Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 533.6.011

К ОБЩЕЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ, БЛИЗКИХ К АВТОМОДЕЛЬНЫМ

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

Рассматривается система уравнений в вариациях, которой подчиняются нестационарные течения совершенного газа, мало отличающиеся от автомодельных. Записываются общие выражения для массы, энергии и импульса вещества внутри возмущенной области и в них выделяются не зависящие от времени слагаемые. Этим слагаемым соответствуют первые интегралы уравнений в вариациях, имеющие чрезвычайно простой вид. Выбор произвольных постоянных производится таким образом, что автоматически удовлетворяются граничные условия на фронте сильной ударной волны.

1. Предположим, что нестационарное движение совершенного газа вызвано взрывом или расширением поршня. Пусть уравнение, задающее положение $r_2\ (t,\ \varphi,\ \vartheta)$ ударной волны, которая распространяется по первоначально холодному покоящемуся газу, при больших временах t может быть представлено как

$$r_2 = (bt)^n\ (1 + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)} R_2 + \ldots) \tag{1.1}$$

Здесь b — размерная константа; ε, n и m — некоторые положительные числа, причем $\varepsilon \ll 1$; параметр ν принимает значения 1—3 в зависимости от размерности задачи; величина R_2 может быть как постоянной, так и функцией угловых переменных φ, ϑ. Обозначим через v_n и v_τ нормальную и касательную к поверхности сильного разрыва компоненты вектора скорости, ρ — плотность, p — давление, $\varkappa$ — отношение удельных теплоемкостей, N — скорость перемещения ударной волны. Если состояние газа непосредственно перед ее фронтом пометить цифрой 1, а позади него — цифрой 2, то условия Ренкина — Гюгонио примут вид

$$v_{n2} = \frac{2}{\varkappa+1} N, \qquad v_{\tau 2} = 0, \qquad \rho_2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\rho_1, \qquad p_2 = \frac{2}{\varkappa+1}\rho_1 N^2 \tag{1.2}$$

2. Будем считать вначале, что $R_2 = \text{const} = 1$. Тогда решение задачи о движении газа позади ударной волны (1.1) можно искать в виде рядов по убывающим степеням t с коэффициентами, являющимися функциями переменной $\lambda = r\ /\ (bt)^n$. Вектор скорости будет иметь отличной от нуля только радиальную составляющую v_r, поэтому

$$\begin{gathered} v_r = \frac{2n}{\varkappa+1} b^n t^{n-1} [f(\lambda) + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)} f_m(\lambda) + \ldots] \\ \rho = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\rho_1 [g(\lambda) + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)} g_m(\lambda) + \ldots] \\ p = \frac{2n^2}{\varkappa+1}\rho_1 b^{2n} t^{2(n-1)} [h(\lambda) + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)} h_m(\lambda) + \ldots] \end{gathered} \tag{2.1}$$

Функция f, g и h первого приближения задают характеристики автомодельных течений, общий подход к изучению которых был указан Л. И. Седовым [1]. Определяющая их система обыкновенных дифференциальных уравнений содержится в книге [2]. Подставив разложения (2.1) в уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{\rho v_r}{r} = 0 \tag{2.2}$$

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r\frac{\partial p}{\partial r} + \varkappa p\left[\frac{\partial v_r}{\partial r} + (\nu - 1)\frac{v_r}{r}\right] = 0$$

выводим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f_m, g_m и h_m второго приближения. Именно

$$g\frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{dg_m}{d\lambda} + \left(\frac{dg}{d\lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda}g\right)f_m + \\ + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{\nu-1}{\lambda}f - \frac{m(\varkappa+1)}{n(\nu+2)}\right]g_m = 0$$

$$g\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{df_m}{d\lambda} + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{\varkappa+1}{2n}\left(n - 1 - \frac{2m}{\nu+2}\right)\right]gf_m + \\ + \left[\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{df}{d\lambda} + \frac{(n-1)(\varkappa+1)}{2n}f\right]g_m = 0$$

$$\varkappa h\frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{dh}{d\lambda} + \frac{(\nu-1)\varkappa}{\lambda}h\right]f_m + \\ + \left[\varkappa\frac{df}{d\lambda} + \frac{(\nu-1)\varkappa}{\lambda}f + \frac{\varkappa+1}{n}\left(n - 1 - \frac{m}{\nu+2}\right)\right]h_m = 0 \tag{2.3}$$

Начальные значения этих функций устанавливаются при помощи условий (1.2): при $\lambda = 1$

$$f_m = \frac{1}{n}\left(4n - 3 - \frac{2m}{\nu+2}\right) + \frac{2(\nu-1)\varkappa}{\varkappa+1}$$

$$g_m = \frac{6(n-1)}{n(\varkappa-1)} + \frac{2(\nu-1)}{\varkappa+1} \tag{2.4}$$

$$h_m = \frac{2}{n}\left[\frac{(3n-2)\varkappa - 2n + 1}{\varkappa - 1} - \frac{2m}{\nu+2}\right] + \frac{2(\nu-1)\varkappa}{\varkappa+1}$$

Используя тот факт, что энтропия в каждой частице не изменяется после прохождения по ней ударной волны, М. Л. Лидов получил [3] конечный интеграл уравнений (2.3). Его естественное обобщение принадлежит В. П. Коробейникову [4], изучавшему высшие приближения в методе малых возмущений. Укажем прием, который при некоторых значениях m позволяет написать другие интегралы рассматриваемых уравнений, соответствующие законам сохранения массы, энергии и импульса газа в области возмущенного движения.

При переходе к переменной λ соотношение (1.1), задающее положение ударного фронта, принимает вид

$$\lambda_2 = 1 + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)}R_2 + \ldots \tag{2.5}$$

Подсчитаем массу $M(\lambda_2, \lambda)$ газа, заключенного между движущимися поверхностями $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = \mathrm{const}$. Первую из них обозначим через Σ_2, вторую — через Σ_λ. Имеем

$$M(\lambda_2, \lambda) = k_\nu \int_r^{r_2} \rho r^{\nu-1}\, dr, \qquad k_\nu = \begin{cases} 2, & \nu = 1 \\ 2\pi, & \nu = 2 \\ 4\pi, & \nu = 3 \end{cases}$$

Используя разложения (2.1), преобразуем написанное выражение следующим образом:

$$M(\lambda_2, \lambda) = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} k_\nu \rho_1 b^{\nu n} t^{\nu n}\left[\int_\lambda^1 g\lambda^{\nu-1}\, d\lambda + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)}\left(1 + \int_\lambda^1 g_m \lambda^{\nu-1}\, d\lambda\right) + \ldots\right] \quad (2.6)$$

Пусть $\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_\lambda$, тогда в силу условий Ренкина — Гюгонио полная производная по времени от массы газа будет

$$\frac{dM(\lambda_2, \lambda)}{dt} = \oint_\Sigma \rho (N_\sigma - v_n)\, d\sigma = k_\nu [\rho_1 N r_2^{\nu-1} - \rho (v_\lambda - v_r) r^{\nu-1}]$$

Здесь N_σ — скорость перемещения элемента $d\sigma$ по нормали к себе, v_λ — скорость расширения внутренней поверхности Σ_λ. Для всех ее точек, очевидно, $N_\sigma = -v_\lambda$. Далее имеем

$$\frac{dM(\lambda_2, \lambda)}{dt} = nk_\nu \rho_1 b^{\nu n} t^{\nu n-1}\left\{1 - \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\lambda^\nu g + \frac{2}{\varkappa-1}\lambda^{\nu-1} fg + \right.$$
$$\left. + \varepsilon t^{-2m/(\nu+2)}\left[\nu - \frac{2m}{n(\nu+2)} - \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\lambda^\nu g_m + \frac{2}{\varkappa-1}\lambda^{\nu-1}(gf_m + fg_m)\right] + \ldots\right\} \quad (2.7)$$

Продифференцируем формулу (2.6) и приравняем полученное соотношение для $dM(\lambda_2, \lambda)/dt$ к стоящему в правой части формулы (2.7). Пропорциональные $t^{\nu n-1}$ главные члены дают

$$\frac{\nu(\varkappa+1)}{2}\int_\lambda^1 \lambda^{\nu-1} g\, d\lambda = \frac{\varkappa-1}{2} + \lambda^{\nu-1}\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right) g$$

В основном автомодельном течении это равенство определяет массу газа в объеме, ограниченном фронтом ударной волны и любой поверхностью $\lambda = \mathrm{const}$. Рассматривая члены порядка ε и полагая

$$m = {}^1/_2\, \nu(\nu + 2)\, n$$

имеем аналогично для функций-вариаций

$$\lambda g_m - \frac{2}{\varkappa+1}(gf_m + fg_m) = 0 \quad (2.8)$$

Интегральные члены здесь отсутствуют, так как при выбранном значении показателя степени m второе слагаемое в выражении (2.6) для $M(\lambda_2, \lambda)$ получается не зависящим от времени. Нетрудно проверить, что равенство (2.8) автоматически удовлетворяет граничным условиям (2.4) на поверхности сильного разрыва. Можно ввести в это равенство произвольную постоянную c_M и придать ему стандартный вид первого интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), заменив нуль в его правой части на $c_M\,\lambda^{1-\nu}$

Вычислим энергию $E\,(\lambda_2,\lambda)$ рассматриваемой массы газа. Очевидно

$$E\,(\lambda_2,\lambda)=k_\nu\int\limits_r^{r_2}\left(\frac{\rho v_r^2}{2}+\frac{p}{\varkappa-1}\right)r^{\nu-1}\,dr$$

Подставляя сюда разложения (2.1), находим

$$E\,(\lambda_2,\lambda)=\frac{2n^2}{\varkappa^2-1}k_\nu\rho_1 b^{(\nu+2)n}t^{(\nu+2)n-2}\left\{\int\limits_\lambda^1(f^2g+h)\,\lambda^{\nu-1}\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon t^{-2m/(\nu+2)}\left[2+\int\limits_\lambda^1(2fgf_m+f^2g_m+h_m)\,\lambda^{\nu-1}\,d\lambda\right]+\ldots\right\}\qquad(2.9)$$

С другой стороны, полная производная по времени от энергии $E\,(\lambda_2,\lambda)$ определяется как

$$\frac{dE\,(\lambda_2,\lambda)}{dt}=\oint\limits_\Sigma\left[(N_\sigma-v_n)\left(\frac{\rho v_r^2}{2}+\frac{\varkappa p}{\varkappa-1}\right)-pN_\sigma\right]d\sigma=$$

$$=-k_\nu\left[(v_\lambda-v_r)\left(\frac{\rho v_r^2}{2}+\frac{\varkappa p}{\varkappa-1}\right)-pv_\lambda\right]r^{\nu-1}$$

откуда немедленно следует

$$\frac{dE\,(\lambda_2,\lambda)}{dt}=-\frac{2n^3}{\varkappa^2-1}k_\nu\rho_1 b^{(\nu+2)n}t^{(\nu+2)n-3}\left\{\lambda^\nu(f^2g+h)-\right.$$

$$-\frac{2}{\varkappa+1}\lambda^{\nu-1}f(f^2g+\varkappa h)+\varepsilon t^{-2m/(\nu+2)}\left[\lambda^\nu(2fgf_m+f^2g_m+h_m)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{\varkappa+1}\lambda^{\nu-1}((3f^2g+\varkappa h)f_m+f^3g_m+\varkappa fh_m)\right]+\ldots\right\}$$

Сопоставление полученного выражения с равенством, которое является результатом дифференцирования формулы (2.9), дает для функций первого приближения

$$\frac{1}{2n}(\varkappa+1)\,[(\nu+2)\,n-2]\int\limits_\lambda^1(f^2g+h)\,\lambda^{\nu-1}\,d\lambda=$$

$$=\lambda^{\nu-1}\left[(f^2g+h)\left(f-\frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)+(\varkappa-1)\,fh\right]$$

Это соотношение позволяет находить энергию газа в любой области исходного автомодельного течения, расположенной между ударной волной и поверхностью $\lambda=\mathrm{const}$. Исключение представляет лишь случай с $n=2\,/\,(\nu+2)$, когда оно сводится к установленному Л. И. Седовым [5, 6] конечному интегралу в задаче о сильном взрыве. Пусть теперь показатель степени

$$m={}^1/_2(\nu+2)\,[(\nu+2)\,n-2]$$

в силу чего пропорциональный ε член в формуле (2.9) обращается в постоянную величину. Никакого вклада в производную $dE\,(\lambda_2,\lambda)\,/\,dt$ он не дает, поэтому для функций-вариаций имеем интеграл

$$\lambda(2fgf_m + f^2g_m + h_m) - \frac{2}{\varkappa+1}[(3f^2g + \varkappa h)f_m + f^3g_m + \varkappa fh_m] = 0 \quad (2.10)$$

автоматически удовлетворяющий условиям (2.4) на фронте сильной ударной волны. Нетрудно проверить, что соотношение (2.10) продолжает быть следствием системы уравнений (2.3) при замене нуля в его правой части на $c_E\,\lambda^{1-\nu}$, где константа c_E может выбираться произвольно.

3. Перейдем к отысканию интеграла для функций f_m, g_m и h_m, связанного с законом сохранения импульса в области возмущенного течения. Поскольку импульс представляет собой вектор, величину R_2 из разложений (1.1) и (2.5) для ударного фронта уже нельзя считать не зависящей от углов φ и ϑ; в противном случае общее количество движения газа обратится в нуль. Исключением служат только плоские волны, асимметрия которых может иметь место и при $R_2 = \mathrm{const}$.

Ориентируем ось z декартовой системы координат вдоль вектора количества движения. Пусть V означает объем газа, ограниченный введенными выше расширяющимися поверхностями Σ_2 и Σ_λ. Вклад в полный импульс $I(\lambda_2, \lambda)$ дает интеграл, содержащий одну v_z-составляющую скорости частиц, поэтому

$$I(\lambda_2, \lambda) = \int\limits_V \rho v_z\,dV \quad (3.1)$$

а в силу условий Ренкина — Гюгонио его производная по времени будет

$$\frac{dI(\lambda_2, \lambda)}{dt} = \oint\limits_{\Sigma_\lambda} [\rho v_z(N_\sigma - v_n) - pn_z]\,d\sigma \quad (3.2)$$

Здесь n_z — проекция единичной нормали на ось z. Формулы (3.1) и (3.2) можно применять к решению задач с любым числом измерений пространства, однако дальнейшее исследование одно-, дву- и трехмерных течений удобнее проводить по отдельности.

Для плоских волн параметр $\nu = 1$, $v_z = v_r$, а величина $R_2 = \mathrm{const} = 1$. В этом простейшем случае

$$I(\lambda_2, \lambda) = \frac{2n}{\varkappa-1}\rho_1 b^{2n} t^{2n-1}\left\{\int\limits_\lambda^1 fg\,d\lambda + \varepsilon t^{-2/3m}\left[1 + \int\limits_\lambda^1 (gf_m + fg_m)\,d\lambda\right] + \ldots\right\} \quad (3.3)$$

Подставляя разложения (2.1) в равенство (3.2), находим

$$\frac{dI(\lambda_2, \lambda)}{dt} = -\frac{2n^2}{\varkappa-1}\rho_1 b^{2n} t^{2(n-1)}\left\{\lambda fg - \frac{2}{\varkappa+1}\left(f^2g + \frac{\varkappa-1}{2}h\right) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon t^{-2/3m}\left[\lambda(gf_m + fg_m) - \frac{2}{\varkappa+1}\left(2fgf_m + f^2g_m + \frac{\varkappa-1}{2}h_m\right)\right] + \ldots\right\}.$$

Сопоставим последнее соотношение с выражением для производной $dI(\lambda_2, \lambda)\,/\,dt$, которую можно определить при помощи дифференцирования формулы (3.3). Для главных членов имеем уравнение

$$\frac{(\varkappa+1)(2n-1)}{2n}\int\limits_\lambda^1 fg\,d\lambda = fg\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right) + \frac{\varkappa-1}{2}h$$

которое позволяет вычислить импульс плоской автомодельной волны. В исключительном случае $n = ^1/_2$, отсюда следует конечный интеграл, приведенный в монографии Л. И. Седова [1]; он связывает между собой функции первого приближения. Чтобы член порядка ε в формуле (3.3) принял постоянное значение, нужно положить

$$m = {}^3/_2\,(2n - 1)$$

При этом условии функции-вариации образуют интеграл, согласующийся с начальными данными (2.4) для сильного ударного фронта

$$\lambda\,(gf_m + fg_m) - \frac{1}{\varkappa+1}\,[4fgf_m + 2f^2g_m + (\varkappa - 1)\,h_m] = 0 \tag{3.4}$$

Перейдем к изучению волн, в первом приближении обладающих цилиндрической симметрией; они реализуются, когда параметр $\nu = 2$. Общее количество движения газа будет отлично от нуля, если величина R_2 является функцией полярного угла φ, который отсчитывается от направления оси z. Разлагая $R_2\,(\varphi)$ в ряд Фурье, рассмотрим член с k-й гармоникой. Для этого достаточно принять, что $R_2 = \cos\,(k\varphi + \alpha_k)$, где α_k — произвольная постоянная. Вместо (2.1) пишем соответственно

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{2n}{\varkappa+1}\,b^n t^{n-1}\,[f\,(\lambda) + \varepsilon t^{-m/2} f_m\,(\lambda)\cos\,(k\varphi + \alpha_k) + \ldots] \\
v_\varphi &= \frac{2n}{\varkappa+1}\,\varepsilon b^n t^{n-1-m/2}\,u_m\,(\lambda)\sin\,(k\varphi + \alpha_k) + \ldots \\
\rho &= \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\rho_1\,[g\,(\lambda) + \varepsilon t^{-m/2} g_m\,(\lambda)\cos\,(k\varphi + \alpha_k) + \ldots] \\
p &= \frac{2n^2}{\varkappa+1}\,\rho_1 b^{2n} t^{2(n-1)}\,[h\,(\lambda) + \varepsilon t^{-m/2} h_m\,(\lambda)\cos\,(k\varphi + \alpha_k) + \ldots]
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Уравнения Эйлера (2.2) нужно, разумеется, дополнить членами, зависящими от φ и содержащими v_φ-составляющую вектора скорости. Функции f, g и h будут удовлетворять прежней системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Что касается функций второго приближения, то в результате подстановки разложений (3.5) в уравнения Эйлера выводим для их определения следующую систему:

$$\begin{aligned}
&g\,\frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\,\lambda\right)\frac{dg_m}{d\lambda} + \left(\frac{dg}{d\lambda} + \frac{1}{\lambda}\,g\right) f_m + \\
&\quad + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{1}{\lambda}\,f - \frac{m\,(\varkappa+1)}{4n}\right] g_m + \frac{k}{\lambda}\,g u_m = 0 \\
&g\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\,\lambda\right)\frac{df_m}{d\lambda} + \frac{\varkappa-1}{2}\,\frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{\varkappa+1}{2n}\left(n - 1 - \frac{m}{2}\right)\right] gf_m + \\
&\quad + \left[\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\,\lambda\right)\frac{df}{d\lambda} + \frac{(n-1)\,(\varkappa+1)}{2n}\,f\right] g_m = 0 \\
&g\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\,\lambda\right)\frac{du_m}{d\lambda} - \frac{k\,(\varkappa-1)}{2\lambda}\,h_m + \left[\frac{1}{\lambda}\,f + \frac{\varkappa+1}{2n}\left(n - 1 - \frac{m}{2}\right)\right] g u_m = 0 \\
&\varkappa h\,\frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\,\lambda\right)\frac{dh_m}{d\lambda} + \left(\frac{dh}{d\lambda} + \frac{\varkappa}{\lambda}\,h\right) f_m + \\
&\quad + \left[\varkappa\,\frac{df}{d\lambda} + \frac{\varkappa}{\lambda}\,f + \frac{\varkappa+1}{n}\left(n - 1 - \frac{m}{4}\right)\right] h_m + \frac{k\varkappa}{\lambda}\,h u_m = 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Начальные значения функций f_m, g_m и h_m не изменяются, они задаются формулами (2.4) с $\nu = 2$. На основании второго из условий (1.2) находим, что в точке $\lambda = 1$ функция $u_m = 1$.

Схема дальнейших рассуждений вполне аналогична той, которая применялась выше при изучении плоских волн. При выбранном направлении отсчета угла φ компонента скорости $v_z = v_r \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi$. В силу симметрии исходного автомодельного течения полный импульс газа пропорционален малому параметру ε, причем отличный от нуля вклад в интеграл (3.1) дают только члены с первой гармоникой. Поэтому возьмем сразу $k = 1$ и $\alpha_k = 0$. Тогда

$$I(\lambda_2, \lambda) = \frac{2n\pi}{\varkappa - 1} \varepsilon\rho_1 b^{3n} t^{3n-1-m/2} \left[1 + \int\limits_\lambda^1 (gf_m + fg_m - gu_m)\, \lambda\, d\lambda\right] + \ldots$$

Это выражение не меняется со временем, если показатель степени

$$m = 2(3n - 1)$$

Производную от импульса найдем при помощи формулы (3.2). В результате

$$\frac{dI(\lambda_2, \lambda)}{dt} = -\frac{2n^2\pi}{\varkappa - 1} \varepsilon\rho_1 b^{3n} t^{3n-2-m/2} \Big[\lambda^2 (gf_m + fg_m - gu_m) - $$
$$ - \frac{2}{\varkappa + 1} \lambda \left(2fgf_m + f^2 g_m - fgu_m + \frac{\varkappa - 1}{2} h_m\right)\Big] + \ldots$$

Поскольку в рассматриваемом приближении общее количество движения газа постоянно, то

$$\lambda (gf_m + fg_m - gu_m) - \frac{1}{\varkappa + 1} [4fgf_m + 2f^2 g_m - 2fgu_m + (\varkappa - 1) h_m] = 0 \quad (3.7)$$

Написанное соотношение является первым интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.6), оно удовлетворяет также граничным условиям на поверхности сильного разрыва.

Рассмотрим в заключение перенос импульса в волнах, форма которых мало отличается от сферической. В этом случае параметр $\nu = 3$. В пространственных течениях положение ударной волны задается двумя углами φ и ϑ сферической системы координат. Отсчет угла ϑ будем производить от направления оси z. Предположим, что величина R_2 из разложений (1.1) и (2.5) может быть представлена в виде ряда по шаровым функциям Y_l^k, которые, согласно определению, удовлетворяют следующему уравнению в частных производных [7]:

$$\frac{\partial^2 Y_l^k}{\partial\varphi^2} + \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\partial Y_l^k}{\partial\vartheta}\right) + l(l+1)\sin^2\vartheta Y_l^k = 0 \quad (3.8)$$

Его решения состоят из произведений $\cos k\varphi$ либо $\sin k\varphi$ на присоединенные функции Лежандра $P_l^k(\cos\vartheta)$. Взяв в ряду из шаровых функций член с произвольным номером, пишем $R_2 = Y_l^k(\varphi, \vartheta)$. Соответствующие этому возмущению ударного фронта параметры газа будем искать в форме

$$
\begin{aligned}
v_r &= \frac{2n}{\varkappa+1} b^n t^{n-1} \left[f(\lambda) + \varepsilon t^{-3/5m} f_m(\lambda) Y_l^k(\varphi, \vartheta) + \ldots\right] \\
v_\varphi &= -\frac{2n}{\varkappa+1} \varepsilon b^n t^{n-1-3/5m} u_m(\lambda) \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial Y_l^k}{\partial\varphi} + \ldots \\
v_\vartheta &= -\frac{2n}{\varkappa+1} \varepsilon b^n t^{n-1-2/5m} w_m(\lambda) \frac{\partial Y_l^k}{\partial\vartheta} + \ldots \qquad (3.9) \\
\rho &= \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \rho_1 \left[g(\lambda) + \varepsilon t^{-2/5m} g_m(\lambda) Y_l^k(\varphi, \vartheta) + \ldots\right] \\
p &= \frac{2n^2}{\varkappa+1} \rho_1 b^{2n} t^{2(n-1)} \left[h(\lambda) + \varepsilon t^{-2/5m} h_m(\lambda) Y_l^k(\varphi, \vartheta) + \ldots\right]
\end{aligned}
$$

Добавим теперь в уравнения Эйлера (2.2) члены, содержащие производные по φ, ϑ и компоненты v_φ, v_ϑ вектора скорости, с тем, чтобы получить полную систему уравнений газовой динамики в сферических координатах. Такое преобразование не влияет на определение функций f, g и h, задающих симметричное автомодельное течение. При подстановке разложений (3.9) в уравнения Эйлера прежде всего видно, что функции u_m и w_m служат решениями одного и того же обыкновенного дифференциального уравнения. Начальные значения функций f_m, g_m и h_m предписываются, по-прежнему, формулами (2.4) с $\nu = 3$. Что касается начальных значений функций u_m и w_m, то они получаются из условия сохранения касательной составляющей скорости при переходе через фронт ударной волны. Это условие распадается на два независимых соотношения, из которых следует, что $u_m = 1$ и $w_m = 1$ в точке $\lambda = 1$. Как ясно теперь, $u_m = w_m$ во всем диапазоне изменения λ. Остальные четыре уравнения для функций f_m, g_m, h_m и w_m таковы:

$$
\begin{aligned}
& g\frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{dg_m}{d\lambda} + \left(\frac{dg}{d\lambda} + \frac{2}{\lambda}g\right)f_m + \\
& \quad + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{2}{\lambda}f - \frac{m(\varkappa+1)}{5n}\right]g_m + \frac{l}{\lambda}gw_m = 0 \\
& g\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{df_m}{d\lambda} + \frac{\varkappa-1}{2}\frac{dh_m}{d\lambda} + \left[\frac{df}{d\lambda} + \frac{\varkappa+1}{2n}\left(n - 1 - \frac{2m}{5}\right)\right]gf_m + \\
& \quad + \left[\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{df}{d\lambda} + \frac{(n-1)(\varkappa+1)}{2n}f\right]g_m = 0 \qquad (3.10) \\
& g\left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{dw_m}{d\lambda} - \frac{\varkappa-1}{2\lambda}h_m + \left[\frac{1}{\lambda}f + \frac{\varkappa+1}{2n}\left(n - 1 - \frac{2m}{5}\right)\right]gw_m = 0 \\
& \varkappa h\frac{df_m}{d\lambda} + \left(f - \frac{\varkappa+1}{2}\lambda\right)\frac{dh_m}{d\lambda} + \left(\frac{dh}{d\lambda} + \frac{2\varkappa}{\lambda}h\right)f_m + \left[\varkappa\frac{df}{d\lambda} + \frac{2\varkappa}{\lambda}f + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\varkappa+1}{n}\left(n - 1 - \frac{m}{5}\right)\right]h_m + \frac{l\varkappa}{\lambda}hw_m = 0
\end{aligned}
$$

Приступим к подсчету полного импульса газа. Поскольку исходное автомодельное течение обладает сферической симметрией, он должен быть порядка ε, причем отличный от нуля вклад в интеграл (3.1) обусловлен членами, не зависящими от долготы φ. Отсюда $k = 0$, а уравнение (3.8) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра $P_l(\cos\vartheta)$.

Если учесть ортогональность полиномов Лежандра и равенство $P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$, то ясно, что при вычислении общего количества движения газа можно положить $l = 1$ и $Y_1{}^0 = \cos\vartheta$. Подставляя в интеграл (3.1) соотношение $v_z = v_r\cos\vartheta - v_\vartheta\sin\vartheta$, имеем

$$I(\lambda_2, \lambda) = \frac{8n\pi}{3(\varkappa-1)}\varepsilon\rho_1 b^{4n} t^{4n-1-2m/5}\left[1 + \int\limits_\lambda^1 (gf_m + fg_m - 2gw_m)\lambda^2\,d\lambda\right] + \ldots$$

Это выражение сохраняется постоянным при

$$m = {}^5/_2(4n - 1)$$

Как и прежде, производную от импульса найдем при помощи формулы (3.2), откуда

$$\frac{dI(\lambda_2,\lambda)}{dt} = -\frac{8n^2\pi}{3(\varkappa-1)}\varepsilon\rho_1 b^{4n} t^{4n-2-2m/5}\left[\lambda^3(gf_m + fg_m - 2gw_m) - \right.$$
$$\left.-\frac{2}{\varkappa+1}\lambda^2\left(2fgf_m + f^2g_m - 2fgw_m + \frac{\varkappa-1}{2}h_m\right)\right] + \ldots$$

При выбранном значении m производная $dI(\lambda_2,\lambda)\,/\,dt$ должна обратиться в нуль. Указанное условие приводит к интегралу

$$\lambda(gf_m + fg_m - 2gw_m) - \frac{1}{\varkappa+1}\left[4fgf_m + 2f^2g_m - 4fgw_m + (\varkappa-1)h_m\right] = 0 \tag{3.11}$$

системы уравнений (3.10), который автоматически удовлетворяет соотношениям на фронте ударной волны. Заметим, что формулам (3.4), (3.7) и (3.11) можно придать стандартный вид первых интегралов рассмотренных выше обыкновенных дифференциальных уравнений, заменив нули в их правых частях соответственно величинами c_I, $c_\mathrm{I}\lambda^{-1}$ и $c_\mathrm{I}\lambda^{-2}$, где постоянная c_I произвольна.

4. Интегралы, которые связаны с законами сохранения массы, энергии и импульса в зоне возмущенного движения, применимы к решению многих задач газовой динамики. Приведем два простых примера.

Пусть, во-первых, поршень расширяется со временем по степенному закону в газе, где предварительно произошло выделение конечного количества энергии. Ясно, что ее можно учесть при помощи разложений (2.1) с показателем n, отвечающим закону движения поршня, и параметром $m = {}^1/_2(\nu + 2)[(\nu + 2)n - 2]$.

В качестве второго примера, рассмотрим воздействие импульса на нестационарное течение, возникающее при сильном взрыве. Как показал Л. И. Седов [5,6], в основном автомодельном решении $n = 2/(\nu + 2)$. Что же касается показателя степени m, определяющего функции-вариации, то в этом случае

$$m = {}^1/_2(\nu + 2)[(\nu + 1)n - 1] = {}^1/_2\nu$$

Следует сделать еще одно замечание, касающееся высших приближений в методе возмущений. Если система обыкновенных дифференциальных уравнений для поправочных членов с некоторым номером однородна, то она обладает установленными выше интегралами, которые полностью сохраняют свой вид. Рассуждения легко распространяются и на неоднородные системы, причем независимое вычисление массы, энергии и импульса газа и их производных по времени позволяет автоматически учесть наличие правых частей в дифференциальных уравнениях.

Поступила 31 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
2. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
3. Лидов М. Л. К теории линеаризованных решений около одномерных автомодельных движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 6.
4. Коробейников В. П. Об интегралах уравнений неустановивившихся адиабатических движений газа. Докл. АН СССР, 1955, т. 104, № 4.
5. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
6. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962