

ПРОНИКАНИЕ КОНУСА В СЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

В. Б. Поручиков

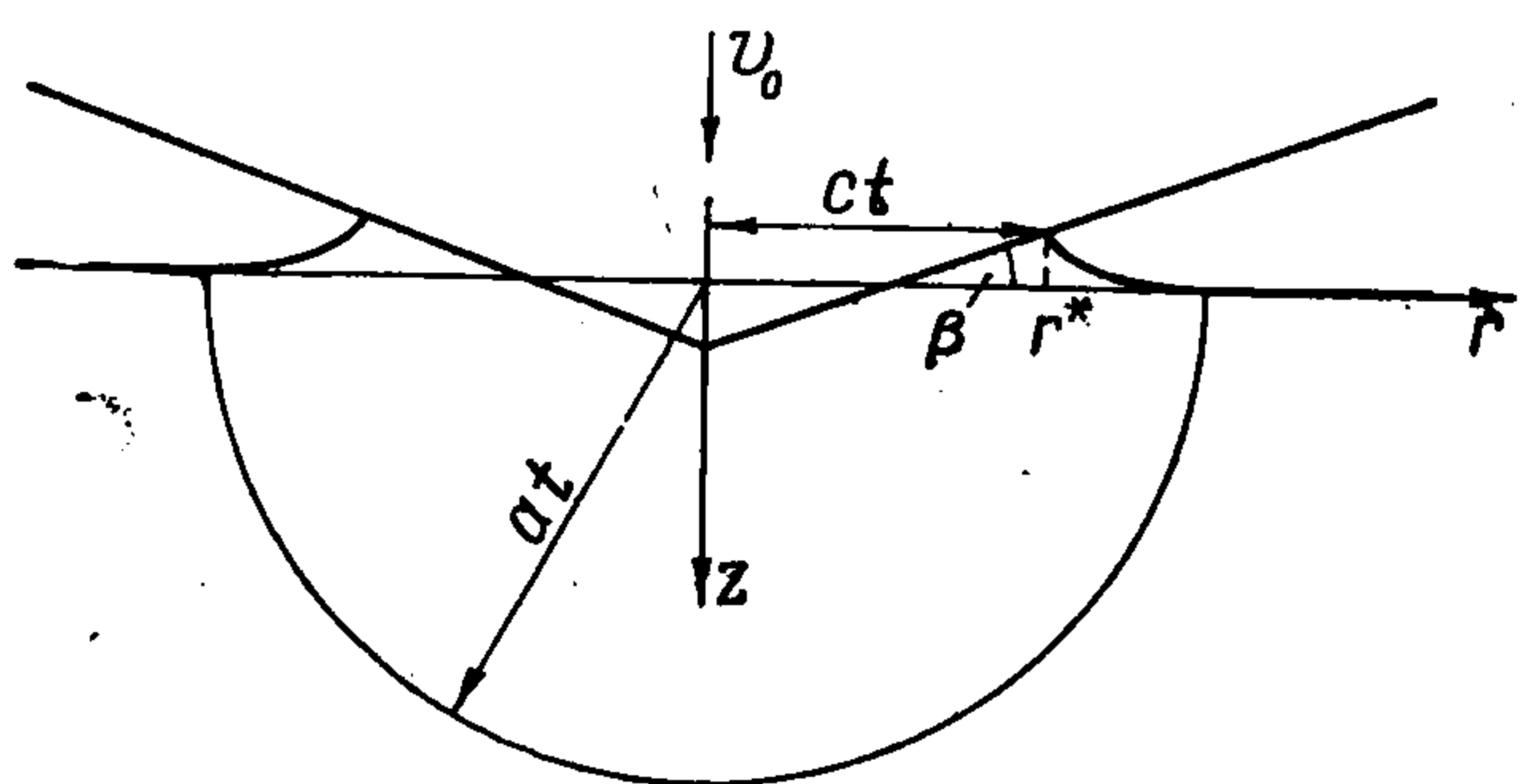
(Москва)

В линейной постановке рассматривается осесимметричная автомодельная задача о проникании тупого жесткого конуса в полупространство идеальной сжимаемой жидкости.

Задача о проникании тупого конуса в несжимаемую жидкость исследовалась теоретически [1-4] и экспериментально [3, 5]. Для случая сжимаемой жидкости эта задача решена в работе [6] при условии, что радиус окружности, являющейся линией пересечения конуса с невозмущенной свободной поверхностью, возрастает при проникании со скоростью, большей скорости звука в жидкости (сверхзвуковой случай).

Ниже дается точное аналитическое решение рассматриваемой задачи в дозвуковом случае с учетом подъема свободной поверхности в окрестности конуса. В элементарных функциях получены формулы для распределения давлений и силы, действующей на конус. Приведены результаты расчетов для скорости возрастания радиуса смоченной поверхности конуса. Показано, что в предельном случае несжимаемой жидкости полученные результаты совпадают с известными, а в другом предельном случае найденное решение совпадает с предельным решением из сверхзвукового случая. Проведено сравнение полученного решения с известным из теории несжимаемой жидкости.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача о проникании с постоянной скоростью v_0 жесткого конуса с углом раствора $\pi - 2\beta$ в идеальную сжимаемую жидкость, занимающую в состоянии покоя полупространство $z \geq 0$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Скорость конуса v_0 направлена вдоль его оси перпендикулярно к плоскости $z = 0$ и предполагается, что $v_0 \ll a$ (a — скорость звука в покоящейся жидкости) и при проникании плотность жидкости меняется мало, кроме того, $\beta \ll 1$ (тупой конус). При этом рассматривается дозвуковой случай, когда $v_0 \operatorname{ctg} \beta < a$. Очевидно, данная за-

дача будет осесимметричной и автомодельной. Как легко представить из физической картины течения, свободная поверхность в окрестности конуса будет подниматься с течением времени, дополнительно увеличивая смоченную поверхность конуса. Следовательно, для правильной постановки задачи нужно учесть подъем жидкости, благодаря которому из-за малости угла β может существенно увеличиться смоченная поверхность конуса. Обозначим неизвестный радиус этой смоченной поверхности через ct (фиг. 1), где t — время, ct — расстояние от точки соприкосновения свободной поверхности

с конусом до оси конуса (влиянием брызговой струи пренебрегаем, так как при малом β вертикальная составляющая количества движения, уносимого брызговой струей, будет мала [3]), причем $c = \text{const}$, как следует из автомодельности задачи. При решении гидродинамической задачи будем пока считать c заданной величиной. Тогда, линеаризуя уравнения движения жидкости и граничные условия [2], получим для определения вектора скорости $\mathbf{v} = \{v_r(t, r, z), v_z(t, r, z)\}$ и давления $p(t, r, z)$ следующую систему уравнений, начальных и граничных условий:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \partial^2 \mathbf{v} / a^2 \partial t^2, & \Delta p &= \partial^2 p / a^2 \partial t^2 & \text{при } z > 0, t > 0 \\ \mathbf{v} &= \partial \mathbf{v} / \partial t = 0, & p &= \partial p / \partial t = 0 & \text{при } t = 0 \\ v_z &= v_0 & \text{при } z = 0, 0 \leq r < ct, & p = 0 & \text{при } z = 0, ct < r \end{aligned} \quad (1.1)$$

где \mathbf{v} и p связаны линеаризованными уравнениями Эйлера. Кроме того, потребуем, чтобы $p \rightarrow 0$ и $\mathbf{v} \rightarrow 0$ при $r^2 + z^2 \rightarrow \infty$ и p и \mathbf{v} были интегрируемы в окрестности края смоченной поверхности конуса $z = 0, r = ct$ и в вершине конуса $z = 0, r = 0$, что необходимо для единственности решения.

В решение системы (1.1) войдет параметр c , который должен быть определен по методу Вагнера [3] из следующего кинематического соотношения, которое связывает движение частицы свободной поверхности жидкости (r^* на фиг. 1) с движением конуса:

$$-\int_0^t v_z(\tau, ct, 0) d\tau + v_0 t = ct \operatorname{tg} \beta \quad (1.2)$$

2. Связь осесимметричных задач с плоскими и метод функционально-инвариантных решений. В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым¹ был предложен метод сведения осесимметричных задач для волнового уравнения к плоским задачам, а именно, представление решения осесимметричной задачи в виде суперпозиции решений плоских задач. Введем систему декартовых координат $\xi\eta z$, повернутую относительно системы $x y z$ вокруг оси z на угол ω

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \omega + y \sin \omega = r \cos(\varphi - \omega), & \eta &= -x \sin \omega + y \cos \omega = \\ & & &= r \sin(\varphi - \omega) \end{aligned}$$

где r, φ, z — цилиндрическая система координат, связанная с системой $x y z$ по формулам: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$.

Рассмотрим в системе координат $\xi\eta z$ плоское решение линеаризованных уравнений движения идеальной жидкости, т. е. такое, что вектор скорости \mathbf{v}_1 и давление p_1 не зависят от η , удовлетворяют волновому уравнению

$$\partial^2 f / \partial \xi^2 + \partial^2 f / \partial z^2 = \partial^2 f / a^2 \partial t^2$$

и вектор скорости \mathbf{v}_1 лежит в плоскости $\xi z, \mathbf{v}_1 = \{v_{1\xi}, v_{1z}\}$. Тогда выражения

$$\mathbf{v} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}_1(t, \xi, z) d\omega \quad \text{и} \quad p = \int_{-\pi}^{\pi} p_1(t, \xi, z) d\omega \quad (2.1)$$

¹ См. [7], гл. 12.

составят решение некоторой пространственной задачи для линеаризованных уравнений движения идеальной жидкости, так как они являются суперпозицией решений уравнений движения. При этом функции v и p будут удовлетворять волновому уравнению с тремя пространственными переменными x, y, z . Для компонент скорости v_r, v_z, v_φ и для давления p получим следующие выражения (сделав замену $\varphi - \omega = \Omega$ и учитывая периодичность подынтегральных функций в (2.1) по Ω):

$$\begin{aligned} v_r &= 2 \int_0^\pi v_{1\xi}(t, r \cos \Omega, z) \cos \Omega d\Omega, & v_z &= 2 \int_0^\pi v_{1z}(t, r \cos \Omega, z) d\Omega \\ v_\varphi &= 0, & p &= 2 \int_0^\pi p_1(t, r \cos \Omega, z) d\Omega \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следовательно, скорость v и давление p не зависят от φ , т. е. являются решениями некоторой осесимметричной задачи для линеаризованных уравнений движения идеальной жидкости и удовлетворяют волновому уравнению

$$\partial^2 f / \partial x^2 + \partial f / \partial y^2 + \partial^2 f / \partial z^2 = \partial^2 f / a^2 \partial t^2$$

Можно показать, что соотношения (2.2) устанавливают взаимнооднозначное соответствие между решениями плоских и осесимметричных задач¹. Тогда, так как в рассматриваемой в п. 1 автомодельной задаче v и p — однородные функции координат и времени нулевого измерения, то и плоские решения v_1 и p_1 также должны быть однородными функциями нулевого измерения и, следовательно по методу функционально-инвариантных решений С. Л. Соболева и В. И. Смирнова [7] их можно представить в виде

$$\begin{aligned} v_{1\xi}(t, \xi, z) &= \operatorname{Re} V(\theta), & v_{1z}(t, \xi, z) &= \operatorname{Re} W(\theta) \\ p_1(t, \xi, z) &= \operatorname{Re} U(\theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $U(\theta), V(\theta)$ и $W(\theta)$ — аналитические функции в области $\operatorname{Im} \theta > 0$, а θ определяется неявным образом из уравнения

$$\delta \equiv t - \theta \xi - z \sqrt{a^{-2} - \theta^2} = 0 \quad (2.4)$$

Ветвь радикала фиксирована следующим образом: проведен разрез в плоскости θ вдоль интервалов действительной оси $(-\infty, -a^{-1})$ и $[a^{-1}, +\infty)$, и значение радикала считается положительным при $\theta = 0$. При этом уравнение (2.4) отображает верхний полукруг $z > 0, z^2 + \xi^2 < a^2 t^2$ действительной плоскости ξz на верхнюю полуплоскость комплексной переменной θ , полуокружность $z^2 + \xi^2 = a^2 t^2$ в отрезок действительной оси $[-a^{-1}, a^{-1}]$, а отрезок $[-at, at]$ — в оставшуюся часть действительной оси. Плоское решение, полученное внутри полукруга, согласно [7], непрерывным образом продолжается через дугу окружности $z^2 + \xi^2 = a^2 t^2$ во внешность полукруга вдоль полукасательных, определяемых уравнением (2.4), благодаря тому, что θ как решение (2.4) сохраняет вдоль них постоянное значение (при $z > at$ полагаем плоское решение тождествен-

¹ К о с т р о в Б. В. Некоторые динамические задачи математической теории упругости. Кандидатская диссертация. М., 1964.

но равным нулю). Так построенное плоское решение является обобщенным решением волнового уравнения [7].

Подставляя выражения (2.3) в (2.2), получаем следующие формулы для компонент скорости v_r , v_z и давления p в осесимметричной автомодельной задаче:

$$\begin{aligned} v_r &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\pi V(\theta) \cos \Omega d\Omega, & v_z &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\pi W(\theta) d\Omega \\ p &= 2 \operatorname{Re} \int_0^\pi U(\theta) d\Omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь θ определяется неявно из (2.4) при $\xi = r \cos \Omega$ или, согласно выбранной ветви радикала $(a^{-2} - \theta^2)^{1/2}$ и выбору полукасательных, явным образом по формулам

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{atr \cos \Omega + iz \sqrt{a^2 t^2 - z^2 - r^2 \cos^2 \Omega}}{a(r^2 \cos^2 \Omega + z^2)} \quad \text{при } a^2 t^2 > r^2 \cos^2 \Omega + z^2 \\ \theta &= \frac{atr \cos \Omega \pm z \sqrt{z^2 + r^2 \cos^2 \Omega - a^2 t^2}}{a(r^2 \cos^2 \Omega + z^2)} \quad \text{при } a^2 t^2 < r^2 \cos^2 \Omega + z^2, \quad z < at \end{aligned} \quad (2.6)$$

Знаки плюс и минус в нижней формуле (2.6) берутся соответственно при $\cos \Omega < 0$ и $\cos \Omega > 0$, а радикалы в обеих формулах считаются арифметическими (при $z > at$, полагая в формулах (2.2) $v_1 \equiv 0$, $p_1 \equiv 0$, получаем $v \equiv 0$, $p \equiv 0$).

Так как v_1 и p_1 удовлетворяют линеаризованным уравнениям Эйлера

$$\partial v_{1z} / \partial t = -\partial p_1 / \rho \partial z, \quad \partial v_{1\xi} / \partial t = -\partial p_1 / \rho \partial \xi$$

(где ρ — плотность невозмущенной жидкости), то функции $U(\theta)$, $V(\theta)$, $W(\theta)$ не являются независимыми. Видно, что уравнения Эйлера будут удовлетворены, если

$$V'(\theta) = U'(\theta) \theta / \rho, \quad W'(\theta) = U'(\theta) \sqrt{a^{-2} - \theta^2} / \rho \quad (2.7)$$

Итак, решение осесимметричной автомодельной задачи для v и p ищется в виде (2.5), где функции $U(\theta)$, $V(\theta)$, $W(\theta)$ регулярны в области $\operatorname{Im} \theta > 0$ и связаны соотношениями (2.7), а θ определяется из (2.4) или (2.6).

3. Решение задачи. При решении рассматриваемой осесимметричной задачи будем использовать методику, предложенную в работе [8] при решении сходных упругих задач.

Дифференцируя уравнения (2.5) для v_z и p по t , получим при $z = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 2 \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{U'(\theta)}{r \cos \Omega} d\Omega, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 2 \operatorname{Re} \int_0^\pi \frac{W'(\theta)}{r \cos \Omega} d\Omega \quad (3.1)$$

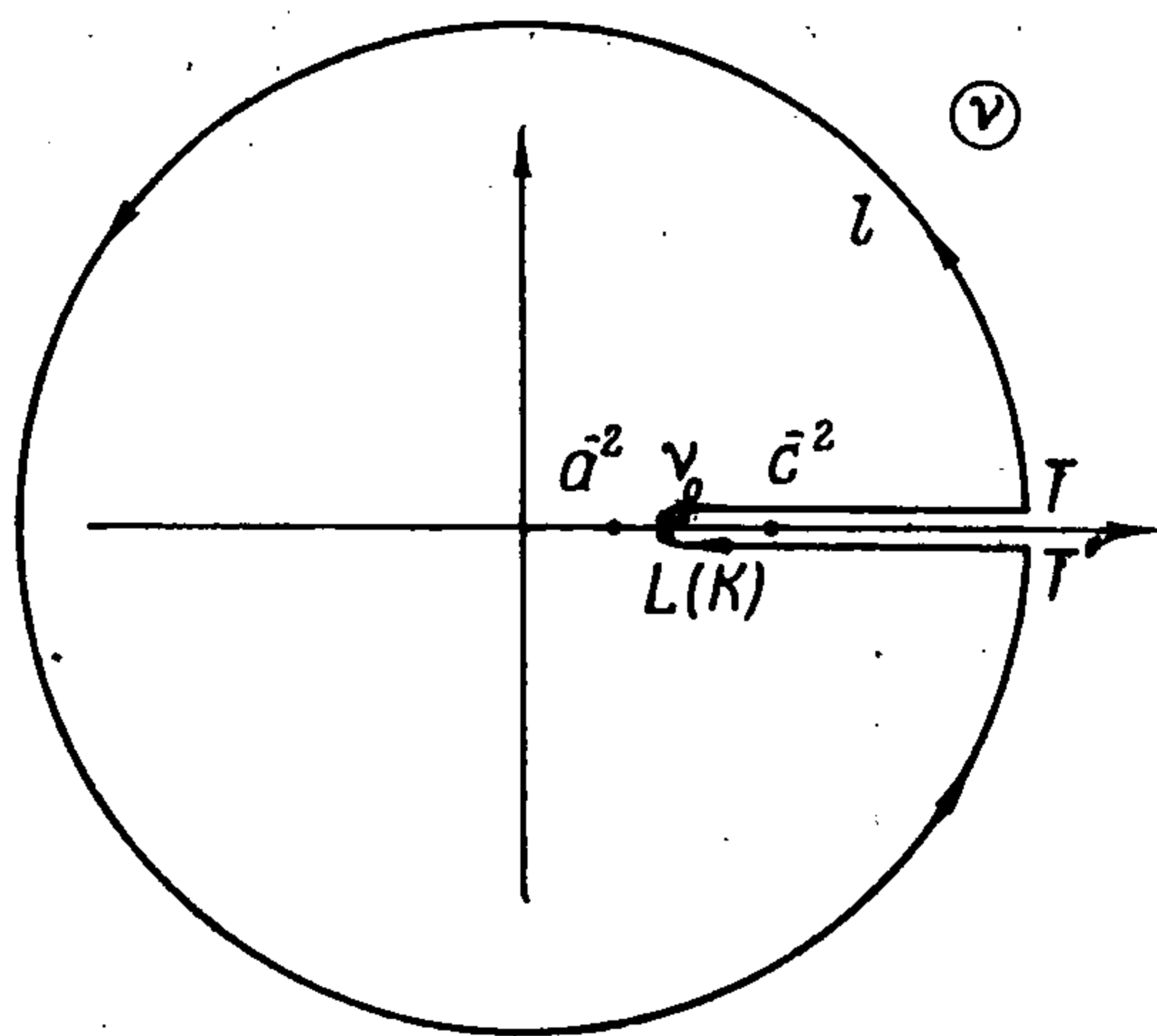
В уравнениях (3.1) введем новую переменную по v по формуле $\theta = v^{1/2}$, проведя разрез в плоскости v вдоль положительной полуоси $[0, +\infty)$. Тогда полуплоскость $\operatorname{Im} \theta > 0$ отображается на плоскость v с разрезом $[0, +\infty)$. Учитывая уравнение (2.7), связывающее $U'(\theta)$ и $W'(\theta)$,

получим из (3.1)

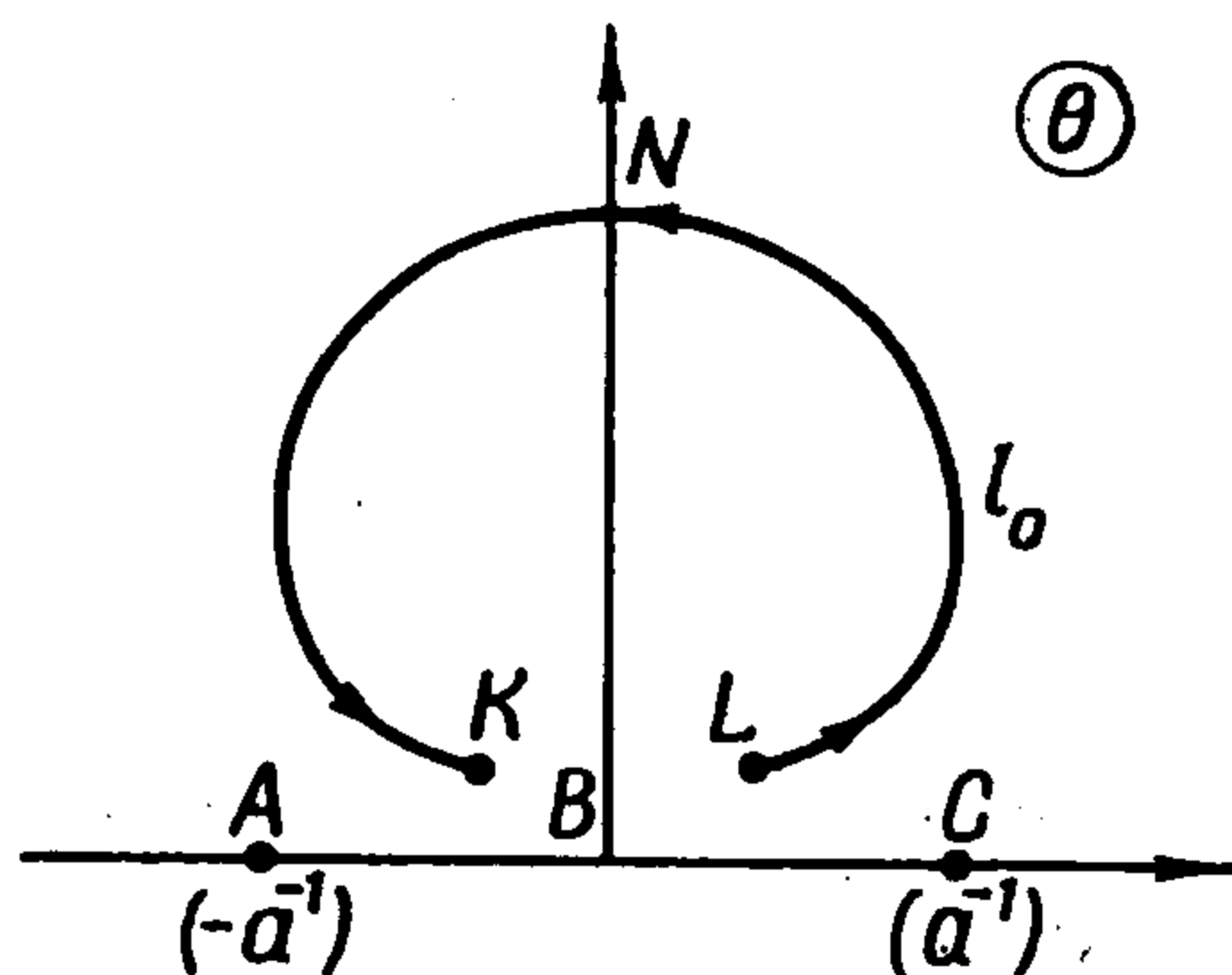
$$\operatorname{Re} \int_l \frac{F'(v) dv}{\sqrt{v-v_0}} = \frac{r}{2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \operatorname{Re} \int_l \frac{F'(v) \sqrt{a^{-2}-v}}{\sqrt{v-v_0}} dv = \frac{r\rho}{2} \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$v_0 = t^2 / r^2, \quad U(\theta) = U(v^{1/2}) \equiv F(v)$$

Здесь $F(v)$ должна быть регулярной в плоскости v вне разреза $[0, +\infty)$; для ветви радикала $(a^{-2}-v)^{1/2}$ разрез проведен вдоль интервала положительной полуоси $[a^{-2}, +\infty)$ и радикал считается положительным при $v=0$; для выделения однозначной ветви радикала $(v-v_0)^{1/2}$ проведен



Фиг. 2



Фиг. 3

разрез $[v_0, +\infty)$ и при $v=0$ аргумент радикала считается равным $\pi/2$. Контур l (фиг. 2) получен следующим образом. На фиг. 3 в плоскости θ показан контур l_0 , в который переходит путь интегрирования $[0, \pi]$ из формул (2.5) при $z > 0$. При $z=0$ ($z \rightarrow +0$) концы контура l_0 (точки L и K) будут лежать на отрезке $[-a^{-1}, a^{-1}]$ симметрично относительно начала $\theta=0$. Следовательно, при замене $\theta = v^{1/2}$ контур l_0 перейдет в контур l , который можно представить в виде окружности произвольного радиуса R (в силу аналитичности $F(v)$ вне разреза $[0, +\infty)$) и двух отрезков одинаковой длины KT' и LT , проходящих, как указано на фиг. 2, соответственно по нижнему и верхнему берегам разреза $[0, +\infty)$, причем точки K и L попадают в одну точку $v=v_0$.

Для выполнения начальных условий в уравнениях (3.2) необходимо, чтобы при $v_0 < a^{-2}$ можно было стянуть контур интегрирования l в одну точку, т. е. функция $F'(v)$ должна быть аналитической вне разреза $[a^{-2}, +\infty)$. Согласно граничным условиям, выражения для $\partial p / \partial t$ из (3.2) должно обращаться в нуль при $v_0 < c^{-2}$, следовательно, $F'(v)$ должна быть регулярной вне разреза $[c^{-2}, +\infty)$. Производная $\partial v_z / \partial t$ из (3.2) должно исчезать при $v_0 > c^{-2}$, следовательно, подынтегральная функция в этом выражении должна быть аналитична при $\operatorname{Re} v > v_0 > c^{-2}$ и убывать на бесконечности как $o(v^{-1})$, чтобы интеграл по окружности исчезал при $R \rightarrow \infty$. Тогда можно положить

$$F'(v) = A(v) (c^{-2} - v)^{-n}$$

где n — целое, $A(v)$ — целая аналитическая функция, не исчезающая при $v = c^{-2}$. Из условия интегрируемости давления на краю смоченной поверхности конуса должно быть $n \leq 2$. Отсюда легко видеть, что $A(v)$ должна быть ограничена: $A(v) = A \equiv \text{const}$ и $n = 2$. Итак, получаем

$$F(v) = Av c^2 (c^{-2} - v)^{-1} + c_1$$

При $z = 0$, аналогично выражениям (3.2), получаем

$$p = \sqrt{v_0} \operatorname{Re} \int_l \frac{F(v) dv}{v \sqrt{v - v_0}}, \quad v_z = \frac{\sqrt{v_0}}{\rho} \operatorname{Re} \int_l \frac{1}{v \sqrt{v - v_0}} \times \\ \times \left[\int_0^v F'(\mu) \sqrt{a^{-2} - \mu} d\mu + c_2 \right] dv \quad (3.3)$$

В (3.3) интегрирование по μ проводится по контуру, лежащему по ту же сторону от действительной оси, что и точка $\mu = v$. Из (3.3) следует, что для выполнения начальных условий необходимо, чтобы подынтегральные функции в (3.3) были аналитичны в точке $v = 0$, т. е. $c_1 = c_2 = 0$, и, следовательно:

$$F(v) = Av c^2 (c^{-2} - v)^{-1}$$

а формулы (3.3) принимают вид

$$p = c^2 \sqrt{v_0} \operatorname{Re} \int_l \frac{Adv}{(c^{-2} - v) \sqrt{v - v_0}}, \quad v_z = \frac{\sqrt{v_0}}{\rho} \operatorname{Re} \int_l \frac{Adv}{v \sqrt{v - v_0}} \int_0^v \frac{\sqrt{a^{-2} - \mu}}{(c^{-2} - \mu)^2} d\mu \quad (3.4)$$

Теперь из (3.4) видно, что p действительно обращается в нуль при $v_0 < c^{-2}$. Определим константу A из граничного условия $v_z = v_0$ при $v_0 > c^{-2}$, $z = 0$

$$\frac{\sqrt{v_0}}{\rho} \operatorname{Re} \int_l \frac{Adv}{v \sqrt{v - v_0}} \int_0^v \frac{\sqrt{a^{-2} - \mu}}{(c^{-2} - \mu)^2} d\mu = v_0$$

Здесь интеграл по μ можно представить в виде

$$\int_0^v \frac{\sqrt{a^{-2} - \mu}}{(c^{-2} - \mu)^2} d\mu = \int_0^{-\infty} \frac{\sqrt{a^{-2} - \mu}}{(c^{-2} - \mu)^2} d\mu + \int_{v_\infty}^v \frac{\sqrt{a^{-2} - \mu}}{(c^{-2} - \mu)^2} d\mu = B + F_0(v)$$

$$B = -c [\gamma^{1/2} + (1 - \gamma)^{-1/2} \operatorname{arc} \cos (\gamma^{1/2})], \quad \gamma = c^2 a^{-2}$$

Во втором интеграле интегрирование проводится вдоль луча $\arg \mu = \arg v$. Так как $F_0(v)$ меняет знак при переходе через разрез $[c^{-2}, +\infty)$, то

$$\int_l \frac{F_0(v) dv}{v \sqrt{v - v_0}} = 0 \quad \text{при } v_0 > c^{-2}$$

и получаем $v_0 = 2\pi AB\rho^{-1}$. Отсюда

$$A = - \frac{v_0 \rho \sqrt{1 - \gamma}}{2\pi c [\sqrt{\gamma(1 - \gamma)} + \operatorname{arc} \cos \sqrt{\gamma}]} \quad (3.5)$$

Для распределения давлений p на смоченной поверхности конуса ($v_0 > c^{-2}$) получаем

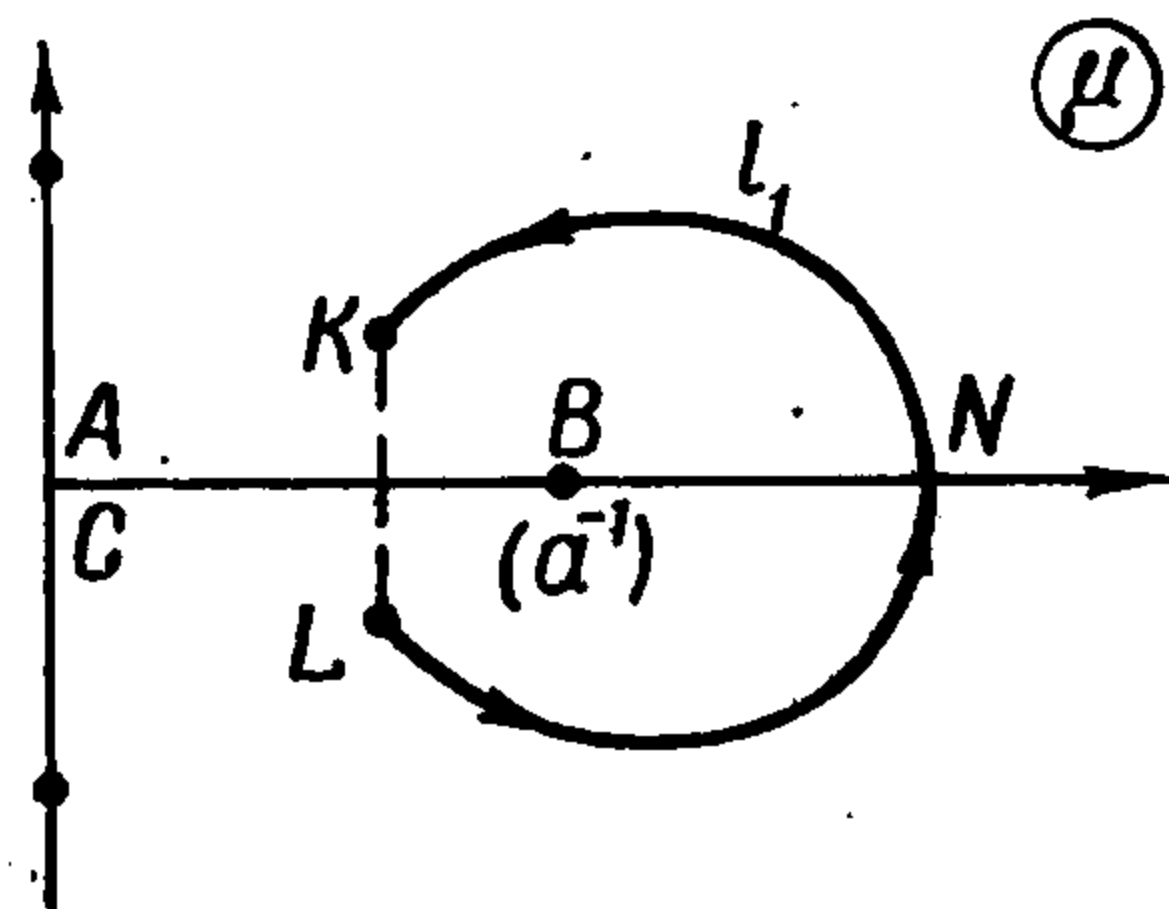
$$p = \frac{v_0 r c^2 t \sqrt{1-\gamma}}{\sqrt{c^2 t^2 - r^2} [\sqrt{\gamma(1-\gamma)} + \arccos \sqrt{\gamma}]} \quad (3.6)$$

где p имеет интегрируемую особенность при $r = ct$.

Для получения давления в любой точке полупространства $z \geq 0$ сделаем замену переменной $\mu = (a^{-2} - \theta^2)^{1/2}$ в формуле (2.5) для p и, учитывая ветвь радикала $(a^{-2} - \theta^2)^{1/2}$, получим при $a^2 t^2 > r^2 + z^2$,

$$p = 2Ac^2 \operatorname{Re} \int_{l_1} \frac{(za^{-2} - t\mu) d\mu}{(c^{-2} - a^{-2} + \mu^2) [r^2 a^{-2} - t^2 + 2tz\mu - \mu^2 (r^2 + z^2)]^{1/2}} \quad (3.7)$$

Здесь контур l_1 в области $\operatorname{Re} \mu > 0$ показан на фиг. 4 и A дается формулой (3.5). В точках K и L имеем $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$ соответственно, где μ_1 и μ_2 — корни квадратного трехчлена под знаком радикала (3.7).



Фиг. 4

Для выделения однозначной ветки радикала в (3.7) проведен разрез в плоскости μ от точки L до K (пунктиром) и взята такая ветвь радикала, что его аргумент равен $\pi/2$ при действительных значениях μ , больших a^{-1} . Тогда, учитывая, что на разных берегах разреза подынтегральное выражение в (3.7) принимает противоположные по знаку, но равные по абсолютной величине значения и имеет два простых полюса в точках $\mu = \pm i(c^{-2} - a^{-2})^{1/2}$, используя теорему о вычетах, окончательно получаем из (3.7)

$$p = -2\pi A c^2 \left[t \left(\frac{\sqrt{A_0^2 + B_0^2} - A_0}{2(A_0^2 + B_0^2)} \right)^{1/2} - \frac{z}{a^2 \sqrt{c^{-2} - a^{-2}}} \left(\frac{\sqrt{A_0^2 + B_0^2} + A_0}{2(A_0^2 + B_0^2)} \right)^{1/2} \right] \quad (3.8)$$

$$r^2 + z^2 < a^2 t^2, \quad A_0 = z^2 (c^{-2} - a^{-2}) + c^{-2} r^2 - t^2, \quad B_0 = 2tz ((c^{-2} - a^{-2})^{1/2})$$

Здесь радикалы считаются арифметическими. В частности, при $z \rightarrow 0$ и $r > ct$ выражение (3.8) обращается в нуль, а при $z \rightarrow 0$ и $r < ct$ совпадает с выражением (3.6). Заметим, что выражение (3.8) исчезает при $r^2 + z^2 \rightarrow a^2 t^2$, а при $c \rightarrow a$ из (3.5) получаем $A \rightarrow -v_0 r / (4\pi a)$, и выражение (3.8) дает в пределе

$$p = \frac{v_0 r a^2 t}{2} \frac{a^2 t^2 - r^2 - z^2}{(a^2 t^2 - r^2)^{3/2}}$$

Эта формула совпадает с аналогичной предельной формулой, полученной из решения задачи о проникании тупого конуса в сжимаемую жидкость при $c = v_0 \operatorname{ctg} \beta > a$, когда $v_0 \operatorname{ctg} \beta \rightarrow a$ [6].

В другом предельном случае ($a \rightarrow \infty$) выражение (3.8) дает распределение давления для случая несжимаемой жидкости.

Аналогичным образом можно вычислить компоненты скорости v_z и v_r в области $r^2 + z^2 < a^2 t^2$. Заметим, что при $r^2 + z^2 > a^2 t^2$ ($z < at$) все функции v_z , v_r и p обращаются в нуль, так как точки K и L — концы контура интегрирования l_1 в плоскости μ — попадают в одну и ту же точку, лежащую на отрезке действительной оси $[0, a^{-1}]$ в плоскости μ (ибо в плоскости θ они лежат на отрезке $[-a^{-1}, a^{-1}]$ симметрично относительно точки $\theta = 0$). Следовательно, по теореме Коши интегралы по замкнутому контуру l_1 обращаются в нуль.

Определим скорость возрастания радиуса смоченной поверхности s . Выражение (3.4) для v_z на свободной поверхности ($v_0 < c^{-2}$) с учетом (3.5) пре-

образуется к виду

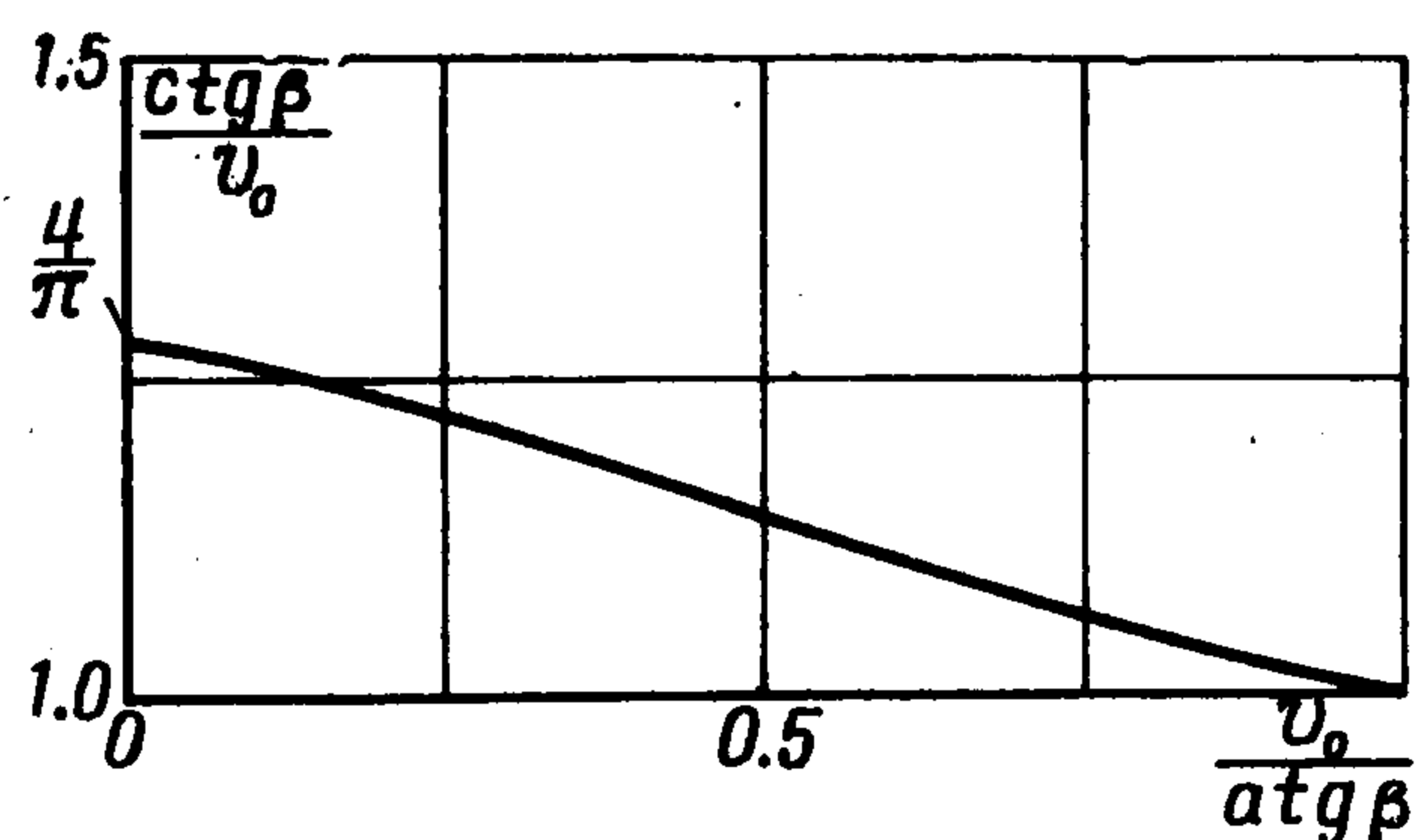
$$v_z = v_0 \left\{ 1 - \left(\sqrt{\gamma(1-\gamma)} + \arccos \sqrt{\gamma} \right)^{-1} \left[\arccos \frac{ct}{r} + \frac{ct(1-\gamma)}{\sqrt{r^2 - c^2 t^2}} \right] \right\} H(at - r)$$

Здесь $H(at - r)$ — единичная функция Хевисайда. Подставляя это выражение для v_z в (1.2) и производя интегрирование, получаем окончательно следующее выражение, связывающее $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta$ и γ :

$$\gamma + \gamma^{1/2} (1 - \gamma)^{-1/2} \arccos (\gamma^{1/2}) = 2v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \quad (3.9)$$

Численное решение уравнения (3.9) представлено на фиг. 5, где дан график зависимости $v_0^{-1} c \operatorname{tg} \beta$ от $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta$. Видно, что c зависит от a при постоянном значении $v_0 \operatorname{ctg} \beta$ и $c \rightarrow 4\pi^{-1} v_0 \operatorname{ctg} \beta$ при $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \rightarrow 0$ (случай несжимаемой жидкости). Когда $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \rightarrow 1$, то $c \rightarrow v_0 \operatorname{ctg} \beta \rightarrow a$, и свободная поверхность жидкости вне конуса остается невозмущенной, что соответствует физической картине течения.

Возвращаясь к формуле (3.6), замечаем, что если считать параметр c заданным, независимым от a , то давление по формуле (3.6) зависит от a , в противоположность другому предельному случаю — прониканию узкого конуса с дозвуковой скоростью в сжимаемую жидкость, когда давление на конусе не зависит от a [6].



Фиг. 5

В случае несжимаемой жидкости формула для давления на поверхности тупого конуса [2] получается из (3.6) при $a \rightarrow \infty$

$$p = \frac{2}{\pi} v_0 \rho c \left[1 - \left(\frac{r}{ct} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.10)$$

где ct , как и в (3.6), — радиус смоченной поверхности конуса. Формула (3.6) отличается от (3.10) наличием множителя $2^{-1} \pi \cdot [\gamma^{1/2} + (1 - \gamma)^{-1/2} \arccos (\gamma^{1/2})]^{-1}$, который меняется в пределах от $\pi/4$ до единицы и, следовательно, при одних и тех же значениях v_0 , r , t и c давление в сжимаемой жидкости меньше давления в несжимаемой.

Если в формуле (3.6) c дается уравнением (3.9), получаем для давления на поверхности тупого конуса формулу

$$p = \frac{1}{2} \rho c^2 \operatorname{tg} \beta \left[1 - \left(\frac{r}{ct} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.11)$$

Если не учитывать подъем свободной поверхности в сжимаемой жидкости, то $c = v_0 \operatorname{ctg} \beta$, и формула (3.6) принимает вид

$$p = \frac{v_0^2 \rho}{\operatorname{tg} \beta} \left[1 - \left(\frac{r \operatorname{tg} \beta}{v_0 t} \right)^2 \right]^{-1/2} \left\{ \frac{v_0}{a \operatorname{tg} \beta} + \left[1 - \left(\frac{v_0}{a \operatorname{tg} \beta} \right)^2 \right]^{-1/2} \arccos \frac{v_0}{a \operatorname{tg} \beta} \right\}^{-1} \quad (3.12)$$

Для случая несжимаемой жидкости с учетом подъема свободной поверхности, т. е. согласно [3] при $c = 4v_0\pi^{-1} \operatorname{ctg} \beta$, распределение давлений на конусе дается выражением:

$$p = \frac{8v_0^2\rho}{\pi^2 \operatorname{tg} \beta} \left[1 - \left(\frac{\pi r \operatorname{tg} \beta}{4v_0 t} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.13)$$

а без учета подъема жидкости — по формуле (3.10), где $c = v_0 \operatorname{ctg} \beta$

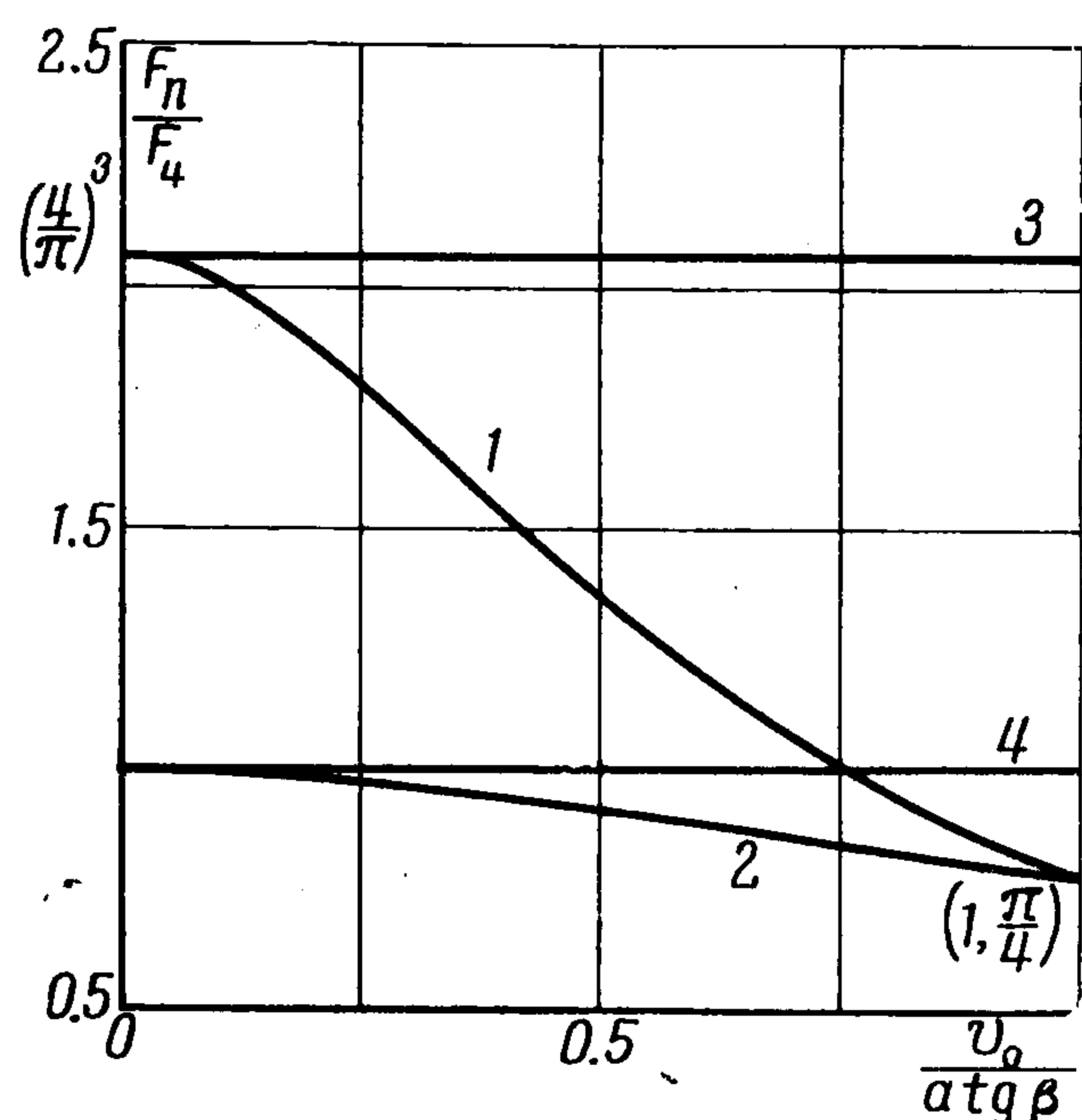
$$p = \frac{2v_0^2\rho}{\pi \operatorname{tg} \beta} \left[1 - \left(\frac{r \operatorname{tg} \beta}{v_0 t} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (3.14)$$

Вычислим силы, действующие на поверхность тупого конуса в один и тот же момент времени t для четырех случаев расчета давлений по формулам (3.11) — (3.14) и обозначим полученные результаты соответственно через F_n ($n = 1, 2, 3, 4$). Тогда, относя к F_4 , имеем

$$\frac{F_1}{F_4} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{c \operatorname{tg} \beta}{v_0} \right)^4, \quad \frac{F_2}{F_4} = \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{v_0}{a \operatorname{tg} \beta} + \left[1 - \left(\frac{v_0}{a \operatorname{tg} \beta} \right)^2 \right]^{-1/2} \arccos \frac{v_0}{a \operatorname{tg} \beta} \right\}^{-1}$$

$$F_3/F_4 = (4/\pi)^3, \quad F_4/F_4 = 1$$

Графики зависимости F_n/F_4 ($n = 1, 2, 3, 4$) от $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta$ представлены на фиг. 6 кривыми 1—4 соответственно. Следует заметить, что разница



Фиг. 6

в гидродинамических силах F_n , действующих на поверхность проникающего конуса в четырех случаях, обуславливается не только различием в давлениях, но и разницей в площадях смоченных поверхностей. Из этих графиков видно, то наиболее точно и физически корректно описывает поведение силы кривая 1, которая при $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \rightarrow 0$ дает случай несжимаемой жидкости с учетом подъема свободной поверхности 3, а при $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \rightarrow 1$, когда $c \rightarrow a$, дает результат, совпадающий с аналогичным предельным результатом, полученным для случая $c = v_0 \operatorname{ctg} \beta > a$ при

$v_0 \operatorname{ctg} \beta \rightarrow a$ (точка $(1, \pi/4)$). В последнем предельном случае теория несжимаемой жидкости с учетом подъема жидкости (график 3) дает завышение указанного предельного результата приблизительно в 2.6 раза. Следовательно, для правильного определения гидродинамических сил в диапазоне $0 < v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta < 1$ необходимо пользоваться кривой 1.

В заключение отметим, что если конус не бесконечный и радиус его основания равен b , то задача будет автомодельной до тех пор, пока смоченная поверхность конуса не достигнет его основания $r = b$, т. е. до момента

времени $t_0 = b / c$. Как и в случае несжимаемой жидкости [3], можно ожидать, что в этот момент сила, действующая на конус, проникающий с постоянной скоростью, достигнет максимума $F_1(t_0)$. Сравним эту максимальную силу с максимальной силой $F_3(t_1)$, полученной для этой же задачи по теории несжимаемой жидкости [3], когда в обоих случаях учитывается подъем жидкости. Принимая во внимание, что для несжимаемой жидкости максимальная сила достигается в момент $t_1 = \pi b \operatorname{tg} \beta / (4v_0)$, с помощью уравнений (3.11) и (3.13) получим

$$\frac{F_3(t_1) - F_1(t_0)}{F_1(t_0)} = \left(\frac{4v_0}{\pi c \operatorname{tg} \beta} \right)^2 - 1$$

Здесь c дается уравнением (3.9). Правая часть полученного выражения является монотонно возрастающей функцией параметра $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta$ и при $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \rightarrow 0$ стремится к нулю, а при $v_0 a^{-1} \operatorname{ctg} \beta \rightarrow 1$ достигает величины $16\pi^{-2} - 1 \approx 0,62$. Таким образом, при $v_0 \operatorname{ctg} \beta = a$ максимальная сила, полученная по теории несжимаемой жидкости, превышает на 62% аналогичный результат, полученный для сжимаемой жидкости.

Автор благодарит Э. И. Григолюка и С. С. Григоряна за обсуждение работы.

Поступила 31 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Shiffman M., Spencer D. C. The force of impact on a cone striking a water surface (vertical entry). *Communs. Pure and Appl. Math.*, 1951, vol. 4, No. 4, p. 379—417.
2. Багдоев А. Г. Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1961.
3. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
4. Chuang Sheng-Lun. Theoretical investigations on slamming of cone-shaped bodies. *J. of Ship Res.*, 1969, vol. 13, No 4, p. 276—283.
5. Watanabe S. Resistance of impact on water surface, part I—cone and part II—cone (continued). *Institute of physical and chemical research, Tokyo (scientific papers)*, 1929, vol. 12, p. 251—267; 1930, vol. 14, p. 153—168.
6. Сагомоян А. Я., Поручиков В. Б. Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1970.
7. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л., ОНТИ, 1937.
8. Костров Б. В. Автомодельные динамические задачи о вдавлении жесткого штампа в упругое полупространство. *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*, 1964, № 4.