Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.5

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Катков

(Новосибирск)

Уравнения гидродинамики идеальной жидкости классифицируются по параметру Кориолиса; указываются все существенно различные решения ранга один.

1. Постановка задачи. Пусть x, y — декартовы координаты, u, v — составляющие скорости по осям x, y, p — давление; плотность ρ будем считать постоянной и равной единице. Рассматриваются системы уравнений вида

$$uu_x + vu_y - lv = -p_x, \quad uv_x + vv_y + lu = -p_y, \quad u_x + v_y = 0 \qquad (1.1)$$

в которых параметр $l(y)$ может быть произвольной функцией y. Система (1.1) допускает при произвольной $l(y)$ некоторую группу преобразований G. Требуется найти такие специальные виды функции $l(y)$, при которых основная группа, допускаемая системой (1.1), будет более широкой по сравнению с G.

Уравнения (1.1) встречаются в метеорологических задачах; слагаемые lu и lv представляют собой компоненты ускорения от силы Кориолиса, появляющейся за счет вращения Земли; $l(y)$ — параметр Кориолиса. Если $l = 0$, то система (1.1) совпадает с обычными уравнениями гидродинамики идеальной жидкости; для этого случая в предположении нестационарности течения вычисление группы проведено в работе [1].

Помимо вычисления группы преобразований, будем строить решения ранга один, т. е. такие, отыскание которых сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Некоторые из этих решений были известны раньше, например в [2] указаны решения со спиральными линиями тока. В данной работе решается задача групповой классификации систем (1.1), вычисляются оптимальные системы однопараметрических подгрупп и указываются все существенно различные решения. Необходимый аппарат теории групп изложен в [3], поэтому многие промежуточные выкладки будут опускаться.

2. Классификация уравнений. Для вычисления координат инфинитезимального оператора группы, допускаемой системой (1.1), необходимо выписать так называемые определяющие уравнения и решить их.

1) В случае произвольной функции $l(y)$ базисные операторы соответствующей алгебры Ли имеют вид

$$X_1 = \partial / \partial p, \qquad X_2 = \partial / \partial x \qquad (2.1)$$

Анализ определяющих уравнений в случае других видов функции $l(y)$ дает следующий результат:

2) если $l = y^{m-1}$ $(m \neq 1)$, то к операторам (2.1) добавляется еще один оператор

$$X_3^1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + mu\frac{\partial}{\partial u} + mv\frac{\partial}{\partial v} + 2mp\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.2}$$

3) если $l = e^{my}$ $(m \neq 0)$, то к операторам (2.1) добавляется оператор

$$X_3^2 = \frac{\partial}{\partial y} + mu\frac{\partial}{\partial u} + mv\frac{\partial}{\partial v} + 2mp\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.3}$$

4) в случае $l = 1$ основная группа порождается уже пятью операторами: к (2.1) присоединяются три новых оператора

$$X_3^3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2p\frac{\partial}{\partial p} \tag{2.4}$$

$$X_4 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_5 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}$$

5) при $l = 0$ группа порождается шестью операторами: к (2.1) присоединяются операторы

$$X_3^4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \qquad X_4 = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$X_5 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v} \tag{2.5}$$

$$X_6 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2p\frac{\partial}{\partial p}$$

3. Решения при $l \neq \mathrm{const}$. Перейдем к построению существенно различных решений для первых трех случаев. Для этого необходимо вычислить оптимальные системы однопараметрических подгрупп и провести интегрирование получающихся уравнений. Всюду ниже используются следующие обозначения: u_0, v_0, p_0 — произвольные постоянные, f — произвольная функция своего аргумента.

3.1. Если $l(y)$ — произвольная функция, то оптимальная система порождается операторами (2.1). Подгруппа с оператором X_1 отпадает, так как для нее не выполнено необходимое условие существования инвариантного решения, а подгруппа с оператором X_2 дает решения, зависящие от y. После подстановки их в уравнения (1.1) придем к системе (штрих означает дифференцирование)

$$vu' - lv = 0, \qquad vv' + lu = -p', \qquad v' = 0$$

Из последнего уравнения $v = v_0$. Если $v_0 \neq 0$, то интегрирование дает

$$u = u_0 + \lambda(y), \qquad p = p_0 - {}^1/_2\lambda^2 + u_0\lambda \qquad (\lambda'(y) = l(y))$$

Если же $v_0 = 0$, то

$$u = u_0 + f(y), \qquad p = p_0 + \int l(y)\,[u_0 + f(y)]\,dy$$

В первом случае линии тока задаются формулой

$$u_0 y - v_0 x + \int \lambda(y)\,dy = \mathrm{const}$$

а во втором — представляют собой прямые линии, параллельные оси x.

3.2. Для $l = y^{m-1}$ оптимальная система порождается операторами X_1, X_3^1, $X_2 + \alpha X_1$. Решение на подгруппе с оператором X_3^1 имеет вид

$$u = x^m U(\xi), \quad v = x^m V(\xi), \quad p = x^{2m} P(\xi), \; \xi = y / x$$

Последняя подгруппа дает решение вида

$$u = U(y), \quad v = V(y), \quad p = \alpha x + P(y)$$

После подстановки в (1.1) и интегрирования получаем следующее решение:

$$u = u_0 + \frac{1}{m} y^m - \frac{\alpha}{v_0} y, \qquad v = v_0$$

$$p = p_0 + \alpha x - \frac{1}{2m^2} y^{2m} + \frac{\alpha}{v_0(m+1)} y^{m+1} - \frac{u_0}{m} y^m$$

При этом предполагалось, что $m \neq 0$ и $m \neq -1$.

В метеорологических задачах параметр Кориолиса часто аппроксимируют линейной функцией, что соответствует $m = 2$. В этом случае линии тока представляют собой кубические параболы, и решение можно трактовать как течение типа «гребня». Известно из метеорологических наблюдений, что такие течения приводят к образованию фронтов и резкой перемене погоды.

Если $m = 0$, то решение принимает вид

$$u = u_0 + \ln y - \frac{\alpha}{v_0} y, \qquad v = v_0$$

$$p = p_0 + \alpha x - \frac{1}{2} \ln^2 y + \frac{\alpha}{v_0} y - u_0 \ln y$$

а при $m = -1$

$$u = u_0 - \frac{1}{y} - \frac{\alpha}{v_0} y, \qquad v = v_0$$

$$p = p_0 + \alpha x - \frac{1}{2y^2} + \frac{\alpha}{v_0} \ln y + \frac{u_0}{y}$$

3.3. Рассмотрим группу, для которой $l = e^{my}$. Оптимальная система однопараметрических подгрупп порождается операторами $\alpha X_1 + X_2$, $X_3^2 + \alpha X_2$.

Первая подгруппа дает решения вида

$$u = U(y), \quad v = V(y), \quad p = \alpha x + P(y)$$

После подстановки в систему (1.1) и интегрирования получаем

$$u = u_0 + \frac{1}{m} e^{my} - \frac{\alpha}{v_0} y, \qquad v = v_0$$

$$p = p_0 + \alpha x + \frac{1}{m^2}\left[\frac{\alpha}{v_0}(my - 1) - \frac{1}{2} - mu_0\right] e^{my}$$

Решение аналогично течению типа гребня.

Решение на второй подгруппе представляется в виде

$$u = e^{my} U(\xi), \quad v = e^{my} V(\xi), \quad p = e^{2my} P(\xi), \quad \xi = y - \alpha x$$

а искомые функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$UU' + V(mU - \alpha U') - V = -P'$$
$$UV' + V(mV - \alpha V') + U = -2mP + \alpha P'$$
$$U' + mV - \alpha V' = 0$$

Одним из решений данной системы будет

$$U = a + v_0 e^{k\xi}, \quad V = v_0 e^{k\xi}, \quad P = bv_0 e^{k\xi} - a/2m$$
$$a = \frac{(\alpha-1)^2}{m(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}, \quad b = \frac{1-\alpha^2}{m(\alpha^2 - 2\alpha - 1)}, \quad k = \frac{m}{\alpha - 1}$$

Линии тока $\psi = \text{const}$ задаются (с точностью до сдвига по оси x формулой

$$x = y - \frac{\alpha - 1}{m\alpha} \ln\left(\text{const} - \frac{a}{m} e^{my}\right)$$

и представляют собой семейство кривых, стягивающихся к прямой линии. Решение может моделировать течение, возникающее в кумулятивной струе.

4. Решения при постоянном параметре Кориолиса. Прежде чем строить решения при $l = 1$ и $l = 0$, сделаем одно замечание. Исходную систему (1.1) в случае постоянного параметра Кориолиса можно заменить ей эквивалентной, введя в качестве одной из искомых функций вихрь $\omega = u_y - v_x$. При $\omega = 0$ система (1.1) равносильна уравнениям Коши — Римана $u_y - v_x = 0$, $u_x + v_y = 0$, допускающим бесконечную группу преобразований. Поэтому в дальнейшем будем отыскивать только такие решения, у которых вихрь отличен от нуля.

Ниже придется использовать исходные уравнения в полярных координатах

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad u = w\cos\varphi, \quad v = w\sin\varphi$$

Выражения для вихря и функции тока в новых координатах таковы:

$$\omega = \cos(\varphi - \vartheta)\left(\frac{1}{r} w_\vartheta - w\varphi_r\right) - \sin(\varphi - \vartheta)\left(w_r + \frac{w}{r}\varphi_\vartheta\right)$$
$$\psi_r = -w\sin(\varphi - \vartheta), \qquad r^{-1}\psi_\vartheta = w\cos(\varphi - \vartheta)$$

Произвольные постоянные, встречающиеся при интегрировании уравнений, записанных в полярных координатах, будем обозначать w_0, p_0, φ_0.

4.1. Рассмотрим решения при $l = 1$. Оптимальная система порождается семью операторами

$$X_1,\ X_2,\ X_3^3,\ X_5,\ X_1 + X_2,\ X_2 + X_5,\ X_3^3 + \alpha X_5 \tag{4.1}$$

Запишем уравнения (1.1) в полярных координатах. Если их скомбинировать между собой с учетом тригонометрических тождеств, то можно прийти к следующей системе:

$$\begin{gathered}\frac{w^2}{r}\varphi_\vartheta + w\sin(\varphi - \vartheta) = p_r, \qquad w^2\varphi_r + w\cos(\varphi - \vartheta) = -\frac{1}{r} p_\vartheta \\ \cos(\varphi - \vartheta)\left(w_r + \frac{w}{r}\varphi_\vartheta\right) - \sin(\varphi - \vartheta)\left(w\varphi_r - \frac{1}{r} w_\vartheta\right) = 0\end{gathered} \tag{4.2}$$

В этих же переменных операторы $X_3{}^3$ и X_5 примут вид

$$X_3{}^3 = r\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial w} + 2p\frac{\partial}{\partial p}, \qquad X_5 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

4.1.1. Подгруппа с оператором X_1 инвариантных решений не дает, так как не выполнено необходимое условие существования таких решений.

4.1.2. Подгруппа с оператором X_2 дает решения, зависящие лишь от y. После интегрирования уравнений (1.1) получаем

$$\begin{aligned} u &= u_0 + y,\ v = v_0,\ p = p_0 - {}^1\!/_2\, y^2 - u_0 y, \ \text{если}\ v_0 \neq 0 \\ u &= -f'(y),\ v = 0,\ p = f(y), \quad \text{если}\ v_0 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

В первом случае вихрь $\omega = 1$, а линии тока представляют семейство парабол; во втором случае $\omega = -f''$, а линии тока — прямые, параллельные оси x.

4.1.3. Для подгруппы с оператором $X_3{}^3$ решение отыскиваем в виде $w = r\,W(\vartheta)$, $\varphi = \Phi(\vartheta)$, $p = r^2 P(\vartheta)$. После подстановки в (4.2) получаем уравнения

$$\begin{gathered} W^2\Phi' + W\sin(\Phi - \vartheta) = 2P, \quad W\cos(\Phi - \vartheta) = -P' \\ \cos(\Phi - \vartheta)\, W(1 + \Phi') + \sin(\Phi - \vartheta)\, W' = 0 \end{gathered}$$

При интегрировании этой системы следует различать два случая в зависимости от того, равна ли нулю Φ'.

Пусть $\Phi' = 0$, тогда решение имеет вид

$$\begin{gathered} w = w_0 r \sin(\vartheta - \varphi_0),\ \varphi = \varphi_0 \\ p = -\frac{w_0}{2} r^2 \sin^2(\vartheta - \varphi_0) \end{gathered}$$

Можно показать, что $\omega = w_0$. Семейство линий тока этого решения — параллельные прямые, наклоненные под углом φ_0 к оси x_0. Так как направление осей координат не фиксировалось, то можно выбрать ось x по направлению вектора скорости, т. е. положить $\varphi_0 = 0$. Модуль вектора скорости пропорционален y.

Второй случай, когда $\Phi' \neq 0$, приводит к решению, которое можно записать в параметрическом виде

$$\begin{gathered} w = r\sqrt{\frac{2p_0}{z+1}}, \qquad \varphi = \vartheta + \arcsin\left(w_0 \frac{z+2}{\sqrt{z+1}}\right) \\ p = r^2\left(p_0 + w_0 \frac{z+2}{z+1}\sqrt{\frac{p_0}{2}}\right) \\ \vartheta = \varphi_0 + \frac{1}{2}\arcsin\frac{(1 - 2w_0{}^2)(z+1) - 2w_0{}^2}{(z+1)\sqrt{1 - 4w_0{}^2}} \end{gathered} \tag{4.4}$$

Для вихря и функции тока имеем

$$\omega = -\frac{\sqrt{2p_0}}{w_0}, \quad \psi = \psi_0 - \frac{w_0}{2}\sqrt{2p_0}\, r^2 \frac{z+2}{z+1} = -\psi_0 + ar^2 + br^2 \sin(2\vartheta - 2\varphi_0)$$

$$a = \frac{1}{2w_0}\sqrt{\frac{p_0}{2}}, \quad b = \sqrt{\frac{p_0}{2}}\sqrt{\frac{1}{4w_0} - 1}$$

Выбором направления осей координат можно добиться того, чтобы константа φ_0 обратилась в нуль. Тогда линии тока задаются формулой

$$a(x^2 + y^2) - 2bxy + \text{const} = 0$$

т. е. представляют семейство эллипсов в повернутой на $45°$ системе координат.

4.1.4. Подгруппа с оператором X_5 дает решение вида $w = W(r)$, $\varphi = \vartheta + \Phi(r)$, $p = P(r)$. После подстановки в (4.2) приходим к системе

$$\frac{1}{r} W^2 + W \sin\Phi = P', \qquad W^2\Phi' + W\cos\Phi = 0$$

$$\cos\Phi\left(W' + \frac{1}{r} W\right) - \sin\Phi W\Phi' = 0 \tag{4.5}$$

Из последнего уравнения имеем первый интеграл $rW\cos\Phi = w_0$. После этого выписывается общее решение

$$w = \frac{w_0}{r}\sqrt{1 + \left(\varphi_0 - \frac{r^2}{2w_0}\right)^2}, \qquad \varphi = \vartheta + \operatorname{arctg}\left(\varphi_0 - \frac{r^2}{2w_0}\right)$$

$$p = p_0 - \frac{r^2}{8} - (1 + \varphi_0^2)\frac{w_0^2}{2r^2}$$

Линии тока $\vartheta = \varphi_0 \ln - {}^1/_4\, r^2 / w_0 + \text{const}$ представляют собой семейство спиральных линий с источником ($w_0 > 0$) или стоком ($w_0 < 0$) в начале координат. Причем при $w_0\varphi_0 < 0$ угол ϑ вдоль линии тока изменяется монотонно, а при $w_0\varphi_0 > 0$ монотонность нарушается. Прямым вычислением можно убедиться, что для этого течения вихрь остается постоянным и равным единице. Аналогичные решения были найдены ранее в метеорологии [4].

4.1.5. Для подгруппы с оператором $X_1 + X_2$ решение отыскивается в виде $u = U(y)$, $v = V(y)$, $p = x + P(y)$. После подстановки в уравнения (1.1) и интегрирования получаем

$$u = u_0 + \frac{v_0 - 1}{v_0} y, \qquad v = v_0$$

$$p = p_0 + x + u_0 y - \frac{v_0 - 1}{2v_0} y^2, \qquad \omega = \frac{v_0 - 1}{2v_0}$$

Вихрь отличен от нуля, если $v_0 \neq 1$. Линии тока представляют собой параболы с осью, параллельной оси x. Заметим, что в этих формулах $v_0 \neq 0$, так как в противном случае система (1.1) оказывается противоречивой.

4.1.6. Для подгруппы с оператором $X_1 + X_5$ решение имеет вид $w = W(r)$, $\varphi = \vartheta + \Phi(r)$, $p = \vartheta + P(r)$.

Искомые функции определяются из системы (4.5), в которой правую часть второго уравнения следует заменить на $-1/r$. Интегрирование получающихся уравнений дает решение

$$w = \frac{w_0}{r}\sqrt{1 + \left(\varphi_0 - \frac{w_0+1}{2w_0^2}r^2\right)^2}$$

$$\varphi = \vartheta + \operatorname{arctg}\left(\varphi_0 - \frac{w_0+1}{2w_0^2}r^2\right)$$

$$p = p_0 + \vartheta - \left(1 - \frac{1}{w_0^2}\right)\frac{r^2}{8} - (1+\varphi_0^2)\frac{w_0^2}{2r^2} - \varphi_0 \ln r$$

Решение аналогично полученному в п. 4.1.4; вихрь $w = 1 + 1 / w_0$ и отличен от нуля всюду.

4.1.7. Последняя подгруппа с оператором $X_3^3 + \alpha X_5$ порождает решение вида $w = rW(\xi)$, $\varphi = \vartheta + \Phi(\xi)$, $p = r^2 P(\xi)$, где $\xi = re^{-\vartheta}$.

4.2. Переходим к нахождению решений в случае $l = 0$. Уравнения (1.1) в полярных координатах имеют вид

$$\frac{w^2}{r}\varphi_\vartheta = p_r, \qquad w^2\varphi_r = -\frac{1}{r}p_\vartheta \tag{4.6}$$

$$\cos(\varphi - \vartheta)\left(w_r + \frac{w}{r}\varphi_\vartheta\right) - \sin(\varphi - \vartheta)\left(w\varphi_r - \frac{1}{r}w_\vartheta\right) = 0$$

Иногда последнее уравнение будем писать в несколько ином виде, заменяя производные от φ их выражениями из первых двух уравнений. Заметим, что операторы X_3^4 и X_6 в полярных координатах имеют более простой вид

$$X_3^4 = r\frac{\partial}{\partial r}, \qquad X_6 = w\frac{\partial}{\partial w} + 2p\frac{\partial}{\partial p}$$

Оптимальная система однопараметрических подгрупп порождается одиннадцатью операторами, которые удобно разбить на два класса

$$1)\ X_2,\ X_3^4,\ X_5,\ X_3^4 + X_5$$

$$2)\ X_1 + X_2,\ X_1 + X_3^4,\ X_2 + X_6,\ X_1 + X_5$$

$$X_1 + X_3^4 + X_5,\ X_3^4 + X_6,\ X_5 + X_6$$

Можно проверить прямым вычислением, что операторы первого класса дают решения, описывающие лишь безвихревые течения, поэтому в силу сказанного выше ограничимся только операторами второго класса.

4.2.1. Подгруппа с оператором $X_1 + X_2$ дает тривиальное решение $u = u_0 - y / v_0$, $v = v_0$, $p = p_0$. Линии тока — параболы с осью, параллельной оси x. Постоянная v_0 отлична от нуля, так как в противном случае система (1.1) противоречива.

4.2.2. Для подгруппы с оператором $X_1 + X_3^4$ решение отыскивается в виде $w = W(\vartheta)$, $\varphi = \Phi(\vartheta)$, $p = \ln r + P(\vartheta)$. После подстановки в (4.6) получаем

$$W^2\Phi' = 1, \quad \cos(\Phi - \vartheta)\,W\Phi' + \sin(\Phi - \vartheta)\,W' = 0, \quad P = p_0$$

Из первого уравнения будем определять W через Φ, а второе уравнение после введения новой функции $F = \Phi - \vartheta$ и замены W через F примет вид $F'' = 2(1 + F')^2 \operatorname{ctg} F$. Порядок уравнения понижается на единицу, если обозначить $F' = z(F)$. Получающееся после понижения порядка уравнение интегрируется и дает зависимость F от z

$$w_0 \sin^2 F = (z+1)\exp\left(\frac{1}{z+1}\right)$$

Будем рассматривать z как параметр, тогда нахождение решения сводится к взятию одной квадратуры, а само решение может быть записано в параметрическом виде

$$w = \sqrt{t}, \qquad \varphi = \vartheta + F(t), \qquad p = p_0 + \ln r$$

$$F(t) = \arcsin\left(\frac{e^{t/2}}{\sqrt{w_0 t}}\right), \qquad \vartheta = \varphi_0 - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{w_0 t e^{-t} - 1}}, \qquad \left(t = \frac{1}{z+1}\right)$$

Вихрь $\omega = -\sqrt{w_0} e^{-t/2}/r$ и всюду отличен от нуля. Линии тока представляют собой семейство спиральных линий; решение существует лишь при $w_0 > e$.

4.2.3. Подгруппа $X_2 + X_6$ порождает решение вида $u = e^x U(y)$, $v = e^x V(y)$, $p = e^{2x} P(y)$. Уравнения (1.1) после подстановки в них этих выражений дают

$$VV'' - V'^2 = 2p_0, \qquad P = p_0 \tag{4.7}$$

Если $p_0 = 0$, то решение имеет вид $u = -u_0 v_0 e^{x+v_0 y}$, $v = u_0 e^{x+v_0 y}$, $p = 0$, а линии тока — прямые $x + v_0 y = \text{const}$.

Если же $p_0 \neq 0$, то второе уравнение (4.7) после однократного интегрирования дает

$$V'^2 = AV^2 - B \tag{4.8}$$

где A, B — произвольные постоянные. Далее следует различать несколько случаев в зависимости от знаков A и B.

1°. $A = v_0^2$, $B / v_0^2 = -p_0^2$. В этом случае решение имеет вид

$$u = -v_0 p_0 e^x \operatorname{ch}(v_0 y + u_0)$$

$$v = p_0 e^x \operatorname{sh}(v_0 y + u_0), \qquad p = -{}^1/_2\, v_0^2 p_0^2 e^{2x}$$

Если $p_0 < 0$ и $v_0 > 0$, то линии тока приближаются к прямой $y = y_0 = -u_0 / v_0$; если же $p_0 > 0$ и $v_0 < 0$, то линии тока удаляются от прямой $y = y_0$. Другие случаи неравенств дают аналогичную картину течения, но направление вектора скорости изменяется на обратное.

2°. $A = v_0^2$, $B / v_0^2 = p_0^2$. Интегрирование уравнения (4.8) дает решение

$$u = -v_0 p_0 e^x \operatorname{sh}(v_0 y + u_0)$$

$$v = p_0 e^x \operatorname{ch}(v_0 y + u_0), \qquad p = {}^1/_2\, v_0^2 p_0^2 e^{2x}$$

Линии тока имеют вертикальную касательную на прямой $y_0 = -u_0/v_0$ и напоминают течение типа гребня.

3°. $A = -v_0^2$, $B / v_0^2 = p_0^2$. После интегрирования (4.8) получим

$$u = -v_0 p_0 e^x \cos(v_0 y + u_0)$$

$$v = p_0 e^x \sin(v_0 y + u_0), \qquad p = -{}^1/_2\, v_0^2 p_0^2 e^{2x}$$

Решение по y периодично; течение разбивается на полосы шириной π/v_0, в каждой из которых вектор скорости монотонно изменяет направление на противоположное, если двигаться вдоль линии тока от одного края полосы к другому. Течение напоминает «контактный разрыв», известный для уравнений сжимаемой жидкости.

Величина вихря дается формулой $\omega = p_0 (v_0^2 - 1) e^x \sin (v_0 y + u_0)$. Если $|v_0| \neq 1$, то вихрь отличен от нуля. Для первых двух случаев он отличен от нуля при любых значениях постоянных.

4.2.4. Для подгруппы с оператором $X_1 + X_5$ решение ищется в виде $w = W(r)$, $\varphi = \vartheta + \Phi(r)$, $p = \vartheta + P(r)$. После подстановки в (4.6) и интегрирования получаем следующее решение:

$$w = \frac{w_0}{r}\sqrt{1 + \left(\varphi_0 - \frac{r^2}{2w_0^2}\right)^2}, \qquad \varphi = \vartheta + \operatorname{arctg}\left(\varphi_0 - \frac{r^2}{2w_0^2}\right)$$

$$p = p_0 + \vartheta + \frac{1}{8w_0} r^2 - (1 + \varphi_0^2)\frac{w_0^2}{2r^2} - \varphi_0 \ln r$$

Постоянная w_0 предполагается отличной от нуля, в противном случае система уравнений оказывается противоречивой; вихрь $\omega = 1 / w_0$. Решение аналогично найденному в п. 4.1.4.

4.2.5. Решение, порождаемое подгруппой с оператором $X_1 + X_3^4 + X_5$, можно представить в виде $w = W(\xi)$, $\varphi = \vartheta + \Phi(\xi)$, $p = \vartheta + P(\xi)$, где новая независимая переменная $\xi = re^{-\vartheta}$.

4.2.6. Для подгруппы с оператором $X_3^4 + X_6$ вид решения задается формулами $w = rW(\vartheta)$, $\varphi = \Phi(\vartheta)$, $p = r^2 P(\vartheta)$, в которых искомые функции определяются из уравнений

$$P = p_0, \quad W^2 \Phi' = 2p_0, \quad \cos(\Phi - \vartheta)(W^2 + 2p_0) + \sin(\Phi - \vartheta) WW' = 0$$

Если $p_0 = 0$, то решением этой системы будет $w w_0 r \sin(\vartheta - \varphi_0)$, $\varphi = \varphi_0$, $p = 0$, т. е. в повернутой на угол φ_0 системе координат получается течение типа Куэтта.

Если $p_0 \neq 0$, то решение можно записать в параметрическом виде

$$w = r\sqrt{\frac{2p_0}{z+1}}, \qquad \varphi = \vartheta + \arcsin\left(w_0 \frac{z+2}{\sqrt{z+1}}\right)$$

$$p = p_0 r^2, \qquad \vartheta = \varphi_0 + \frac{1}{2}\arcsin\frac{(1 - 2w_0^2)(z+1) - 2w_0^2}{(z+1)\sqrt{1 - 4w_0^2}}$$

Это решение совпадает с (4.4), отличаясь от него лишь выражением для давления.

4.2.7. И последняя подгруппа с оператором $X_5 + X_6$ порождает решение $w = e^{\vartheta} W(r)$, $\varphi = \vartheta + \Phi(r)$, $p = e^{2\vartheta} P(r)$.

Поступила 27 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Бучнев А. А. Группа Ли, допускаемая уравнениями несжимаемой жидкости. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 7. Новосибирск, 1971.
2. Müller E. A., Matschat K. Über das Anffinden von Ähnlichkeitslösungen partieller Differentialgleichungssysteme unter Benutzung von Transformationsgruppen, mit Anwendungen auf Probleme der Strömungsphysik. Miszellaneen der Angew. Mech. zum. 60. Geburtstag am. 13. Oktober, 1960.
3. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962.
4. Катков В. Л. Точные решения уравнения прогноза геопотенциала. Изв. АН СССР. Сер. физ. атмосферы и океана, 1966, 11.