\tau_i] = 0$$

$$v_1^{(w)}[\tau_i] = u_1^{(w)}[\tau_i]\, r_2 \cos\alpha / r_1$$

$$v_2^{(w)}[\tau_i] = u_2^{(w)}[\tau_i]\, r_2 \cos\alpha / r_1, \quad v_3^{(w)} = 0$$

причем предполагается, что $r_1 > r_2 \cos\alpha$.

Другие примеры эффективного использования описанных процедур аппроксимации доставляют случаи, когда стабильные мосты $W^{(\vartheta)}$ можно достаточно просто строить на основе статьи [9]. Иллюстрацией этого положения может служить решение задачи об успокоении математического маятника, на который действует сила

$$F = u_1 + (u_2 - v)^2 - 1, \quad | u_1 | \leqslant 1$$

$$| u_2 | \leqslant 1, \quad | v | \leqslant 1$$

Реализация аппроксимационной схемы в данной задаче, описываемой уравнением

$$x_1^{\cdot} = x_2, \; x_2^{\cdot} = -x_1 + u_1 + (u_2 - v)^2 - 1$$

сводится к следующим соотношениям: для реального движения

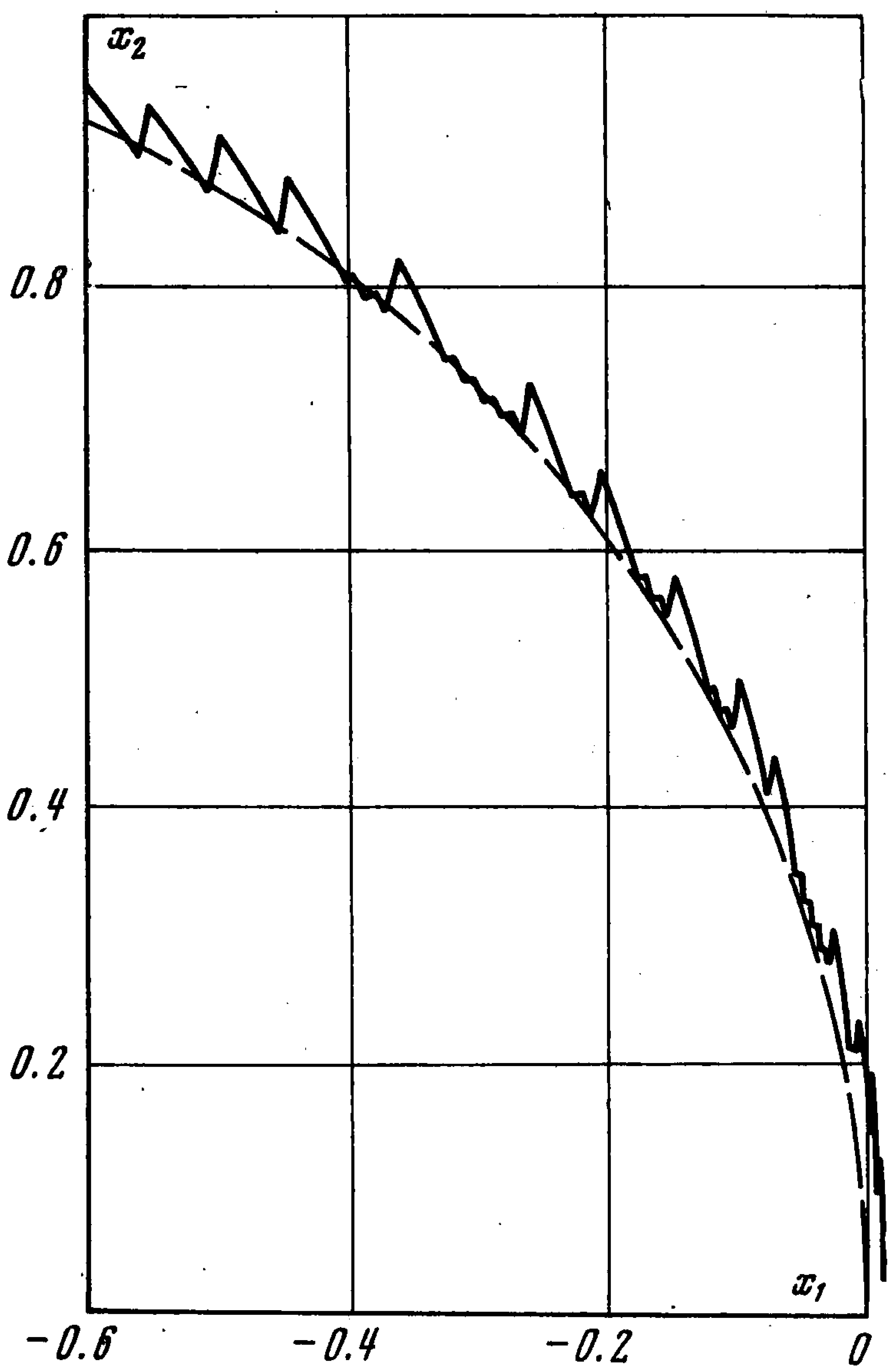
$$u_1[\tau_i] = -1, \quad u_2[\tau_i] = 0$$
$$\text{если } s_2[\tau_i] \geqslant 0$$
$$u_1[\tau_i] = 1$$
$$p\{u_2 = 1\} = p\{u_2 = -1\} = 1/2$$
$$\text{если } s_2[\tau_i] < 0$$

где $s_2[\tau_i] = x^*_{\Delta,2}[\tau_i] - w_{\Delta,2}[\tau_i]$;

для модельного движения $w_\Delta[t]$, описываемого уравнением

$$w_1^{\cdot} = w_2, \quad w_2^{\cdot} = -w_1 + \sigma, \; | \sigma | \leqslant 1$$

управление $\sigma[t]$ формируется в соответствии с известным решением задачи об оптимальном успокоении математического маятника (см., например, [10], стр. 34—42). При этом точка $w_\Delta[t]$ движется фактически по u-стабильной дорожке $w(t)$, доставляемой этим решением.



На фигуре изображен один из участков аппроксимационного движения $x_\Delta[t]$, шаг $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i$ был равен 0.01, управление $v[t]$ выбиралось следующим образом: $v = 0$ при $s_2 \geqslant 0$, $v = \pm 1$ при $s_2 < 0$, причем значения $+1$ и -1 выбираются с равными вероятностями; штриховая линия изображает движение $w_\Delta[t]$.

Авторы должны отметить, что в нерегулярных случаях, подобных случаю, описанному выше для задачи (4), когда точка $w^0 \in W(t, \vartheta)$, ближайшая к $x_\Delta[t]$, неединственна, в их статье [11] надлежит заменить описанную там процедуру построения случайных движений $x_\Delta[t, t_0, x_0, U^0]$ той процедурой, которая предложена в данной заметке.

В заключение надлежит сказать, что описанная схема управления с поводырем $w[t]$ смыкает теорию строго позиционных дифференциальных игр с теорией, предложенной Л. С. Понтрягиным (см. [12—14]). При этом оба подхода сливаются в некоторой объединяющей устойчивой схеме управления, базирующейся только на информации о реализующихся состояниях $x[t]$ управляемого объекта.

Поступила 2 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.
3. Байбазаров М. Аппроксимация смешанных стратегий в дифференциальных играх. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 2.
4. Красовский Н. Н. Экстремальные управления в нелинейной дифференциальной игре. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
5. Красовский Н. Н. Программное поглощение в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Минимаксная дифференциальная игра. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2.
7. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
8. Субботина Н. Н. Об одной игровой задаче конфликтного управления. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
9. Тарлинский С. И. Об одной позиционной задаче наведения. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 1.
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
11. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О седловой точке позиционной дифференциальной игры. Тр. матем. ин-та. АН СССР, 1972, т. 128
12. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр. Успехи матем. наук, 1967, т. 21, вып. 4 (130).
13. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С. Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
14. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. I.II. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6, т. 175, № 4.