Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.517.4

АСИММЕТРИЧНАЯ МЕХАНИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ. ЭНЕРГИЯ И ЭНТРОПИЯ

В. Н. Николаевский

(Москва)

В статье [1] были построены осредненные уравнения движения турбулизованной жидкости при наличии преимущественной ориентации турбулентных вихрей. Учетом дополнительной кинематической переменной — угловой скорости собственного вращения вихрей — система уравнений [1] отличается от более ранней теории Маттиоли [2].

В предлагаемой работе уравнения [1] дополняются уравнением баланса турбулентной энергии, в котором учитывается работа моментных напряжений и антисимметричной составляющей тензора напряжений Рейнольдса. Показано, что внутренняя энергия, определяемая турбулизацией жидкости, зависит от среднеквадратичных величин поступательных скоростей пульсаций и угловых скоростей вихрей. Вводится энтропия и «температура» турбулизации; составляются уравнения производства энтропии. Обсуждается использование онзагеровского формализма термодинамики необратимых процессов. Рассматривается стационарное состояние системы, характеризуемое притоком отрицательной энтропии (последнее типично для биологических систем [3, 4]) и постоянной скоростью производства энтропии.

1. Баланс массы, импульса и кинетического момента. Уравнения баланса масс, импульса и момента количества движения неполярной жидкости могут быть представлены в виде [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\rangle+\frac{\partial}{\partial X_j}\langle\rho u_j\rangle_j=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho u_i\rangle+\frac{\partial}{\partial X_j}\langle\rho u_i u_j\rangle_j=\frac{\partial\langle t_{ij}\rangle_j}{\partial X_j}+\langle F_i\rangle \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l\xi_k\rangle+\frac{\partial}{\partial X_j}\langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l\xi_k u_j\rangle_j+\langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l u_k\rangle_k=$$
$$=\frac{\partial}{\partial X_j}\langle\varepsilon_{ilk}\xi_l t_{kj}\rangle_j+\langle\varepsilon_{ilk}t_{lk}\rangle_k+\langle\varepsilon_{ilk}\xi_l F_k\rangle$$

Здесь ρ — плотность жидкости, U_j — скорость, F_j — объемная сила, ε_{ilk} — альтернирующий тензор Леви-Чевита, $\langle\ \ \rangle$ — символ осреднения по элементарному объему пространства $V=\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3$, X_j — координаты центра тяжести объема V, $\xi_j=x_j-X_j$ — координата точки внутри объёма V относительно центра тяжести X_j; $\langle\ \ \rangle_j$ — символ осреднения по грани объема V, нормалью к которой служит ось X_j. Рассмотрим случай, когда в объеме $dV=d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ течение жидкости удовлетворяет уравнениям Навье — Стокса, т. е.

$$t_{ij}\equiv t_{ji}=\left(-p+\frac{2}{3}\rho\nu\frac{\partial u_k}{\partial\xi_k}\right)\delta_{ij}+\rho\nu\left(\frac{\partial u_j}{\partial\xi_i}+\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}\right),\quad dV\ll V$$

где p — давление, ν — кинематическая вязкость, δ_{ij} — единичный тензор.

Поле скоростей в объеме $V \sim \Delta^3$ представляется в виде [1]

$$u_i(x_k, t) = U_i(X_k, t) + \frac{\partial U_i}{\partial X_k}(x_k - X_k) + v_i(x_k, t) \tag{1.2}$$

где U_i — средняя массовая скорость жидкости, v_i — нерегулярная составляющая (пульсация) скорости. В масштабе d ($\Delta \gg d$) величина v_i также представима в виде двух первых членов ряда Тейлора

$$v_i(\xi_k) = w_i(\zeta_k) + (\partial w_i / d\zeta_k)(\xi_k - \zeta_k)$$

т. е. вместо представления (1.2) в объемах $\Delta V \sim d^3$ справедливо следующее:

$$u_i(x_k, t) = U_i(X_k, t) + \frac{\partial U_i}{\partial X_k}\xi_k + w_i(\zeta_k, t) + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k}(\xi_k - \zeta_k) \tag{1.3}$$

Здесь ζ_k — координата центра тяжести ΔV. Осреднение поля (1.3) по объему ΔV дает

$$\bar{u}_i(\zeta_k, t) = U_i(X_k, t) + \frac{\partial U_i}{\partial X_k}\zeta_k + w_i(\zeta_k, t)$$

Элементарный кинетический момент m_i соответственно можно представить как

$$m_i = \varepsilon_{ijk}\rho u_j \xi_k = \varepsilon_{ijk}\rho\left(U_j + \frac{\partial U_j}{\partial X_m}\xi_m + w_j + \frac{\partial w_j}{\partial \zeta_m}(\xi_m - \zeta_m)\right)\xi_k$$

Осредним m_i по объему ΔV. Получим

$$\bar{m}_i = \varepsilon_{ijk}\left(\bar{\rho}U_j\zeta_k + \frac{\partial U_j}{\partial X_m}\bar{\rho}\zeta_m\zeta_k + \bar{\rho}w_j\zeta_k\right) + \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial U_j}{\partial X_m} + \frac{\partial w_j}{\partial \zeta_m}\right)i_{mk}$$

$$i_{mk} = \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\rho(\xi_m - \zeta_m)(\xi_k - \zeta_k)\,d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3$$

где i_{mk} — удельный момент инерции [1] жидкости в объеме ΔV.

Осредняя далее $\bar{m}_i$ по всем объемам ΔV, содержащимся в V, получим

$$\langle m_i\rangle = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial U_j}{\partial X_m}I_{mk} + M_i, \qquad M_i = \varepsilon_{ijk}\left\langle\left(\frac{\partial U_j}{\partial X_m} + \frac{\partial w_j}{\partial \zeta_m}\right)i_{mk}\right\rangle \tag{1.4}$$

$$I_{mk} = \frac{1}{V}\int\limits_V \bar{\rho}\zeta_k\zeta_m\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3, \quad \varepsilon_{ijk}\frac{1}{V}\int\limits_V \bar{\rho}w_j\zeta_k\,d\zeta_1\,d\zeta_2\,d\zeta_3 = 0$$

Здесь I_{mk} — удельный момент инерции [5] жидкости в объеме V, а условие, накладываемое на поле w_j, соответствует упрощающему предположению, что лишь турбулентные вихри масштаба d являются носителями кинетического момента. Как и в работе [1], будем в случае высокой турбулизации пренебрегать первым слагаемым (1.4), т. е. положим $\langle m_i\rangle \approx M_i$.

Если объемы ΔV симметричны, то $i_{mk} = \frac{1}{2} i\delta_{mk}$ и также

$$M_i = \langle i\Phi_i \rangle, \qquad \Phi_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \left\langle \frac{\partial U_j}{\partial X_k} + \frac{\partial w_j}{\partial \zeta_k} \right\rangle$$

причем можно ввести [1] среднее поле собственных угловых скоростей ω_i таких, что

$$M_i = J(\Omega_i + \omega_i), \qquad J\omega_i = \langle i^*\Phi_i^* \rangle$$

$$J = \langle i \rangle, \quad \Omega_i = \langle \Phi_i \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial U_j}{\partial X_k}, \quad J\omega_i^* = i^*\Phi_i^* - \langle i^*\Phi_i^* \rangle$$

где звездой отмечены пульсации. Что касается пульсация M_i^* кинетического момента, то, согласно изложенному, она определяется следующим образом:

$$M_i + M_i^* = \varepsilon_{ijk} \rho u_j \xi_k \tag{1.5}$$

Поток импульса, порождаемый турбулентностью, представляется, как известно, в виде

$$\langle \rho u_i u_j \rangle_j \approx \langle \rho \rangle U_i U_j - R_{ij} \tag{1.6}$$

где R_{ij} — рейнольдсовы напряжения. Согласно [1], имеем

$$R_{ij} = -\langle \rho v_i v_j \rangle_j$$

т. е. тензор R_{ij}, вообще говоря, содержит антисимметричные составляющие. В выражении (1.6) пренебрегается, как и обычно в гидромеханике, потоком импульса, связанным со средним градиентом скорости в масштабе Δ.

Воспользовавшись представлением (1.3), можно также показать, что R_{ij} состоит из двух слагаемых

$$R_{ij} = -\langle \rho w_i w_j \rangle_j - \left\langle \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k} \right) \left(\frac{\partial U_j}{\partial X_m} + \frac{\partial w_j}{\partial \zeta_m} \right) i_{km} \right\rangle_j$$

Первое соответствует средне-поступательным пульсациям жидкости в объеме ΔV, а второе обусловлено ее вращениями вокруг центров масс ΔV.

Поток кинетического момента представим [1], согласно соотношению (1.5), в виде (μ_{ij} — моментные напряжения)

$$\varepsilon_{ilk} \langle \rho u_l \xi_k u_j \rangle_j \approx M_i U_j - \mu_{ij}, \qquad \mu_{ij} = -\langle M_i^* v_j \rangle_j \tag{1.7}$$

2. Изменения момента инерции. Уравнение неразрывности, справедливое [1] в микромасштабе $dx_1 dx_2 dx_3$ турбулизованной жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

умножим на $\xi_k \xi_m$. Проводя далее операцию осреднения по объему V, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \xi_k \xi_m \rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \rho \xi_k \xi_m u_j \rangle_j = \langle \rho u_j \xi_m \delta_{kj} \rangle + \langle \rho u_j \xi_k \delta_{mj} \rangle \tag{2.1}$$

Нетрудно провести следующие преобразования:

$$\langle\rho\xi_k\xi_m\rangle = I_{km} + \langle i_{km}\rangle$$

а также определить пульсацию $i_{km}{}^*$ момента инерции

$$\rho\xi_k\xi_m = \langle\rho\xi_k\xi_m\rangle + i_{km}{}^*$$

Тогда поток момента инерции определится следующим образом:

$$\langle\rho\xi_k\xi_m u_j\rangle_j = \langle\rho\xi_k\xi_m\rangle U_j + \langle i_{km}{}^* v_j\rangle_j$$

а уравнение (2.1) преобразуется к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\xi_k\xi_m\rangle + \frac{\partial}{\partial X_j}\langle\rho\xi_k\xi_m\rangle U_j = \frac{\partial U_k}{\partial X_n}\langle\rho\xi_n\xi_m\rangle + \frac{\partial U_m}{\partial X_n}\langle\rho\xi_n\xi_k\rangle +$$
$$+ \left\langle\frac{\partial w_k}{\partial\zeta_n} i_{mn} + \frac{\partial w_m}{\partial\zeta_n} i_{nk}\right\rangle - \frac{\partial}{\partial X_j}\langle i_{km}{}^* v_j\rangle_j \qquad (2.2)$$

Уравнение изменения момента инерции (2.2) обобщает на случай турбулентного потока уравнения, выведенные ранее в работе [6] для жидкости с внутренней структурой и в работе [5] для обычной жидкости. Собственный момент инерции жидкокристаллических сред рассматривался в статье [7].

Если считать, что момент инерции I_{km} жидкости в единице объема V удовлетворяет уравнению работы [5]

$$\frac{\partial I_{km}}{\partial t} + U_j\frac{\partial I_{km}}{\partial X_j} = \frac{\partial U_k}{\partial X_n} I_{nm} + \frac{\partial U_m}{\partial X_n} I_{nk} \qquad (2.3)$$

то, составляя разность уравнений (2.2) и (2.3), находим

$$\frac{\partial}{\partial t}(J\delta_{km}) + \frac{\partial}{\partial X_j}(J\delta_{km}U_j) = 2\langle ie_{km}\rangle - \frac{\partial}{\partial X_j}\langle i^* v_j\rangle_j \qquad (2.4)$$

где e_{ik} — тензор скорости деформации (см. далее формулы (3.6)), и кроме того

$$i_{km} = {}^1/_2 i\delta_{km}, \qquad \langle i_{km}\rangle = {}^1/_2 J\delta_{km}$$

Если пренебречь изменениями момента инерции J из-за локальных деформаций, то уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{\partial J}{\partial t} + U_j\frac{\partial J}{\partial X_j} = -\frac{\partial}{\partial X_j}\langle i^* v_j\rangle_j \qquad (2.5)$$

В работе [1] и здесь далее рассмотрен вариант теории, в которой:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + U_j\frac{\partial J}{\partial X_j} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial X_j}\langle i^* v_j\rangle_j = 0$$

3. Баланс полной энергии. Запишем в интегральной форме для произвольного фиксированного в пространстве объема V_1, ограниченного поверхностью S_1, баланс полной энергии жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_1}\rho\left(e + \frac{u_i u_i}{2}\right)dV + \int\limits_{S_1}\rho\left(e + \frac{u_i u_i}{2}\right)u_n\,dS_n = \int\limits_{S_1} t_{in}u_i\,dS_n + \int\limits_{S_1} q_n\,dS_n +$$
$$+ \int\limits_{V_1} Q\,dV + \int\limits_{S_1} c_{in}\Phi_i\,dS_n + \int\limits_{V_1} F_k u_k\,dV + \int\limits_{V_1}\rho G_k\Phi_k\,dV \qquad (3.1)$$

где e — внутренняя энергия жидкости, q — поток тепла, Q — внутренние источники тепла, Φ_i — вектор полной угловой скорости жидкой частицы. В дальнейшем, как и в уравнениях (1.1), будем полагать, что моментные напряжения C_{in} и объемные моменты G_k, определяемые молекулярной структурой жидкости, тождественно равны нулю.

Если в качестве объема V_1 выбрать объем $V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3 \sim \Delta^3$, где Δ — линейный масштаб V, то уравнение (3.1) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \langle \rho e \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \rho e u_j \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{1}{2} u_i u_i \right\rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right\rangle_j =$$
$$= \frac{\partial}{\partial X_j} \langle t_{ij} u_i \rangle_j + \frac{\partial \langle q_j \rangle_j}{\partial X_j} + \langle Q \rangle + \langle F_k u_k \rangle \tag{3.2}$$

Кинетическую энергию турбулизованной жидкости будем осреднять, пользуясь представлением (1.3)

$$\frac{1}{2} \rho u_i u_i = \frac{1}{2} \rho U_i U_i + \rho U_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} \xi_k + v_i \right) + \frac{1}{2} \rho w_i w_i +$$
$$+ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_m} \xi_k \xi_m + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k} \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_n} (\xi_k - \zeta_k)(\xi_n - \zeta_n) +$$
$$+ \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_m} \xi_k (\xi_m - \zeta_m) + \rho w_i \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \xi_k + \rho w_i \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k} (\xi_k - \zeta_k) \tag{3.3}$$

Осредним выражение (3.3) по объему ΔV

$$\frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i} = \frac{1}{2} \bar{\rho} U_i U_i + \bar{\rho} U_i \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} \zeta_k + w_i \right) + \frac{1}{2} \bar{\rho} w_i w_i +$$
$$+ \frac{1}{2} \rho \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \zeta_k \zeta_k + \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_m} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_m} \right) i_{km} \tag{3.4}$$

Последующее осреднение по всем объемам ΔV, содержащимся в V, дает

$$\left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right\rangle = \frac{1}{2} \langle \rho \rangle U_i U_i + \frac{1}{2} I_{km} \frac{\partial U_i}{\partial X_k} \frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \frac{1}{2} \langle \rho w_i w_i \rangle +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\langle i_{km} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_m} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k} \right) \right\rangle \tag{3.5}$$

Можно показать, что последнее слагаемое (3.5) представлено в виде

$$\frac{1}{2} \left\langle i_{km} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_m} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_m} \right) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} \langle i e_{ik} e_{ik} \rangle + \frac{1}{2} \langle i \Phi_j \Phi_j \rangle$$
$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_k} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \zeta_k} + \frac{\partial w_k}{\partial \zeta_i} \right) \tag{3.6}$$

Таким образом, выявляется вклад в кинетическую энергию, вносимый полем скоростей деформаций e_{ik} в масштабе d. Пренебрегая этим эффектом, равно как и энергией, порождаемой средним градиентом в масштабе Δ,

получим

$$\langle {}^1/_2 \rho u_i u_i \rangle = {}^1/_2 \langle \rho \rangle U_i U_i + {}^1/_2 \langle \rho w_i w_i \rangle + {}^1/_2 \langle i \Phi_i \Phi_i \rangle \tag{3.7}$$

Преобразуем далее последнее слагаемое (3.6)

$$\begin{aligned} {}^1/_2 \langle i \Phi_j \Phi_j \rangle &= {}^1/_2 \langle (J + i^*)(\Omega_j + \Phi_j^*)(\Omega_j + \Phi_j^*) \rangle = \\ &= {}^1/_2 J (\Omega_j + \omega_j)(\Omega_j + \omega_j) + {}^1/_2 \langle i \Phi_j^* \Phi_j^* \rangle - {}^1/_2 J \omega_j \omega_j \end{aligned}$$

Вводя этот результат в выражение (3.7), найдем

$$\langle {}^1/_2 \rho u_i u_i \rangle = {}^1/_2 \langle \rho \rangle U_i U_i + {}^1/_2 J (\Omega_j + \omega_j)(\Omega_j + \omega_j) + \langle \rho \rangle E \tag{3.8}$$

где E — внутренняя энергия турбулентного поля

$$E = E_w + E_\omega \tag{3.9}$$

$$\langle \rho \rangle E_w = \langle {}^1/_2 \rho w_i w_i \rangle, \qquad \langle \rho \rangle E_\omega = {}^1/_2 \langle i \Phi_j^* \Phi_j^* \rangle - {}^1/_2 J \omega_j \omega_j$$

Пульсацию кинетической энергии определим следующим образом:

$$({}^1/_2 \rho u_i u_i)^* = U_i (\rho v_i) + (\Omega_i + \omega_i) M_i^* + (\rho E)^* \tag{3.10}$$

где $E^* = E_w^* + E_\omega^*$ подбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\langle {}^1/_2 \rho u_i u_i \rangle + {}^1/_2 (\rho u_i u_i)^* = {}^1/_2 \rho u_i u_i \tag{3.11}$$

Поток кинетической энергии будем преобразовывать аналогично потокам импульса и кинетического момента

$$\left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right\rangle_j = \left\langle \left[\left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right\rangle + \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i \right)^* \right] \left(U_i + \frac{\partial U_j}{\partial X_k} \xi_k + v_j \right) \right\rangle_j$$

Отсюда

$$\langle {}^1/_2 \rho u_i u_i u_j \rangle_j \approx \langle {}^1/_2 \rho u_i u_i \rangle U_j + \langle {}^1/_2 \rho u_i u_i)^* v_j \rangle_j$$

Воспользуемся теперь представлением (3.10)

$$\left\langle \left(\frac{1}{2} \rho u_i u_i \right)^* v_j \right\rangle_j = U_i \langle \rho v_i v_j \rangle_j + (\Omega_i + \omega_i) \langle M_i^* v_j \rangle_j + \langle (\rho E)^* v_j \rangle_j$$

Тогда окончательно получим

$$\left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i u_j \right\rangle_j = \left\langle \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right\rangle U_j + (\rho E)^* v_j \rangle_j - U_i R_{ij} - (\Omega_i + \omega_i) \mu_{ij} \tag{3.12}$$

Заметим, что можно провести также преобразования

$$\begin{gathered} \langle \rho e u_j \rangle = \langle \rho \rangle \langle e \rangle U_j + \langle (\rho e)^* v_j \rangle_j, \qquad \varepsilon_{ilk} \langle \rho u_l u_k \rangle_k = \varepsilon_{ilk} R_{lk} \\ \langle t_{ij} u_i \rangle_j = \tau_{ij} U_i + \langle t_{ij}^* v_i \rangle_j, \qquad \tau_{ij} = \langle t_{ij} \rangle_j, \qquad \langle \varepsilon_{ilk} \xi_l F_k \rangle = C_i \\ \langle F_k u_k \rangle \approx \langle F_k \rangle U_k + \langle F_k^* v_k \rangle, \qquad \langle F_k^* v_k \rangle = C_i (\Omega_i + \omega_i) + \Pi \end{gathered} \tag{3.13}$$

4. Уравнения движения и энергии. Подставим теперь результирующие осредненные выражения в уравнения баланса масс, импульса, кинетического момента и энергии. Тогда получим [1] дифференциальные уравнения

движения в следующей форме:

$$\frac{\partial \langle\rho\rangle}{\partial t}+\frac{\partial \langle\rho\rangle U_j}{\partial X_j}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \langle\rho\rangle U_i}{\partial t}+\frac{\partial \langle\rho\rangle U_iU_j}{\partial X_j}=\frac{\partial R_{ij}}{\partial X_j}+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j}+\langle F_i\rangle \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}J(\Omega_i+\omega_i)+\frac{\partial}{\partial X_j}J(\Omega_i+\omega_i)U_j=\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j}+\varepsilon_{ilk}(R_{lk}+\tau_{lk})+C_i \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial J}{\partial t}+\frac{\partial JU_j}{\partial X_j}=-\frac{\partial}{\partial X_j}\langle i^*v_j\rangle_j=0 \tag{4.4}$$

Уравнение баланса полной энергии (3.1) в соответствии с выражениями (3.8), (3.12), (3.13) принимает вид

$$\langle\rho\rangle\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_j\frac{\partial}{\partial X_j}\right)\left(e+\frac{1}{2}U_iU_i+\frac{1}{2}\frac{J}{\langle\rho\rangle}(\Omega_i+\omega_i)(\Omega_i+\omega_i)+E\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial X_j}(U_iR_{ij}+(\Omega_i+\omega_i)\mu_{ij}+\tau_{ij}U_i)+Q+\Pi+\langle F_k\rangle U_k+C_k(\Omega_k+\omega_k)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial X_j}(-\langle(\rho e)^*v_j\rangle_j-\langle(\rho E)^*v_j\rangle_j+\langle t_{ij}^*v_i\rangle_j+\langle q_j\rangle_j) \tag{4.5}$$

Умножив теперь уравнение (4.1) на U_i, а уравнение (4.2) на полную угловую скорость $\Omega_i+\omega_i$, найдем уравнения для кинетических энергий среднего поступательного движения и среднего вращательного движения

$$\langle\rho\rangle\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_j\frac{\partial}{\partial X_j}\right)\left(\frac{1}{2}U_iU_i\right)=U_i\frac{\partial R_{ij}}{\partial X_j}+U_i\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j}+U_i\langle F_i\rangle \tag{4.6}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_j\frac{\partial}{\partial X_j}\right)\left(\frac{1}{2}(\Omega_i+\omega_i)(\Omega_i+\omega_i)\right)=(\Omega_i+\omega_i)\frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j}+$$
$$+\varepsilon_{ilk}(R_{lk}+\tau_{lk})(\Omega_i+\omega_i)+C_i(\Omega_i+\omega_i) \tag{4.7}$$

Вычитая уравнения (4.6), (4.7) из уравнения полной энергии (4.5) с учетом (4.1) и (4.4), получим уравнение притока тепла (уравнение для полной внутренней энергии турбулизованной жидкости)

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_i\frac{\partial}{\partial X_j}\right)(e+E)=(R_{ij}^s+\tau_{ij}^s)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j}+\frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)+\mu_{ij}\frac{\partial(\Omega_i+\omega_i)}{\partial X_j}=$$
$$-(R_{ij}^a+\tau_{ij}^a)\varepsilon_{ijk}\omega_k+\frac{\partial}{\partial X_j}(-\langle(\rho e)^*v_j\rangle_j-\langle(\rho E)^*v_j\rangle_j+\langle t_{ij}v_j\rangle_j+\langle q_j\rangle_j) \tag{4.8}$$

Здесь R_{ij}^s, R_{ij}^a, τ_{ij}^s, τ_{ij}^a — соответственно симметричные и антисимметричные составляющие тензоров напряжений R_{ij}, τ_{ij}, например

$$R_{ij}^s={}^1/_2(R_{ij}+R_{ji}),\qquad R_{ij}^a={}^1/_2(R_{ij}-R_{ji})$$

Вывод уравнения (4.8) отличается от обычного вывода [8] уравнения турбулентной энергии учетом наличия вращательной степени свободы системы, характерной для асимметричной гидромеханики [9].

5. Энтропия турбулизованной жидкости. Уравнение баланса энтропии s в микрообъеме dV имеет вид

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial (\rho s u_i)}{\partial x_i} = \sigma + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{q_i}{T}\right) \tag{5.1}$$

где q_i / T — поток энтропии, T — температура, а σ — скорость локального производства энтропии

$$\sigma = \frac{1}{T}(t_{ij} + p\delta_{ij})\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{q_i}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{Q}{T}$$

Баланс энтропии турбулентной системы составляется [10] путем статистического осреднения уравнения (5.1). В данной работе, как и в статье [11], процедура осреднения (5.1) выполняется по объему V, но при этом учитывается необходимость осреднения и по площадкам [1]

$$\langle\rho\rangle\left(\frac{\partial\langle s\rangle}{\partial t} + U_i\frac{\partial\langle s\rangle}{\partial X_i}\right) = \langle\sigma\rangle + \frac{\partial}{\partial X_i}\left(\frac{\langle q_i\rangle_i}{\langle T\rangle} - \langle(\rho s)^* v_i\rangle_i\right) \tag{5.2}$$

$$\langle\sigma\rangle = \frac{1}{\langle T\rangle}(\tau_{ij} + \langle p\rangle\delta_{ij})\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j}\right) + \frac{1}{\langle T\rangle}\varphi + \frac{1}{\langle T\rangle}\langle Q\rangle + \frac{\langle q_i\rangle_i}{\langle T\rangle^2}\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial X_j}$$

$$\varphi = \left\langle(t_{ij} - \tau_{ij})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_i}{\partial X_j}\right)\right\rangle = \left\langle t_{ij}^* \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right\rangle$$

Здесь для простоты опущены эффекты пульсации температуры (ср. [11]) и давления.

Таким образом, производство осредненной энтропии s, соответствующей переходу механической энергии в тепло, определяется работой средних вязких напряжений τ_{ij} над полем средних скоростей U_j, а также внутренним источником φ, который соответствует дополнительной работе вязких напряжений, обусловленной турбулизацией жидкости. Кроме того, в уравнении (5.2) фигурируют как потоки тепла, определяемые влиянием турбулизации на контактную теплопроводность $\langle q_i\rangle_i$, так и учитывается перенос тепла $\langle(\rho s)^* v_j\rangle_j$,— который носит конвективный характер в масштабе dV, но турбулентно-диффузионный в масштабе V.

Подчеркнем, что в сумме первые два слагаемых в выражении для $\langle\sigma\rangle$ соответствуют полной вязкой диссипации механической энергии в тепло (в случае отсутствия поперечного сдвига вязкая диссипация сводится к стоку энергии φ).

Если аналогичным образом осреднить по объему V уравнение баланса внутренней энергии (приток тепла), справедливое в объеме dV

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e u_i)}{\partial x_i} = t_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + Q \tag{5.3}$$

то получим

$$\langle\rho\rangle\left(\frac{\partial\langle e\rangle}{\partial t} + U_i\frac{\partial\langle e\rangle}{\partial X_i}\right) = \tau_{ij}\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \varphi + \frac{\partial\langle q_i\rangle}{\partial X_i} + \langle Q\rangle + \frac{\partial}{\partial X_i}\langle-(\rho e)^* v_i\rangle_i \tag{5.4}$$

Из сравнения (5.2) и (5.4) следует соотношение Гиббса для средних энтропии $\langle s\rangle$ и энергии $\langle e\rangle$

$$\langle\rho\rangle \frac{d\langle e\rangle}{dt} = \langle T\rangle \frac{d\langle s\rangle}{dt} - p\frac{d}{dt}\frac{1}{\langle\rho\rangle}, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_j\frac{\partial}{\partial X_j} \tag{5.5}$$

если использовать (ср. [10]) равенство)

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\langle(\rho e)^* v_i\rangle_i + \langle T\rangle \frac{\partial}{\partial X_i}\langle(\rho s)^* v_i\rangle_i = 0$$

Вычтем уравнение (5.4) из уравнения полной внутренней энергии турбулентного поля. Тогда получим уравнение, определяющее внутреннюю энергию собственно турбулентной надструктуры

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + U_j\frac{\partial E}{\partial X_j}\right) = R_{ij}{}^s\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) -$$
$$- R_{ij}{}^a\varepsilon_{ijk}\omega_k + \mu_{ij}\frac{\partial(\Omega_i + \omega_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X_j}\langle -\rho E^* v_j\rangle_j + \Psi \tag{5.6}$$

где сток турбулентной энергии

$$\Psi = \frac{\partial\langle t_{ij}{}^* v_i\rangle_j}{\partial X_j} - \varphi \tag{5.7}$$

Отметим, что в работе [12] в уравнении для турбулентной энергии вязкая диссипация из-за пульсаций интерпретируется как внутренний сток.

Работа турбулентных напряжений R_{ij}, μ_{ij} над полем средних поступательных и угловых скоростей приводит к диссипации механической энергии среднего поля в энергию хаотического турбулентного движения, имеющего «тепловой» характер в масштабе V (но механический — в масштабе dV). Соответственно, можно ввести турбулентную энтропию S и температуру турбулизации Θ следующим образом:

$$\Theta\frac{dS}{dt} = \left(R_{ij}{}^s - \frac{1}{3}R_{kl}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) - R_{ij}{}^a\varepsilon_{ijk}\omega_k +$$
$$+ \mu_{ij}\frac{\partial(\Omega_i + \omega_i)}{\partial X_j} + \frac{\partial}{\partial X}\langle -\rho E^* v_j\rangle_j + \Psi$$

или

$$\frac{dS}{dt} = \Sigma + \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\langle -\rho E^* v_j\rangle_j}{\Theta}\right) + \frac{\Psi}{\Theta} \tag{5.8}$$

Здесь Σ — локальное порождение турбулентной энтропии, а величина Ψ / Θ — сток турбулентной энтропии S. Таким образом, работа рейнольдсовых и других турбулентных напряжений приводит к росту энтропии (хаоса) турбулентности, а вязкая диссипация уменьшает энтропию (хаос) турбулизации.

Рассмотрим частный случай локально-стационарного состояния. Пренебрегаем при этом турбулентно-диффузионным переносом энергии и пульсационной работой вязких напряжений на гранях объема V. Тогда сток

$\Psi = -\varphi$, а уравнение (5.8) возрастания энтропии турбулизации сводится к следующему:

$$dS/dt = \Sigma - \varphi/\Theta = 0 \tag{5.9}$$

Таким образом, в стационарном случае положительное производство Σ турбулентной энтропии S должно быть компенсировано отрицательным притоком энтропии Ψ / Θ (или положительным притоком негэнтропии). Другими словами, турбулентное поле в определенном смысле сходно с биологической системой [3, 4]. Действительно, внутренние структуры обеих систем поддерживаются за счет непрерывного притока энергии. Следует подчеркнуть, что это замечание о притоке негэнтропии по существу соответствует известному принципу Ричардсона — Колмогорова об энергетическом балансе равновесной иерархии вихрей [8].

Далее, в этом стационарном случае имеем из (5.9), что работа турбулентных напряжений равна объемной вязкой диссипации и в сумме с работой средних вязких напряжений дает полную диссипацию механической энергии в тепло.

Из уравнений (5.6) и (5.8) следует соотношение Гиббса для турбулентного поля:

$$\frac{dE}{dt} = \Theta \frac{dS}{dt} + \frac{1}{3} R_{ij}\delta_{ij} \frac{d}{dt} \frac{1}{\langle\rho\rangle} \tag{5.10}$$

т. е. параметрами состояния турбулентной системы является температура Θ и средняя плотность $\langle\rho\rangle$.

Внутренняя энергия E, согласно (3.9), состоит из двух частей — поступательной E_w и вращательной E_ω (внутренние энергии турбулизации), поэтому можно провести несколько более общее построение, вводя соответственно две энтропии S_w и S_ω и две температуры θ_w и θ_ω:

$$\frac{dE_w}{dt} + \Lambda_{ij}{}^w \frac{d\chi_{ij}{}^w}{dt} = \theta_w \frac{dS_w}{dt} + \frac{1}{3}(R_{ij}\delta_{ij}) \frac{d}{dt} \frac{1}{\langle\rho\rangle} \tag{5.11}$$

$$\frac{dE_\omega}{dt} + \Lambda_{ij}{}^\omega \frac{d\chi^\omega}{dt} = \Theta_\omega \frac{dS_\omega}{dt}$$

где Λ_{ij}^w, Λ_{ij}^ω — некоторые силы (напряжения), работающие на перемещениях (приращениях деформаций) $d\chi_{ij}^w$, $d\chi_{ij}^\omega$. В сумме соотношения (5.11) дают

$$\frac{dE}{dt} = \Theta \frac{dS}{dt} + (\Theta_\omega - \Theta) \frac{dS_\omega}{dt} + \Lambda_{ij}{}^\omega \frac{d\chi_{ij}{}^\omega}{dt} + \Lambda_{ij}{}^\omega \frac{d\chi_{ij}{}^\omega}{dt} + \frac{1}{3}(R_{ij}\delta_{ij}) \frac{d}{dt} \frac{1}{\langle\rho\rangle} \tag{5.12}$$

где $\theta = \theta_w$, $dS = dS_w + dS_\omega$ — приращение суммарной энтропии турбулентности. Если теперь исключить из (5.6) и (5.12) внутреннюю энергию турбулентного поля, то получим обобщенное уравнение для баланса энтропии

$$\Theta \langle\rho\rangle \frac{dS}{dt} = (\Theta - \Theta_\omega) \langle\rho\rangle \frac{dS_\omega}{dt} + (R_{ij}{}^s - r_{ij}{}^s) \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j}\right)^s - (R_{ij}{}^a - r_{ij}{}^a)\, \varepsilon_{ijk}\omega_k +$$

$$+ (\mu_{ij} - \eta_{ij}) \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial X_j} + \frac{\partial \omega_0}{\partial X_j}\right) + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle -\rho E^* v_j \rangle_j + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle \ldots \rangle_j + \Psi \tag{5.13}$$

Здесь $r_{ij}{}^s$, r_{ij}^a, η_{ij} — некоторые составляющие тензора напряжений; они могут быть выражены через Λ_{ij}^w, Λ_{ij}^ω, если $d\chi_{ij}^w / dt$, $d\chi_{ij}^\omega / dt$ линейно связаны с тензорами

$\partial U_i / \partial X_j$ и $\partial(\Omega_i + \omega_i) / \partial X_j$. Введение этих величин соответствует учету «упругих» свойств турбулизации. О возможности подобных эффектов указывалось в работах [13–15]. Их учет, безусловно, необходим при анализе турбулизации неньютоновых жидкостей.

Неравенство температур $\theta \neq \theta_\omega$ позволит получить неравновесный переход энергии от поступательных к вращательным «степеням свободы» турбулентного поля [1].

6. Проблема замыкания. Для нахождения определяющих связей (между динамическими и кинематическими переменными) можно воспользоваться онзагеровским формализмом термодинамики необратимых процессов. Укажем, что введение турбулентной вязкости по существу является частным случаем такого подхода.

Если исходить из требования локального роста полной энтропии $dS_t = dS + ds$, то в результате будет учтено взаимовлияние потоков, порождающих энтропию в микромасштабе (dV) и в макромасштабе (V). Будем однако, считать, что на связи, например между τ_{ij} и $\partial U_i / \partial X_i$, турбулизация не оказывает влияния. Соответственно будем пользоваться требованиями положительности $\langle\sigma\rangle$ и Σ независимо. При этом трудности связаны с построениями для потоков в масштабе V, т. е. для турбулентного поля.

Замыкающие соотношения между термодинамическими потоками (импульса, кинетического момента) J_α и характеристиками среднего поля X_β можно искать, согласно обобщенному [17] принципу Онзагера

$$J_\alpha = \int dt' \int L_{\alpha\beta}(x - x', t - t')\, X_\beta(x', t')\, dx' \tag{6.1}$$

Это соотношение — нелокальное; оно дает осредненные связи при быстро меняющейся структуре поля. Можно думать, что связи типа (6.1) применимы для расчетов турбулентных потоков с перемежающимся режимом [8]. Здесь $L_{\alpha\beta}$ — матрица коэффициента Онзагера — функций структуры турбулентного поля. В обычном случае соотношения (6.1) сводятся к следующим:

$$J_\alpha = L_{\alpha\beta} X_\beta \tag{6.2}$$

Здесь $L_{\alpha\beta}$ — функции той же точки, где определены также J_α и X_β, суммирование по повторяющимся индексам. Отличие от нуля компонент $L_{\alpha\beta}$, $\alpha \neq \beta$ позволяет учесть перекрестные эффекты, а правило Кюри дает возможность разделить взаимовлияния потоков четной и нечетной тензорной размерности. Естественно, что в асимметричной механике могут возникнуть новые перекрестные эффекты. Например, в работе [9] указано на наличие особого термомеханического эффекта, связанного с несимметрией тензора моментных напряжений.

Структура турбулентного поля сама зависит от потоков J_α, поэтому соответствующие связи онзагеровского типа принимают вид сложных нелинейных соотношений (а эффективность связей (6.2) как линейных в значительной степени утрачивается). Тем самым матрица коэффициентов $L_{\alpha\beta}$ будет зависеть не только от параметров состояния в случае турбулентного поля, например, от температуры турбулизации θ), но и от осредненных параметров поля скоростей X_β (т. е. от тензоров $\partial U_i / \partial X_j$, $\varepsilon_{ijk}\omega_k$, $\partial\langle e' v_j\rangle_j / \partial X_j$, . . .). При этом взаимодействие различных потоков X_β также влияет на величины $L_{\alpha\beta}$, что может привести к дополнительном перекрестным эффектам. Зависимость внутренней структуры от потоков X_β означает, что выключение одного (или части) из потоков X_β может приводить к изменению не только перекрестных коэффициентов $L_{\alpha\beta}$, но и диагональных компонент этой матрицы. В силу этого обстоятельства обычное требование положительной определенности каждого из слагаемых

---

[1] Термодинамический анализ иерархии вихрей Ричардсона — Колмогорова естественно потребует введения целого спектра «степеней свободы» и соответственно энергий, температур и энтропий, см. [16].

в сумме произведений

$$\sum = L_{\alpha\beta} X_\beta J_\alpha$$

которое использовалось в работе [11], становится необязательным — нужно лишь, чтобы величина Σ была строго положительна. Отсюда наложение различных потоков, в принципе, может приводить к отрицательным значениям отдельных компонент матрицы $L_{\alpha\beta}$. Это положение может быть объяснением эффекта так называемой отрицательной вязкости [18]. Однако следует иметь в виду, что заключение о наличии в некоторых потоках (см. [19]) отрицательной турбулентной вязкости основано на сопоставлении профилей средних величин Ω_i и R_{ij} (или U и R_{ij} — для задачи о течении в круговом канале [19,20]) и их интерпретации в рамках классического подхода, без учета антисимметричной составляющей рейнольдсовых напряжений. Достаточно ли будет в подобных случаях учета асимметричных эффектов (см. [20]), или же придется пойти на введение отрицательных коэффициентов переноса — покажет сопоставление конкретных расчетов с опытом.

Поступила 22 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Асимметричная механика турбулентных потоков. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
2. Mattioli G. D. Teoria dinamica dei regimi fluidi turbulenti. Padova, CEDAM, 1937, p. 1323.
3. Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1947.
4. Prigogine I. Introduction to thermodynamics of irreversible processes. 2nd ed. New-York — London Interscience, 1961.
5. Нигматулин Р. И., Николаевский В. Н. Диффузия вихря и сохранение момента количества движения в динамике неполярных жидкостей. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
6. Eringen A. C. Simple microfluids. Internat. J. Engng Sci., 1964, vol. 2, No. 2, p. 205—217.
7. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н. Кинематика нематических жидких кристаллов. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 3.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. I. М., Физматгиз, 1965.
9. Листров А. Т. О модели вязкой жидкости с несимметричным тензором напряжений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
10. Favre A. Équations statistiques des gaz turbulents. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред (К 60-летию Л. И. Седова). М., «Наука», 1969.
11. Невзглядов В. Г. Термодинамика турбулентных систем. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 6/12.
12. Глушко Г. С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
13. Rivlin R. S. The relation between the flow of non-newtonian fluids and turbulent newtonian fluids. Quart. Appl. Math., 1957, vol. 15, No. 2, p. 212—215.
14. Moffatt H. K. The interaction of turbulence with strong wind shear. В кн.: Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн. Тр. международного коллоквиума, Москва, 1965, М., «Наука», 1967, стр. 139—156.
15. Crow S. C. Viscoelastic properties of fine-grained incompressible turbulence. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 1, p. 1—20.
16. Nikolaevskii V. N. Asymmetric mechanics and the theory of turbulence. Arch. Mech. Stosowanej, 1972, v. 24, No. 1.
17. Честер Дж. Теория необратимых процессов. М., «Наука», 1966.
18. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., «Мир», 1971.
19. Eskinazi S. Écoulements, turbulents, avec production négative d'énergie. J. de Mecanique, 1964, t. 3, No. 3.
20. Ferrari C. On the differential equations of turbulent flow. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (К 80-летию Н. И. Мусхелишвили). М., «Наука», 1972, стр. 555—556.