

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ УНИПОЛЯРНО ЗАРЯЖЕННЫХ СТРУЙ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

А. Б. Ватажин, В. И. Грабовский

(Москва)

Исследуется распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках применительно к задачам электрогидродинамических течений за срезом источника заряженных частиц («открытые» струи), в каналах и трубопроводах электрогидродинамических устройств («закрытые» струи). Определены основные безразмерные параметры, от которых зависит интенсивность расширения струй. С помощью численного решения двумерных уравнений электрогидродинамики найдены распределения электрических параметров (плотности зарядов, электрического потенциала) в струе и окружающем пространстве.

Пространственные электрогидродинамические течения ранее исследовались в квазиодномерном приближении [1], в линейном приближении [2,3], при равной нулю подвижности заряженных частиц [4] и при произвольной подвижности частиц в случае движения жидкости в канале [5]. Экспериментальное исследование распространения униполярно заряженных струй за срезом источника заряженных частиц было проведено в [6].

В перечисленных работах (кроме [1,6]) изучались течения, когда область гидродинамического потока совпадала с областью, занятой заряженной компонентой. Однако на практике могут реализоваться режимы, при которых зона электрически заряженной жидкости оказывается меньше, чем вся область течения. Это связано с тем, что заряженные частицы поступают в поток с электродов-эмиттеров, занимающих обычно только часть входного сечения канала. В связи с этим приобретают актуальность исследования «электрических струй», под которыми в дальнейшем понимаются зоны внутри гидродинамического потока, характеризующиеся отличным от нуля объемным электрическим зарядом.

В данной работе выясняются основные особенности распространения электрических струй в различных условиях. Существенно, что при анализе таких задач необходимо учитывать неоднородность электрического поля как в области заряженной струи, так и свободном от зарядов гидродинамическом потоке и окружающем пространстве.

1. Во многих приложениях (струи за источником заряженных частиц, движение заряженных жидкостей в трубопроводах, течения в некоторых зонах электрогидродинамических генераторов и движительных установок) при описании электрогидродинамических движений можно не учитывать изменение гидродинамических величин за счет действия электрических сил. В этом случае задача сводится к определению электрогидродинамических параметров — плотности объемного электрического заряда  $q$ , электрического поля  $E$ , электрического потенциала  $\phi$  и плотности электрического тока  $j$  — при заданном поле гидродинамической скорости  $V$ . В предположении постоянной подвижности заряженных частиц  $b$

соответствующая система уравнений имеет следующий вид [6]:

$$\mathbf{j} = q(\mathbf{V} + b\mathbf{E}), \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi q \varepsilon^{-1}, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (1.1)$$

Здесь  $\varepsilon = \operatorname{const}$  — диэлектрическая постоянная.

Система (1.1) эквивалентна следующим двум уравнениям:

$$\Delta \varphi = -4\pi q \varepsilon^{-1} \quad (1.2)$$

$$(\mathbf{V} - b\nabla\varphi) \nabla q + (\operatorname{div} \mathbf{V} + 4\pi b q \varepsilon^{-1}) q = 0 \quad (1.3)$$

Уравнение (1.2) — эллиптического типа, а уравнение (1.3) — гиперболическое по  $q$  (первого порядка), характеристики которого представляют собой траектории движения заряженных частиц. Эти особенности уравнений определяют постановку замыкающих граничных условий в различных конкретных задачах.

Ниже будут рассмотрены два класса задач, моделирующих течения заряженной жидкости в открытом пространстве (открытые струи) и в каналах (закрытые струи).

2. Рассмотрим распространение плоской электрической струи (занимающей область  $G$ ) внутри гидродинамической струи, распространяющейся между бесконечными, «прозрачными» для жидкости и невозмущающими гидродинамическое течение сетками-электродами  $x = 0$ ,  $x = L$  ( $x$  — продольная координата). Размеры  $H$  и  $h$  гидродинамической и электрической струй в начальном сечении ( $x = 0$ ) удовлетворяют неравенству  $h < H$ . Таким образом, исследуемая область представляет собой полосу  $0 \leq x \leq L$ ,  $|y| < \infty$ .

Пусть потенциалы электродов  $x = 0$  и  $x = L$  равны нулю. Тогда при  $|y| \rightarrow \infty$  необходимо использовать асимптотическое условие  $\varphi \rightarrow 0$ . Заметим, что при проведении практических расчетов асимптотическое условие необходимо задавать на линиях  $|y| = A \gg 1$ , достаточно далеко отстоящих от оси струи.

Граница электрической струи в сечении  $x = 0$  фиксируется заданием граничного условия

$$q = q_* = \operatorname{const} \text{ при } |y| \leq h/2, \quad q = 0 \text{ при } |y| > h/2 \quad (1.4)$$

На границе  $\Gamma$  электрической струи (зоны  $G$ ) происходит разрыв заряда  $q$ , равного нулю вне струи и отличного от нуля внутри  $G$ . Это соответствует разрыву вторых производных потенциала. Поэтому необходимо получить решения уравнений внутри и вне зоны  $G$  и сшить решения на границе  $\Gamma$  электрической струи. Так как в данной постановке задачи на границе  $\Gamma$  отсутствует поверхностный заряд, то условиями сшивания служат требования неразрывности потенциала и электрического поля.

Перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$\varphi = v_* H b^{-1} \varphi^0, \quad q = \varepsilon v_* (4\pi b H)^{-1} q^0, \quad \mathbf{V} = v_* \mathbf{V}^0, \quad x = H x^0, \quad y = H y^0 \quad (1.5)$$

В безразмерных переменных система уравнений (1.2), (1.3) в предположении  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  переписывается в виде (верхний индекс ноль у безразмер-

ных величин в дальнейшем будет опускаться)

$$\Delta\varphi = -q \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \left( u - \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q^2 = 0 \quad (1.7)$$

При записи (1.7) также учтено, что поперечная скорость в изучаемых течениях много меньше осевой скорости  $u$ . Распределение скорости  $u$  выбиралось в виде

$$u = \sqrt{\frac{3}{3+x}} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{1+0.3x} \right)^{3/2} \right]^2 \quad (1.8)$$

Такая зависимость учитывает уменьшение скорости в направлении  $x$  и ее убывание до нуля на границе гидродинамической струи

$$y_e = (1 + 0.3x) / 2$$

Система граничных условий в безразмерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{при } x=0, \quad x=l \quad (l=L/H) \\ \varphi &= 0 \quad \text{при } y=\pm A^\circ \quad (A^\circ=A/H) \\ q &= \beta \quad \text{при } x=0, \quad |y| \leq a/2 \\ (a &= h/H, \quad \beta = q_* 4\pi b H (\varepsilon v_*)^{-1}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Задача характеризуется тремя параметрами: геометрическими факторами  $l$ ,  $a$  и величиной  $\beta$ . (Параметр  $A^\circ$  выбирался столь большим, чтобы не влиять на распределения параметров в исследуемой области.)

В дальнейшем будет принято  $l=1$  и изучено расширение электрической струи при  $a < 1$ .

Так как течение симметрично относительно оси  $y=0$ , можно рассматривать задачу только в области  $y \geq 0$ , учитывая условие симметрии  $\partial\varphi/\partial y = 0$  при  $y=0$ .

Решение сформулированной задачи проводилось численно методом последовательных приближений, описанным в [5]. Этот метод заключается в последовательном решении эллиптического и гиперболического уравнений (1.6) и (1.7). При этом уравнение (1.7) анализировалось с использованием метода характеристик.

Характеристиками этого уравнения являются линии

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial\varphi/\partial y}{u - \partial\varphi/\partial x} \quad (1.10)$$

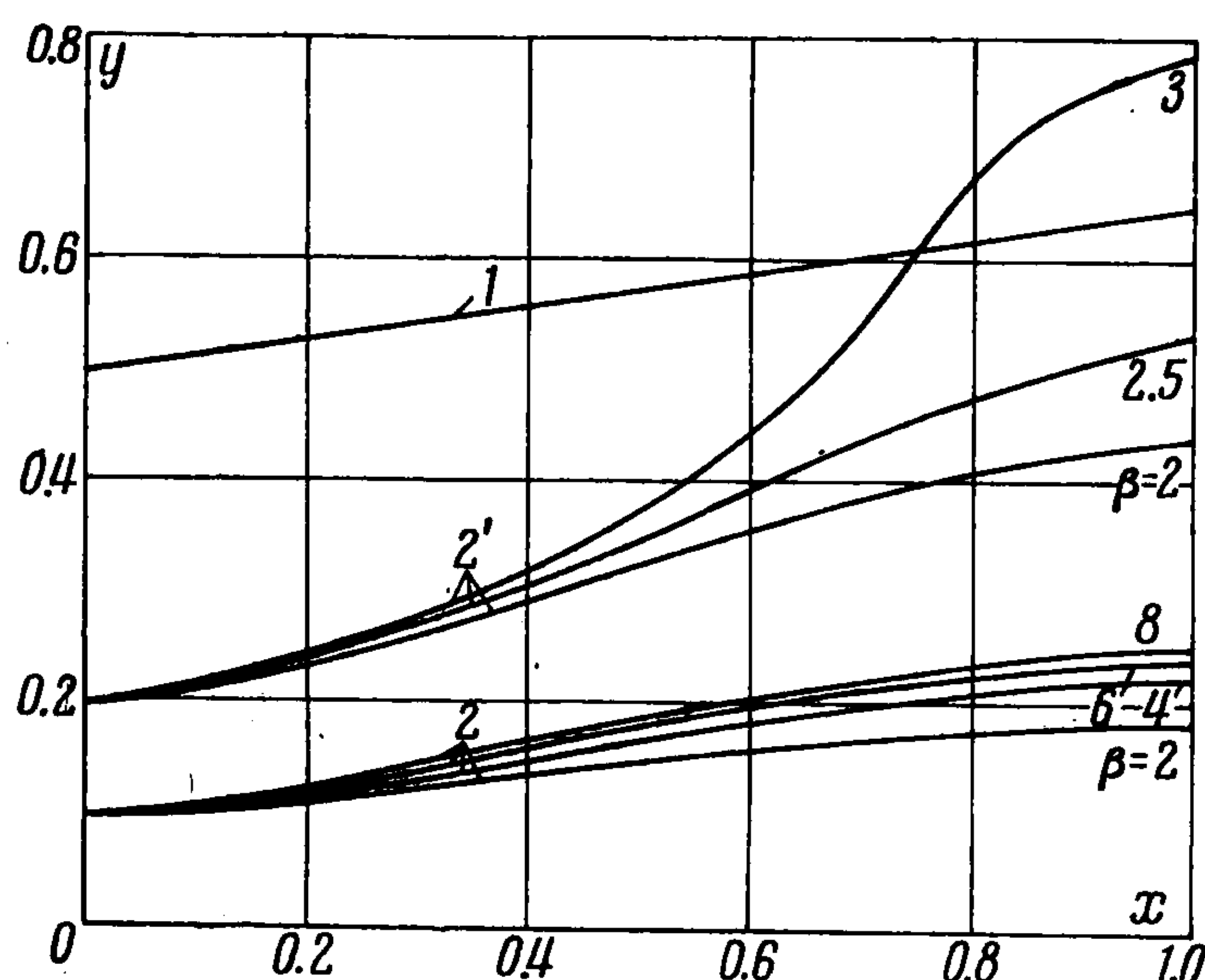
вдоль которых справедливо соотношение

$$dq = -q^2 \frac{dx}{u - \partial\varphi/\partial x} \quad (1.11)$$

На каждом этапе методом прямых характеристик первоначально определялась граница  $\Gamma$  области  $G$ , внутри которой  $q \neq 0$ . Величина  $q$  во внутренних точках найденной области определялась методом обратных характеристик в узловых точках прямоугольной расчетной сетки, используемой при решении эллиптического уравнения на предыдущем этапе.

Итерационный процесс велся до тех пор, пока различие между двумя последующими приближениями не оказывалось меньше четвертой степени величины шага расчетной сетки.

Приведем результаты расчетов. На фиг. 1 изображена верхняя половина области течения  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y < \infty$ . Линия 1 — граница гидродинамической струи, линии 2 и 2' — границы  $\Gamma$  электрических струй при  $a = 0.2$  и  $a = 0.4$  соответственно. Расширение электрической струи возрастает с увеличением параметра  $\beta$ . Физически это связано с тем, что три



Фиг. 1

фактора — уменьшение гидродинамической скорости, увеличение заряда в области течения и рост подвижности заряженных частиц — способствуют более интенсивному расширению струи. При  $\beta = 0$  (когда подвижность  $b = 0$ ) струя вообще не расширяется.

При увеличении  $\beta$  в диапазоне  $\beta > 10$  граница струи деформируется незначительно. Это указывает на существование режима «насыщения», при котором все характеристики (в том числе

и граница  $\Gamma$  электрической струи) перестают зависеть от величины заряда  $q_*$  на эмиттере.

Скорость расширения электрической струи возрастает также с увеличением параметра  $a$ . Так, если  $\beta = 2$ , то струя при  $a = 0.2$  утолщается на 80%, а при  $a = 0.4$  — на 120%. Это объясняется тем, что периферийные области более широких струй находятся в зонах с меньшей скоростью  $u$ , а также тем, что при увеличении  $a$  в области течения возрастают поперечные электрические поля из-за большей величины вынесенного с эмиттера заряда.

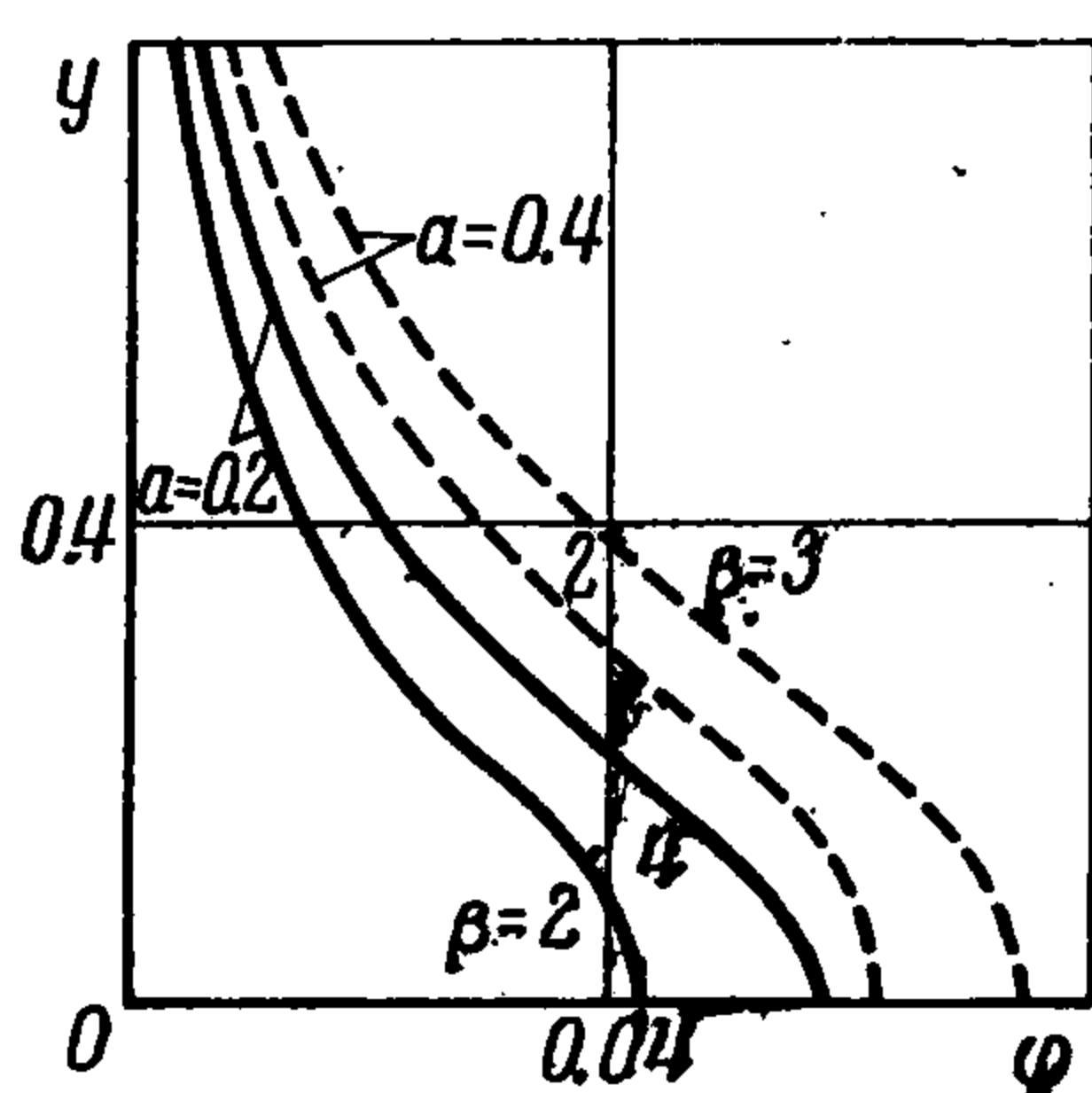
Обратим внимание, что существуют режимы, когда электрическая струя шире гидродинамической, и в этих зонах движение заряженных частиц происходит только под действием электрического поля.

Распределения электрического потенциала в поперечном сечении  $x_0 = 0.4$  при  $a = 0.2$  (сплошные линии) и  $a = 0.4$  (пунктирные линии) для разных значений  $\beta$  изображены на фиг. 2. Максимумы потенциала достигаются на оси струи. Особенность изучаемого течения состоит в том, что электрический потенциал отличен от нуля во всех трех областях: зоне электрической струи  $G$ , области гидродинамического потока вне  $G$  и внешнем пространстве. С увеличением  $a$  и  $\beta$  потенциал на оси струи возрастает.

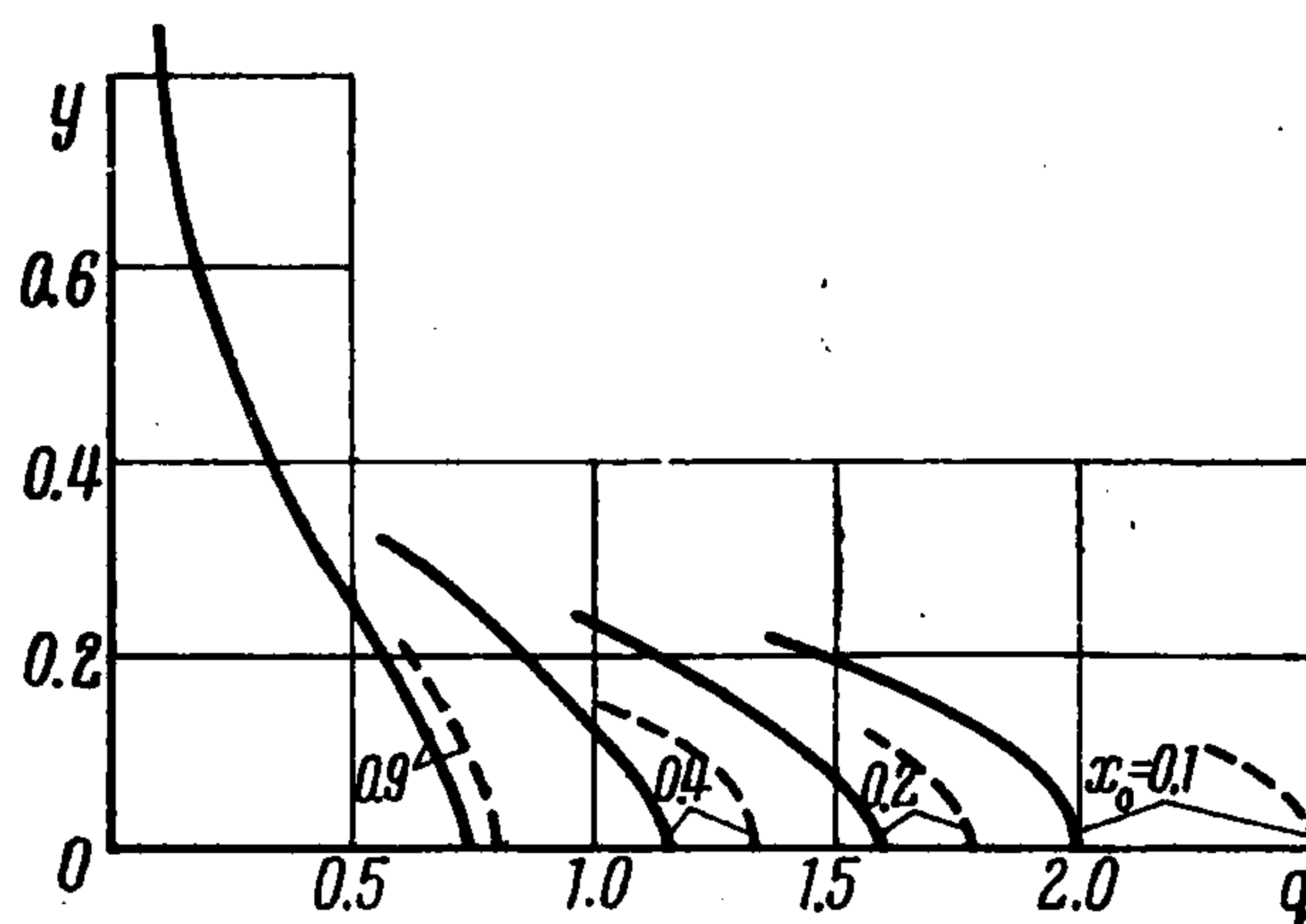
На фиг. 3 представлены эпюры плотности электрического заряда в различных сечениях ( $x_0 = \text{const}$ ) при  $a = 0.2$ ,  $\beta = 4$  (пунктирные линии) и  $a = 0.4$ ,  $\beta = 3$  (сплошные линии). Характерно, что максимум  $q$ , достигаемый на оси струи, с увеличением  $x_0$  уменьшается. С увеличением  $\beta$  максимум заряда увеличивается. Противоположная тенденция наблюдается при увеличении параметра  $a$ , так как возрастающее осевое электрическое поле препятствует выносу зарядов.

Вдоль каждой линии  $y = \text{const}$ , лежащей внутри области струи  $G$ , плотность заряда монотонно убывает по длине струи, а распределение потенциала характеризуется максимумом, несколько смещенным от середины межэлектродного промежутка к электроду-эмиттеру.

3. Изучим особенности распространения закрытой электрической струи. Для этого рассмотрим плоское электрогидродинамическое течение в канале  $0 \leq x < \infty$ ,  $|y| \leq 0.5$  с идеально проводящими стенками, находящимися под одинаковым потенциалом  $\varphi = 0$ . (Здесь характерным размером служит высота канала.) Пусть во входном сечении  $x = 0$  расположена прозрачная для жидкости сетка-электрод, которая электрически связана со стенками и имеет потенциал  $\varphi = 0$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

В практических приложениях площадь эмиттера заряженных частиц обычно оказывается меньше площади входного сечения канала. Для учета этого обстоятельства будем считать, что эмиттером является участок  $x = 0$ ,  $|y| \leq a/2 < 0.5$ , через который в поток вводятся заряженные частицы с постоянной плотностью.

Скорость жидкости предполагается постоянной во всем канале  $u = 1$ .

Распространение такой электрической струи характеризуется «начальным» участком, на котором струя еще не достигла стенок канала и имеет «свободные» границы. На этом участке сохраняется суммарный продольный электрический ток  $J = J_0$ , где  $J_0$  — электрический ток при  $x = 0$  («ток выноса» с эмиттера). Струя достигает стенок канала на некотором расстоянии  $sa$  от начального сечения  $x = 0$  и  $q \neq 0$  во всем сечении канала при  $x \geq sa$  (на «основном» участке) ( $s$  — отношение размерной длины начального участка к соответствующему размеру электрической струи  $h$  во входном сечении).

Электрический ток  $J$  при  $x > sa$  уменьшается, так как плотность тока  $j_y = -q \partial\varphi / \partial y$  на стенке канала отлична от нуля. Наиболее интенсивное уменьшение  $J$  имеет место в начале основного участка. При  $x \gg sa$ , когда поперечные электрические поля из-за малости  $q$  становятся незначительными, величина  $J$  изменяется незначительно.

Математически задача сводится к интегрированию системы уравнений (1.6), (1.7) с граничными условиями

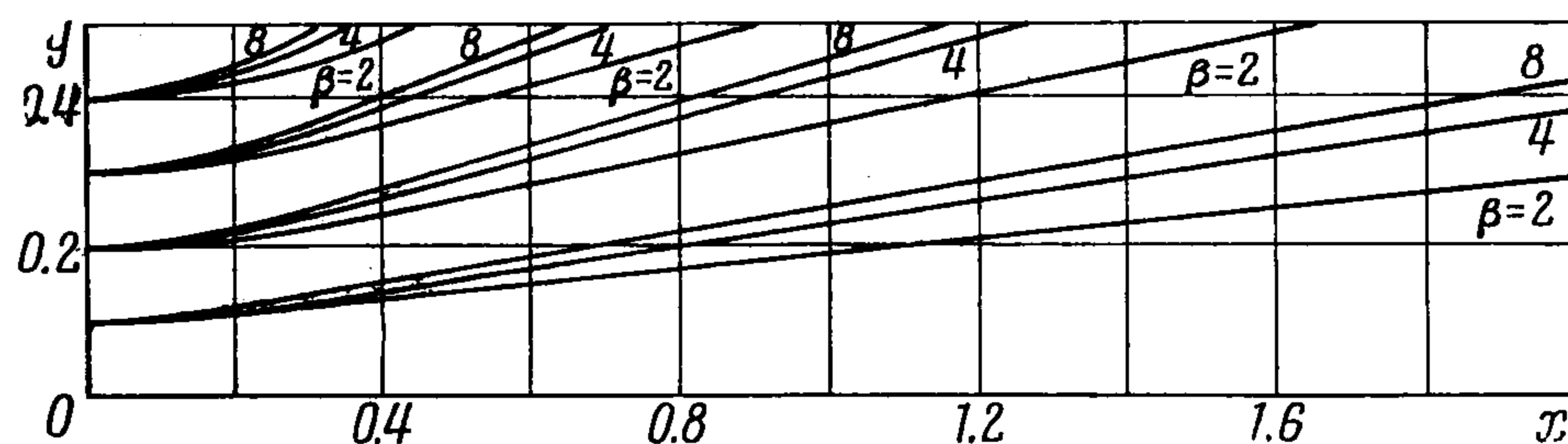
$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{при } y = \pm 0.5, \quad 0 \leq x < \infty \\ \varphi &= 0 \quad \text{при } x = A^\circ, \quad |y| \leq 0.5 \quad \text{при } x = 0, \quad |y| \leq 0.5 \\ q &= \beta \quad \text{при } x = 0, \quad |y| \leq a/2 \quad (\beta = q_* 4\pi b H (\epsilon v_*)^{-1}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Численное решение системы (1.6), (1.7), (3.1) находилось так же, как в п. 2. Сечение  $x = A^\circ$  фиксировалось достаточно далеко вниз по потоку и не влияло на распределение электрических параметров на начальном и основном участках.

Решение задачи зависит от двух безразмерных параметров  $a$  и  $\beta$ , которые варьировались в достаточно широком диапазоне.

Особенности развития электрической струи иллюстрируется графиками на фиг. 4, где показана верхняя граница струи  $\Gamma(x)$  при различных  $a$  и  $\beta$ .

Интенсивность расширения струи возрастает с увеличением  $a$  и  $\beta$ . При  $\beta=0$  (такое течение, как и в п. 2, можно интерпретировать как движе-

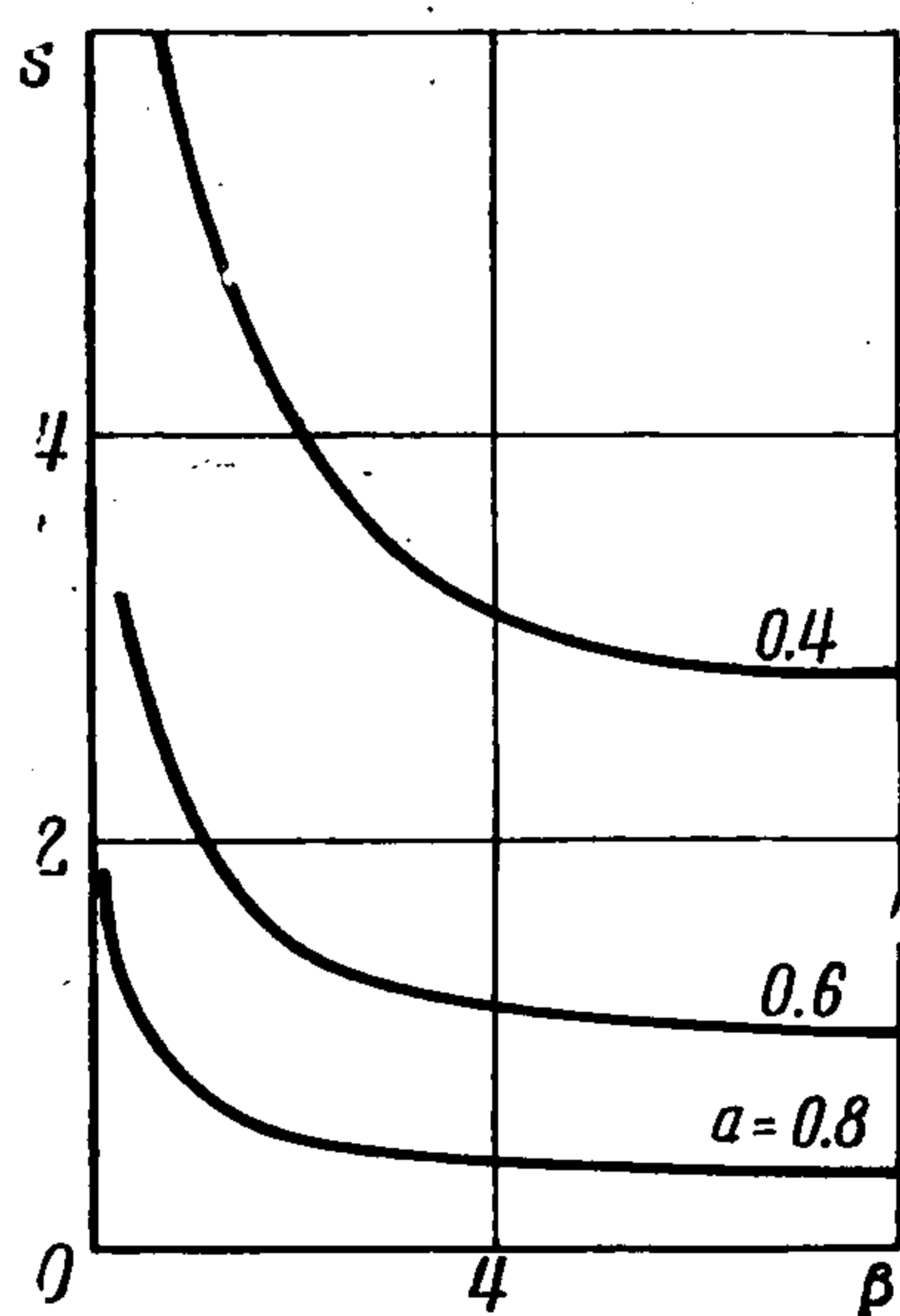


Фиг. 4

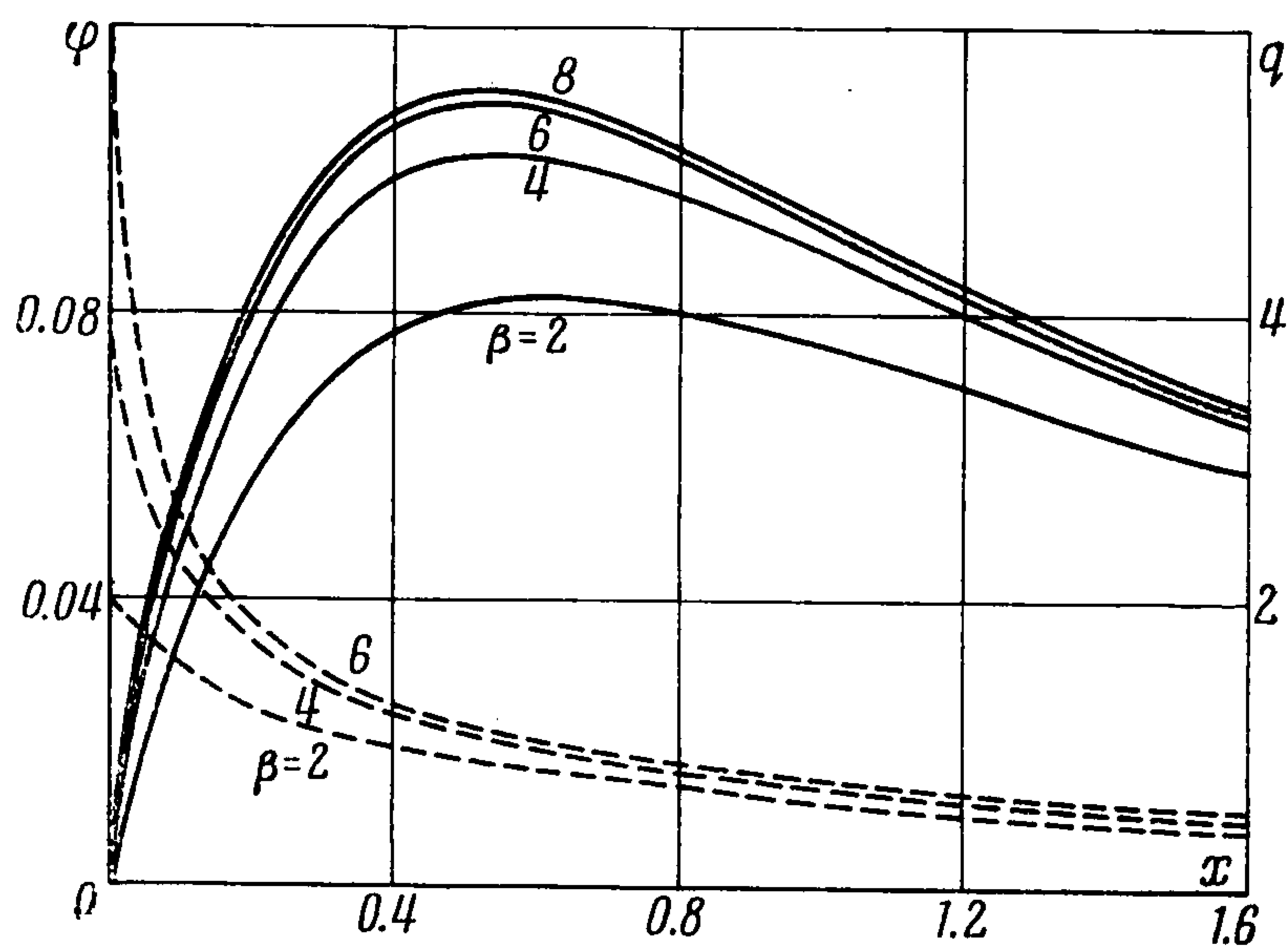
ние заряженных частиц с нулевой подвижностью) электрическая струя вообще не расширяется.

При достаточно больших  $\beta$  ( $\beta > 10$ ) форма струи изменяется незначительно, что свидетельствует о существовании режима насыщения.

При больших  $a$  электрическая струя расширяется более интенсивно. Зависимость длины начального участка струи  $s = s(a, \beta)$  показана на



Фиг. 5



Фиг. 6

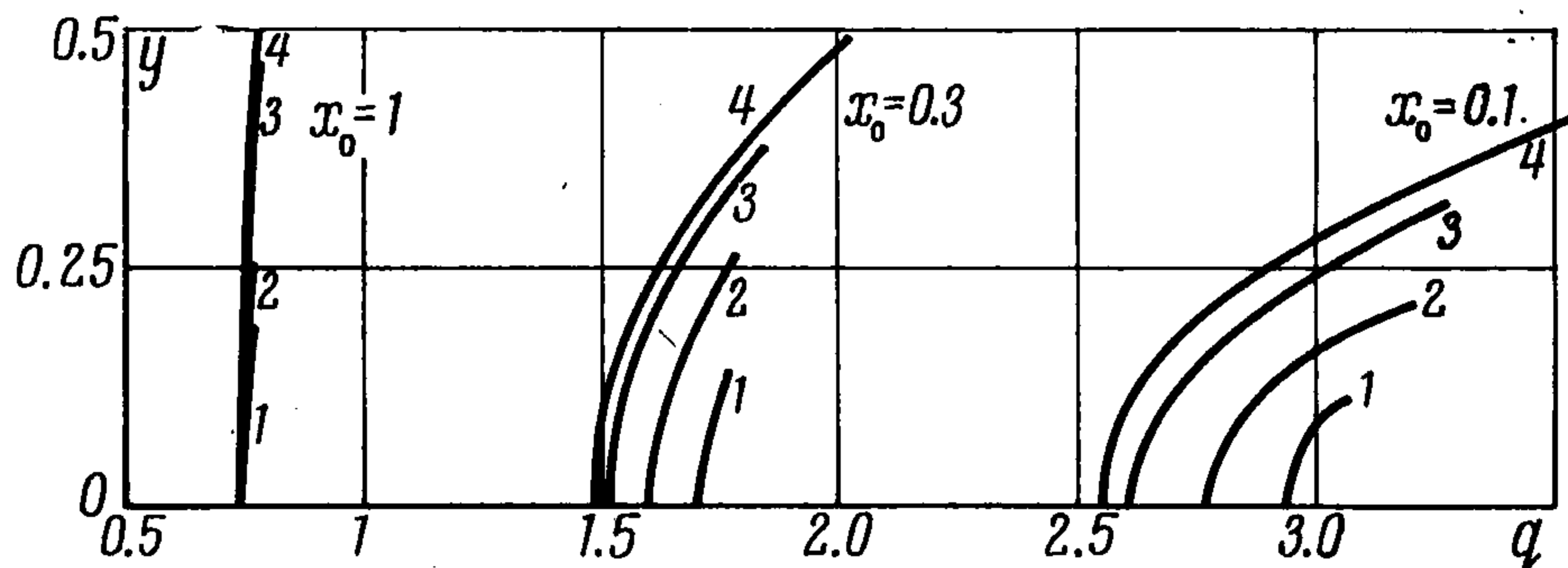
фиг. 5. С ростом параметров  $a$  и  $\beta$  величина  $s$  существенно уменьшается. При этом влияние параметра  $\beta$  на размер начального участка ослабевает с увеличением  $a$ . Это связано с тем, что при  $a \approx 1$  заряженные частицы весьма быстро достигают стенок канала как в силу того, что они находятся вблизи этих стенок, так и вследствие более высокого поперечного градиента потенциала, реализующегося при достаточно больших  $a$ .

На фиг. 6 представлены распределения потенциала (сплошные линии) и плотности электрического заряда (пунктирные линии) вдоль оси канала при разных  $\beta$  и  $a = 0.6$ . Электрический потенциал и заряд возрастают при увеличении  $\beta$ .

Плотность заряда монотонно убывает вдоль оси от своего максимального значения при  $x = 0$ , а потенциал сначала возрастает, достигает максимума, а затем асимптотически убывает до нуля. Интересно, что при всех  $\beta$  максимум в осевом распределении потенциала располагается вблизи сечения  $x = 0.5$ .

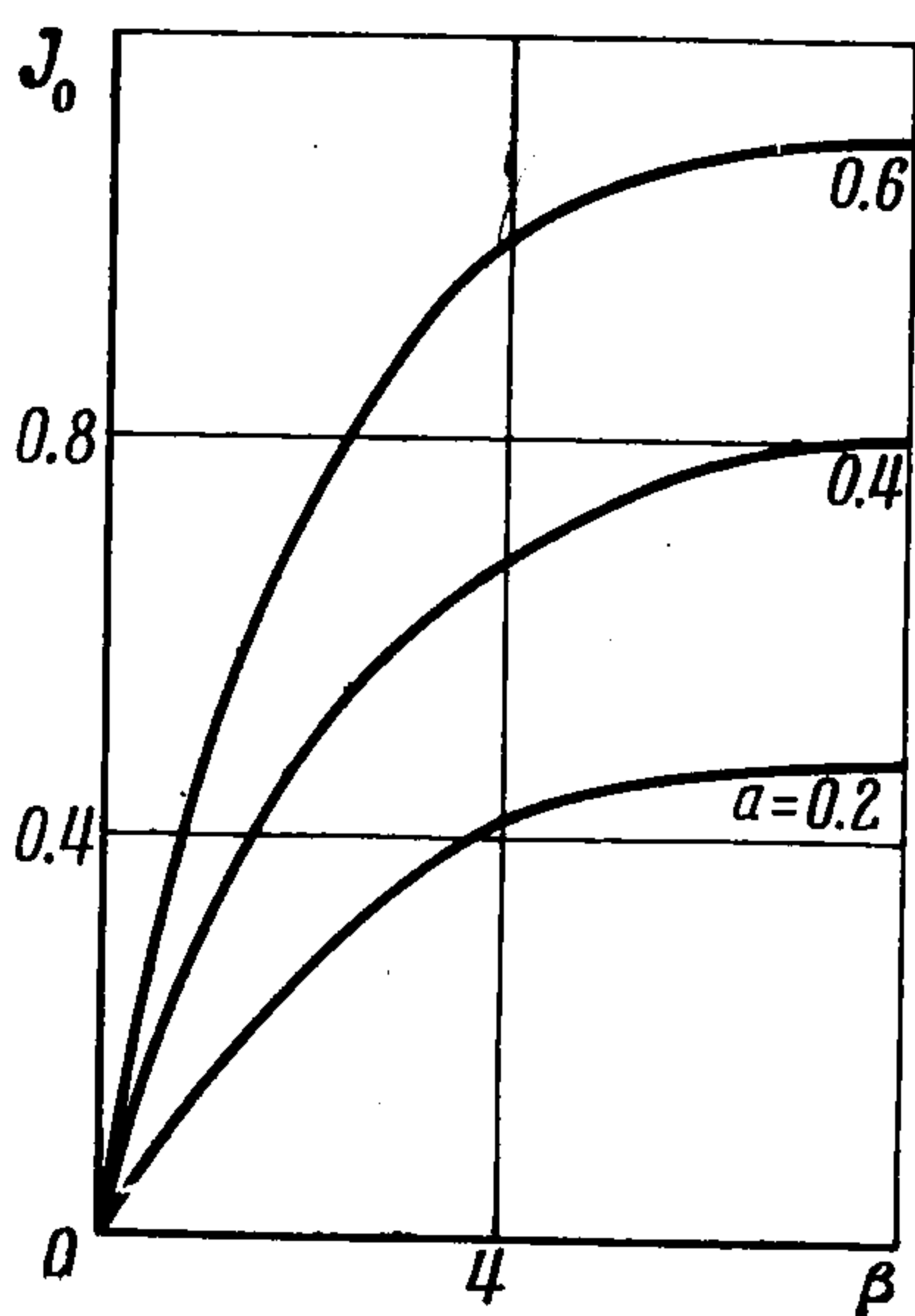
То же самое справедливо и для всех других  $a$ . Увеличение  $a$  ведет к росту потенциала и, как следствие из этого, уменьшению заряда.

Эпюры плотности электрического заряда  $q$  в разных сечениях ( $x_0 = \text{const}$ ) электрических струй при  $\beta=8$  и различных  $a$  показаны на фиг. 7 (кривым 1—4 соответствуют  $a = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ). Величина  $q$  монотонно возрастает от оси струи по

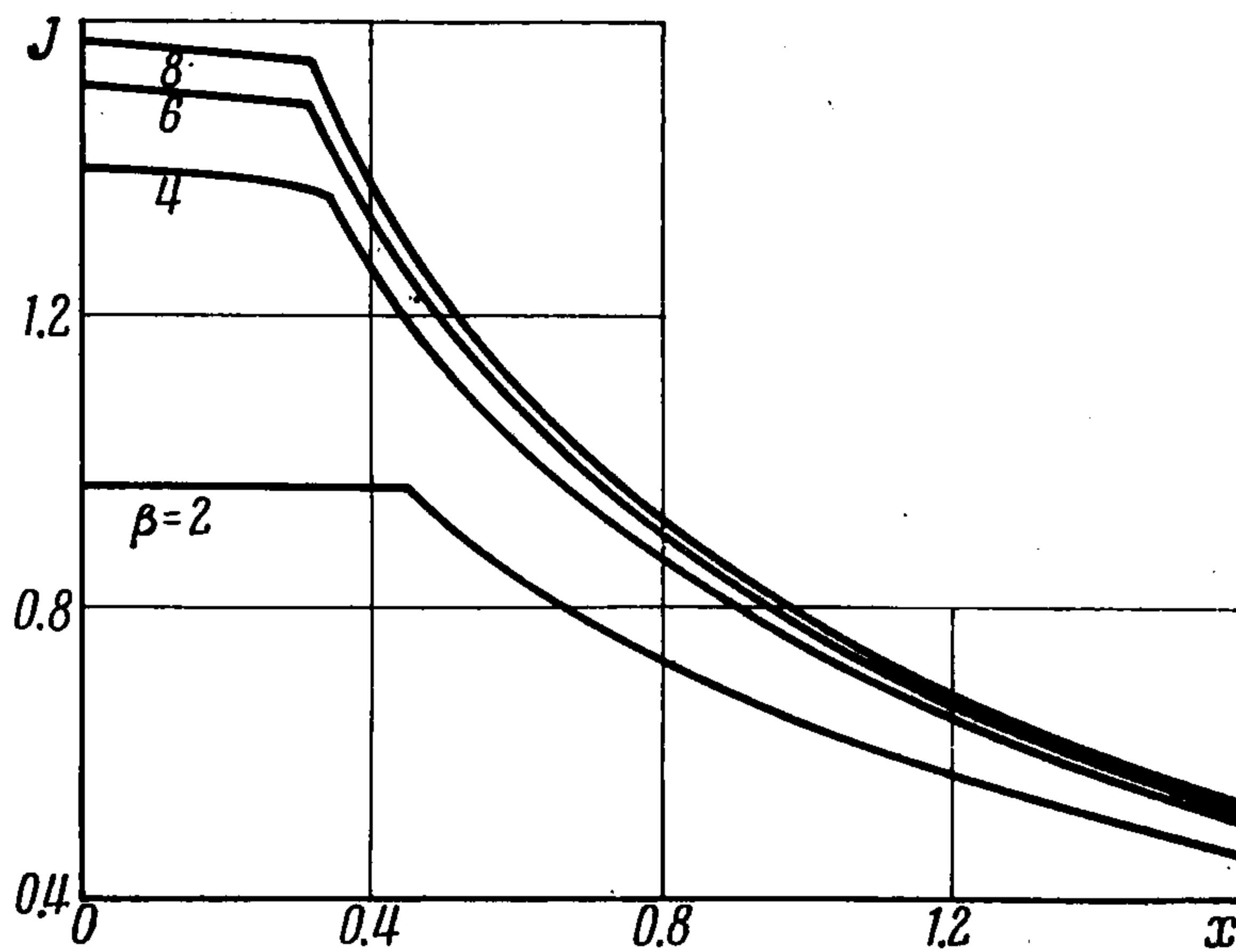


Фиг. 7

направлению, к ее границе (на фиг. 7 изображена только половина канала  $y \geq 0$ ). Наличие минимума на оси струи — характерная особенность закрытых электрических струй. (Напомним, что в открытых струях (п. 2) максимумы находились на оси.) При удалении от начального сечения неоднородность в распределении  $q$  уменьшается. При  $x_0 = 1$  объемный заряд практически не меняется поперек электрической струи. Обратим внимание, что величина  $q$  в этом и последующих сечениях не зависит от  $a$ , хотя толщины электрических струй при этом различны.



Фиг. 8



Фиг. 9

На фиг. 8 построены зависимости тока выноса  $J_0$  от параметров  $a$  и  $\beta$ . С ростом этих величин ток  $J_0$  монотонно увеличивается. Интересная особенность течения заключается в наличии режима насыщения, при котором  $J_0$  перестает зависеть от  $\beta$ , если  $\beta > 10$ .

Изменение по длине канала переносимого электрической струей тока  $J(x)$ , где

$$J(x) = \int_{-0.5}^{0.5} q \left( 1 - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy \quad (3.2)$$

при разных  $\beta$  и  $a = 0.8$  показано на фиг. 9.

Все кривые имеют начальные участки, где ток  $J$  должен сохраняться, и основные, на которых ток убывает до нуля. Как видно из графиков, интенсивное уменьшение тока  $J(x)$  на основном участке при достаточно больших  $\beta$  происходит на длинах порядка высоты канала. При малых  $\beta$  (когда снижается ток  $J_0$ ) относительное уменьшение  $J$  по длине канала замедляется. В пределе  $\beta \rightarrow 0$  ток  $J$  по длине канала остается постоянным.

Критерием точности проведенных расчетов служит выполнение условия  $J = \text{const}$  на начальном участке. Из фиг. 9 следует, что максимальная ошибка в расчете интегральных характеристик не превосходит 3%.

Следует отметить, что течение на основном участке струи может быть изучено при помощи предельного перехода  $a \rightarrow 1$  в исходной задаче. В этом случае эффекты уменьшения тока по длине канала можно выяснить независимо от течения на начальном участке. Такой анализ был проведен в работе [5].

В заключение обратим внимание на следующее обстоятельство.

Как следует из представленных результатов, интенсивность расширения электрической струи и уменьшение переносимого ею тока по длине основного участка в канале существенно зависят от величины параметра  $\beta$ . При малых  $\beta$  струя практически не расширяется, а влияние проводящих, окружающих поток поверхностей (стенок канала) становится незначительным. Это показывает, что когда условия подачи заряженной компоненты далеки от режима насыщения, «управление» электрической струей (изменение ее формы, уменьшение выносимого тока) крайне затруднено. Наоборот, когда реализуется режим насыщения, появляется возможность значительного изменения электрических характеристик струи с помощью введения в поток проводящих поверхностей. Примеры такого управления электрической струей были рассмотрены в [6].

Полученные данные позволяют предсказать, насколько будет эффективным управление электрической струей в каждом конкретном случае.

Заметим также, что вместо параметра  $\beta$  иногда оказывается более удобным задавать величину безразмерного тока выноса в начальном сечении.

Поступила 16 VI 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б о р т н и к о в Ю. С., Р у б а ш о в И. Б. Некоторые вопросы исследования системы уравнений электрогазодинамики. Магнитная гидродинамика, 1968, № 2.
2. В а т а ж и н А. Б. О деформации профиля скорости при электрогидродинамическом течении в плоском канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
3. Г р а б о в с к и й В. И. Электрогидродинамическое течение в плоском канале с осевым электродом-эмиттером. ПМТФ, 1970, № 6.
4. С е м е н о в а И. П., Я к у б е н к о А. Е. Электрогидродинамическое течение идеальной несжимаемой жидкости в плоском и круглом каналах с нулевой подвижностью заряженных частиц. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
5. Г р а б о в с к и й В. И. Некоторые вопросы исследования электрогидродинамических струй за срезом источника заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
6. В а т а ж и н А. Б., Л и х т е р В. А., Ш у л ь г и н В. И. Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.