

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ

В. А. Бучин

(Москва)

Изучается класс точных решений системы уравнений электрогидродинамики, для которых электрический ток направлен по линиям тока гидродинамического течения. В двумерном случае решение выписывается в явном виде. Показано, как с помощью полученных решений можно строить другие точные решения, для которых условие коллинеарности векторов плотности электрического тока и скорости уже не выполнено. Как иллюстрация строится точное решение о течении униполярно заряженной жидкости в канале со стенками-электродами. Показано, что для частного вида вихревого гидродинамического потока решение двумерной системы уравнений можно в некоторых случаях свести к нахождению решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим стационарное течение униполярно заряженной жидкости. Параметр электрогидродинамического взаимодействия предполагается бесконечно малым. Гидродинамический поток идеальной, несжимаемой, однородной жидкости потенциален $V^* = -\text{grad } \Phi^*$. Закон Ома имеет вид $j^* = q^* (V^* + bE^*)$, $b = \text{const}$ — подвижность. Безразмерные величины вводим по формулам

$$\begin{aligned} x = l\xi, y = l\eta, z = l\zeta, \varphi^* = \frac{u_0 l}{b} \varphi, \Phi^* = u_0 l \Phi \\ q^* = \frac{\epsilon_0 u_0}{4\pi b l} q \end{aligned} \quad (1.1)$$

где φ^* — потенциал электрического поля $E^* = -\text{grad } \varphi^*$. Используя потенциальность электрического поля и поля скоростей, вводим суммарный потенциал $\chi = \Phi + \varphi$. Уравнения электрогидродинамики [1] имеют вид

$$\Delta \Phi = 0, \quad \text{div} (q \text{ grad } \chi) = 0, \quad \Delta \chi = -q \quad (1.2)$$

Будем искать решения системы (1.2), для которых векторы плотности тока j и скорости V коллинеарны в каждой точке потока

$$j = aV \quad (1.3)$$

где $a = a(\xi, \eta, \zeta)$ — неизвестная функция, которая должна быть найдена в процессе решения. В процессе решения будет найден также и вид гидродинамического потока, при котором возможно построение решения (1.3).

Переходим к решению поставленной задачи. Из второго уравнения системы (1.2), используя закон Ома и соотношение (1.3), получаем

уравнение для a

$$(\text{grad } a \cdot \text{grad } \Phi) = 0 \quad (1.4)$$

Если ввести две функции тока для гидродинамического течения [2] Ψ_1 и Ψ_2 , то из (1.4) получаем, что a — функция только от Ψ_1 и Ψ_2

$$a = a(\Psi_1, \Psi_2) \quad (1.5)$$

Равенство (1.3) с учетом закона Ома и потенциальности поля скоростей эквивалентно соотношению

$$\text{grad } \chi = a q^{-1} \text{grad } \Phi \quad (1.6)$$

Из (1.5) и (1.6) получаем общий вид связи между χ , q и a , Φ

$$\chi = h(\Phi), \quad q = a(\Psi_1, \Psi_2) / h'(\Phi) \quad (1.7)$$

где $h(\Phi)$ и $a(\Psi_1, \Psi_2)$ — искомые функции своих аргументов.

Подставив выражения для χ и q из (1.7) в (1.2), получаем из первого и третьего уравнений (1.2) уравнения для определения неизвестных функций Φ , $h(\Phi)$ и $a(\Psi_1, \Psi_2)$

$$|\text{grad } \Phi|^2 = -\frac{a(\Psi_1, \Psi_2)}{h'(\Phi) h''(\Phi)}, \quad \Delta \Phi = 0 \quad (1.8)$$

Таким образом, задача о нахождении точных решений системы (1.2) вида (1.3) сведена к задаче для гармонических функций. Всякое точное решение задачи о потенциальном движении несжимаемой идеальной жидкости, для которого модуль скорости можно представить в виде произведения $V = V_1(\Phi) V_2(\Psi_1, \Psi_2)$, порождает точное решение системы уравнений электрогидродинамики (1.2), причем $a(\Psi_1, \Psi_2)$ и $h(\Phi)$ находятся из следующих соотношений:

$$a(\Psi_1, \Psi_2) = -\alpha_0 V_2^2(\Psi_1, \Psi_2), \quad h(\Phi) = -\int_{\Phi_0}^{\Phi} \left[2\alpha_0 \int_{\Phi_0}^{\Phi} V_1^{-2}(\Phi) d\Phi + \alpha_1 \right]^{1/2} d\Phi + \alpha_2$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \Phi_0$ — константы.

2. В двумерном случае задача о нахождении решений системы (1.2) вида (1.3) может быть доведена до конца. В этом случае формулы (1.7) и (1.8) имеют вид

$$\chi = h(\Phi), \quad q = \frac{a(\Psi)}{h'(\Phi)}, \quad |\text{grad } \Phi|^2 = -\frac{a(\Psi)}{h'(\Phi) h''(\Phi)}, \quad \Delta \Phi = 0 \quad (2.1)$$

Здесь Φ и Ψ совпадают с потенциалом и функцией тока потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости, взятыми с обратным знаком, $w = \Phi + i\Psi$ — аналитическая функция от $\tau = \xi + i\eta$.

Переходим к нахождению функций Φ , $h(\Phi)$ и $a(\Psi)$. Функция Φ — гармоническая, следовательно, $\ln |\text{grad } \Phi|^2$ — также гармоническая функция, поэтому

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} \right) \ln |\text{grad } \Phi|^2 = 0 \quad (2.2)$$

Подставляя в (2.2) выражение для $|\text{grad } \Phi|^2$ из (2.1) и учитывая, что Φ и Ψ независимы, получаем уравнения для $a(\Psi)$ и $h(\Phi)$

$$\frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \ln |h'(\Phi) h''(\Phi)| = c, \quad \frac{\partial^2}{\partial \Psi^2} \ln |a(\Psi)| = c, \quad c = \text{const} \quad (2.3)$$

Решая уравнения (2.3), получаем общий вид для $h(\Phi)$ и $a(\Psi)$ в двумерном случае

$$h(\Phi) = - \int_0^\Phi \left[2c_2 \int_0^\Phi \exp(c\Phi^2 + c_1\Phi) d\Phi + c_5 \right]^{1/2} d\Phi + c_6 \quad (2.4)$$

$$a(\Psi) = -c_4 \exp(c\Psi^2 + c_3\Psi)$$

где c, c_1, c_2, \dots, c_6 — константы. Зная $h(\Phi)$ и $a(\Psi)$, находим выражение для $\ln |\text{grad } \Phi|^2$, а следовательно, и связь между w и τ

$$\tau - \tau_1 = \int_0^w \exp \left\{ \frac{1}{2} [cw^2 + (c_1 + ic_3)w + c_2 - c_4 + ic_7] \right\} dw \quad (2.5)$$

где $\tau_1 = \xi_1 + i\eta_1, C_7$ — константы.

Потенциал электрического поля φ и функция тока для вектора плотности электрического тока ψ ($j_\xi = \partial\psi / \partial\eta, j_\eta = -\partial\psi / \partial\xi$) имеют вид

$$\varphi = h(\Phi) - \Phi, \quad \psi = - \int_0^\Psi a(\Psi) d\Psi + \psi_0, \quad \psi_0 = \text{const}$$

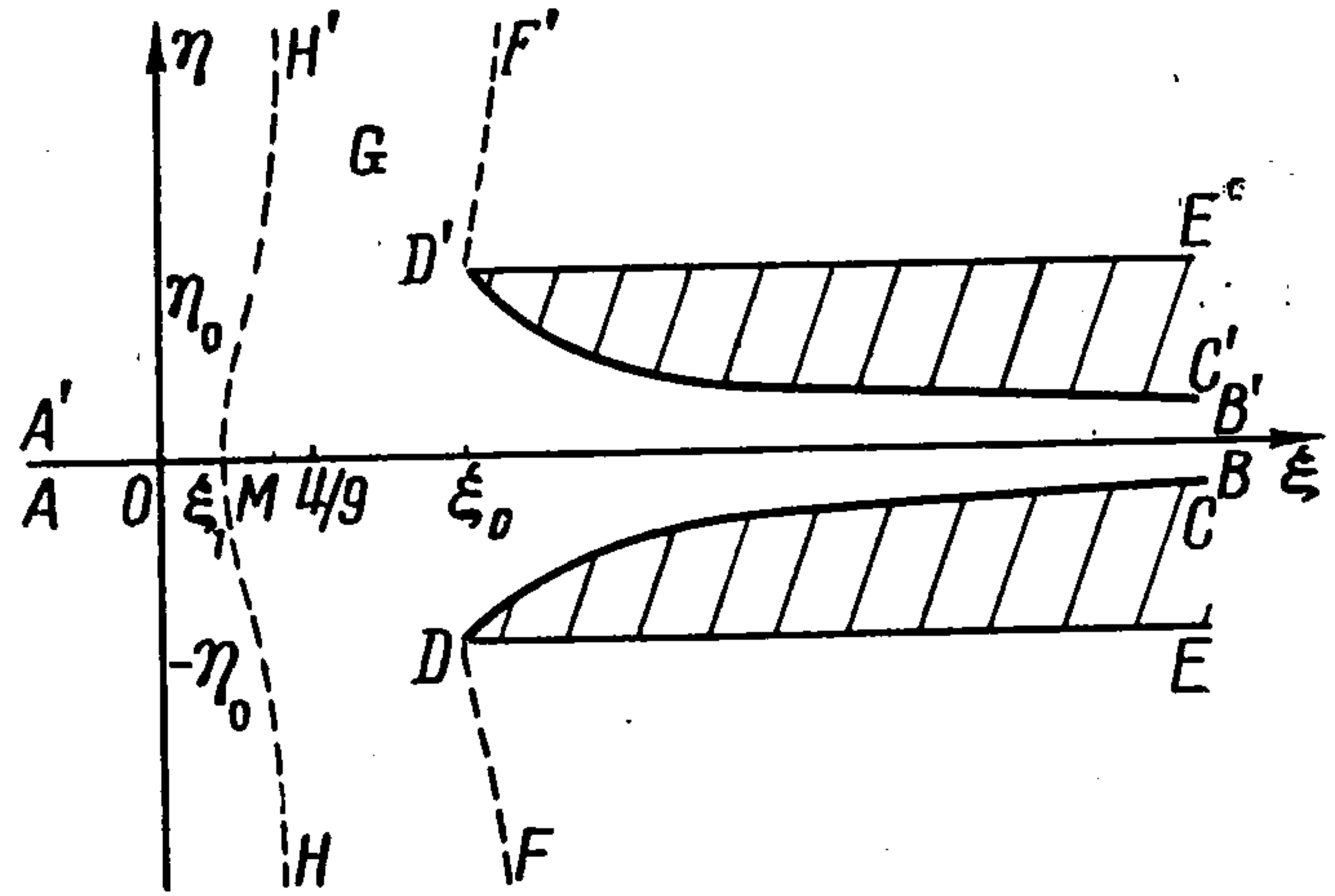
Формулы (2.4), (2.5) исчерпывают все решения вида (1.3) в двумерном случае. Частные решения, соответствующие одномерному течению ($c = c_1 = c_3 = c_7 = 0$), течению от источника ($c = c_3 = 0$), от вихря ($c = c_1 = 0$) и от вихря-источника ($c = 0$), получены в работе [3]. Одномерное течение исследовано также в работе [4].

3. Остановимся на одном общем свойстве точных решений системы (1.2). Пусть известно произвольное точное решение системы (1.2) φ_*, Φ_* , имеющее суммарный потенциал χ_* . В таком случае любая пара функций φ, Φ также есть точное решение системы уравнений электрогидродинамики (1.2), если выполнены два условия: 1) $\varphi + \Phi = \chi_*$ и 2) $\Delta\Phi = 0$. Таким образом, каждое точное решение системы (1.2) порождает бесконечное множество точных решений φ, Φ , причем у всех точных решений из этого множества распределение плотностей тока и заряда одинаковы и определяются только суммарным потенциалом χ_* .

Используя сказанное выше, можно при помощи полученных точных решений (2.4), (2.5) строить другие точные решения, для которых условие (1.3) уже не выполнено. Таким образом, могут быть построены точные решения для задач об обтекании тел-электродов электрогидродинамическим потоком (решение этой задачи в предположении малости характерного размера тела-электрода по сравнению с характерным размером области течения дано в работе [5]), для течения униполярно заряженной жидкости в канале со стенками-электродами и т. д. Ниже будет рассмотрен

пример построения такого точного решения для электрогидродинамического течения в канале со стенками-электродами с суммарным потенциалом $\chi = -\xi^{3/2}$. Такой суммарный потенциал получается из формулы (2.4), если положить $c = c_1 = c_3 = c_5 = c_6 = c_7 = \xi_1 = \eta_1 = 0$, $c_2 = c_4 = 9/8$.

4. Рассмотрим следующую задачу. В области течения униполярно заряженной жидкости G суммарный потенциал дается формулой $\chi = -\xi^{3/2}$, $\xi \geq 0$. Область G ограничена эмиттером HMH' , коллекторами FD и $F'D'$ и стенками-электродами $D'C'$ и DC (фигура). От точек D и D' параллельно оси ξ идут твердые стенки DE и $D'E'$. Вне области $G \cup EDC \cup E'D'C'$ жидкость течет незаряженной. Область гидродинамического течения G' совпадает с внешностью $EDC \cup E'D'C'$. Предполагается, что взаимодействие гидродинамического потока с эмиттером и коллекторами отсутствует [6], следовательно, гидродинамический потенциал Φ можно искать в области G' , не учитывая влияния сеток. При решении задачи предполагается симметрия относительно оси ξ , поэтому можно ограничиться отысканием решения лишь в нижней полуплоскости. Точка D имеет координаты $(\xi_0, -\eta_0)$. Ограничимся рассмотрением случая, для которого $\xi_0 > 4/9$. Последнее условие, как это будет показано ниже, гарантирует монотонность приближения CD к оси ξ , а следовательно, и то, что канал $DCC'D'$ имеет вид, изображенный на фигуре. Точки в нижней полуплоскости на фигуре имеют следующие координаты: $A(-\infty, 0)$, $B(+\infty, 0)$, $C(+\infty, -\eta^0)$, $D(\xi_0, -\eta_0)$, $E(+\infty, -\eta_0)$, $H(\xi_{1\infty}, -\infty)$, $F(\xi_{0\infty}, -\infty)$, $M(\xi_1, 0)$. Значения η^0 , $\xi_{0\infty}$, $\xi_{1\infty}$ будут определены в процессе решения.



Исследование электрогидродинамических невязких течений в каналах проводилось в большинстве случаев в одномерном приближении (см., например, [7, 8]). Однако во многих случаях электрические силы в области течения униполярно заряженной жидкости оказываются непотенциальными, поэтому возникает необходимость рассматривать неодномерную задачу. Так, например, в работе [9] методом последовательных приближений решена двумерная задача о движении униполярно заряженной жидкости в канале со стенками-электродами.

В рассматриваемой здесь задаче получается точное решение для двумерного электрогидродинамического течения в канале со стенками-электродами. Излагаемая схема построения решения может быть использована для нахождения других точных решений, если брать выражения для χ (например из (2.4)), отличные от приведенного выше. При этом в полученных решениях формы каналов будут различными.

Переходим к решению задачи. Необходимо найти такую форму электрода CD и значение электрического потенциала на нем $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, при которых потенциал Φ гидродинамического течения в области G' да-

вал бы в области G в сумме с φ заданный суммарный потенциал $\chi = -\xi^{3/2}$.

Предположим, что искомая форма CD найдена. В таком случае на функцию Φ в области G' накладываются следующие граничные условия:

$$\frac{\partial \Phi(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0 \text{ при } -\infty < \xi < \infty, \quad \frac{\partial \Phi(\xi, -\eta_0)}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \xi_0 < \xi < \infty \quad (4.1)$$

$$\Phi|_{CD} = -\xi^{3/2} + \Phi_0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow -1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, \quad \Phi(0, 0) = 0$$

Функция Φ — гармоническая, следовательно, можно ввести аналитическую функцию $w = w(\tau) = \Phi + i\Psi$, где $\tau = \xi + i\eta$. Граничные условия (4.1) после введения функции Ψ эквивалентны следующим:

$$\Psi(\xi, 0) = 0 \text{ при } -\infty < \xi < \infty, \quad \Psi(\xi, -\eta_0) = \Psi_0 \text{ при } \xi_0 < \xi < \infty$$

$$\Phi|_{CD} = -\xi^{3/2} + \Phi_0, \quad \Psi|_{CD} = \Psi_0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \rightarrow -1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty, \quad \Phi(0, 0) = 0, \quad \Psi(0, 0) = 0$$

Здесь $\Psi_0 = \text{const} > 0$, значение Ψ_0 определяется в процессе решения.

Вернемся к вопросу о поведении кривой CD . Как это видно из выражения для $\Phi|_{CD}$ из (4.2), при $\xi_0 > 4/9$ величина $\Phi|_{CD}$ убывает быстрее, чем в постоянном потоке с потенциалом $\Phi = -\xi$. Такая ситуация возможна в канале с монотонно убывающим сечением, т. е. при CD и $C'D'$, монотонно приближающихся к оси ξ . Очевидно, что CD и $C'D'$ асимптотически приближаются к оси ξ , следовательно, $\eta^0 = 0$. В противном случае ($\eta^0 \neq 0$) при очень больших ξ будет $\Phi|_{CD} \sim k\xi$, $k = \text{const}$, что приводит к противоречию с (4.2).

Как уже было сказано, $w = \Phi + i\Psi$ — аналитическая функция от $\tau = \xi + i\eta$, следовательно, $d\tau/dw = \lambda + i\mu$ — также аналитическая функция. Переходим к определению этой функции. Область гидродинамического течения в нижней полуплоскости отображаем на плоскость w , а затем полученную область в плоскости w при помощи преобразования

$$w = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln(1 - \omega) + \frac{\Psi_0}{\pi} \omega + \Phi_0 + i\Psi_0$$

отображаем на верхнюю полуплоскость плоскости $\omega = \omega_1 + i\omega_2$. Здесь $\Phi_0 + i\Psi_0$ — значение w в точке $\tau = \xi_0 - i\eta_0$. Образы точек A, B, C, D, E имеют в плоскости ω координаты $A_1(+\infty, 0)$, $B_1(1, 0)$, $C_1(1, 0)$, $D_1(0, 0)$, $E_1(-\infty, 0)$. Используя (4.2) и связь между w и ω , получаем следующие граничные условия для функции $\lambda + i\mu$, которую требуется найти в верхней полуплоскости:

$$\mu = 0 \text{ при } -\infty < \omega_1 < 0, \quad \mu = 0 \text{ при } 1 < \omega_1 < \infty$$

$$\lambda = -\frac{2}{3} \left(\frac{\Psi_0}{\pi} \right)^{-1/3} \left[\ln(1 - \omega_1) + \omega_1 + \frac{\pi\Phi_0}{\Psi_0} \right]^{-1/3} \text{ при } 0 < \omega_1 < 1$$

Решение этой задачи дается формулой Келдыша — Седова [10]

$$\lambda + i\mu = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Psi_0}{\pi} \right)^{-1/3} \sqrt{\frac{\omega}{\omega-1}} \int_0^1 \left[\ln(1-\kappa) + \kappa + \frac{\pi\Phi_0}{\Psi_0} \right]^{-1/3} \times \\ \times \sqrt{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \frac{d\kappa}{\kappa-\omega} + \alpha \sqrt{\frac{\omega}{\omega-1}} \quad (4.3)$$

где α — действительное число.

Переходим к определению неизвестных постоянных Φ_0 , Ψ_0 , φ_0 , α . В точке A будет $dw/d\tau = 1/(\lambda + i\mu) = -1$, следовательно, $\lambda + i\mu = -1$ при $\omega = +\infty$. Из этого условия получаем, что

$$\alpha = -1 \quad (4.4)$$

В точке B будет $dw/d\tau = \infty$, следовательно, $\lambda + i\mu = 0$ при $\omega = 1$. Из этого условия получаем

$$\alpha = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Psi_0}{\pi} \right)^{-1/3} \int_0^1 \left[\ln(1-\kappa) + \kappa + \frac{\pi\Phi_0}{\Psi_0} \right]^{-1/3} \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa(1-\kappa)}} \quad (4.5)$$

Интегрируя соотношение (4.3), получаем выражение для $\tau = \tau(\omega)$

$$\tau(\omega) = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Psi_0}{\pi} \right)^{2/3} \int_0^\omega \left(\frac{\omega}{\omega-1} \right)^{3/2} d\omega \int_0^1 \left[\ln(1-\kappa) + \kappa + \frac{\pi\Phi_0}{\Psi_0} \right]^{-1/3} \times \\ \times \sqrt{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \frac{d\kappa}{\kappa-\omega} - \frac{\Psi_0}{\pi} \int_0^\omega \left(\frac{\omega}{\omega-1} \right)^{3/2} d\omega \left\{ a_1 + ia_2 \right. \quad (4.6)$$

где $a_1 + ia_2$ — константа. В точке $\tau = 0$ будет $w = 0$, следовательно

$$a_1 + ia_2 = -\frac{2}{3\pi} \left(\frac{\Psi_0}{\pi} \right)^{2/3} \int_0^{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega-1} \right)^{3/2} d\omega \int_0^1 \left[\ln(1-\kappa) + \kappa + \frac{\pi\Phi_0}{\Psi_0} \right]^{-1/3} \times \\ \times \sqrt{\frac{1-\kappa}{\kappa}} \frac{d\kappa}{\kappa-\omega} + \frac{\Psi_0}{\pi} \int_0^{\omega_0} \left(\frac{\omega}{\omega-1} \right)^{3/2} d\omega \quad (4.7)$$

где ω_0 — большой единицы корень уравнения $\Psi_0 \ln(\omega_0 - 1) + \Psi_0 \omega_0 + \pi\Phi_0 = 0$. Точке $D(\xi_0, -\eta_0)$ соответствует точка $\omega = 0$ в плоскости ω , следовательно, из (4.6) получаем

$$\xi_0 - i\eta_0 = a_1 + ia_2 \quad (4.8)$$

Объединяя (4.4), (4.5), (4.7), (4.8), получаем систему трансцендентных уравнений для определения Φ_0 , Ψ_0 , φ_0 , a_1 , a_2 , α как функций от ξ_0 , η_0 .

Устремляя $\omega \rightarrow \omega_1 + i0$, $0 < \omega_1 < 1$ и разделяя действительную и мнимую части в (4.6), можно получить уравнение для кривой CD в параметрическом виде.

Переходим к определению формы сеток-электродов и их электрических потенциалов. Сетки-коллекторы находятся под потенциалом φ_0 . Сетка-эмиттер, проходящая через точку $(\xi_1, 0)$, $0 < \xi_1 < \xi_0$, находится под потенциалом $\varphi_1 = -\xi_1^{3/2} - \Phi(\xi_1, 0)$. Из условия постоянства электриче-

ских потенциалов на коллекторах и эмиттере находим их форму

$$\begin{aligned} -\varphi_0 &= \xi_0^{3/2} + \Phi(\xi_0, -\eta_0) = \xi_0^{3/2} + \Phi_0 = \xi^{3/2} + \Phi(\xi, \eta) \\ -\varphi_1 &= \xi_1^{3/2} + \Phi(\xi_1, 0) = \xi^{3/2} + \Phi(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Значения $\xi_{0\infty}$ и $\xi_{1\infty}$ определяются из (4.9), если учесть, что $\Phi(\xi, \eta) \rightarrow -\xi$ при $\eta \rightarrow \pm\infty$. Уравнения для $\xi_{0\infty}$ и $\xi_{1\infty}$ имеют вид

$$\xi_{0\infty}^{3/2} - \xi_{0\infty} = -\Phi_0, \quad \xi_{1\infty}^{3/2} - \xi_{1\infty} = -\Phi_1$$

Электрический потенциал φ в области G определяется из соотношения $\varphi = -\xi^{3/2} - \Phi(\xi, \eta)$; w и τ получены как функции ω , эти соотношения дают связь между w и τ в параметрическом виде.

Суммарный ток, втекающий на часть электрода CD ($-\eta_0 < \eta < -\eta_1 \leq 0$), дается формулой $I(\eta_1) = 9/8(\eta_0 - \eta_1)$.

Аналогично может быть построено решение, если электроды CD и $C'D'$ конечны, точки C и C' соединены третьим коллектором, а от точек C и C' до бесконечности (в сторону возрастания ξ) параллельно оси ξ идут твердые стенки.

5. Рассмотрим возможность получения некоторых точных решений системы уравнений электрогидродинамики в случае, когда гидродинамический поток непотенциален.

Рассмотрим двумерное стационарное электрогидродинамическое течение. Параметр электрогидродинамического взаимодействия предполагается бесконечно малым. Пусть гидродинамический поток представляет собой вихревой поток несжимаемой жидкости следующего вида:

$$\mathbf{V}^* = (u_0 |y/l|^\lambda, 0), \quad \lambda = \text{const}$$

Закон Ома имеет вид $\mathbf{j}^* = \mathbf{q}^*(\mathbf{V}^* + b\mathbf{E}^*)$, $b = \text{const}$ — подвижность. Безразмерные величины вводим аналогично (1.1). Система уравнений электрогидродинамики [1] имеет вид

$$\text{div}[q(\mathbf{V} - \text{grad } \varphi)] = 0, \quad \Delta\varphi = -q \quad (5.1)$$

где $\mathbf{V} = (|\eta|^\lambda, 0)$.

Будем искать точные решения системы (5.1), которые могут быть представлены в виде

$$\varphi = \rho^\gamma \varphi_1(\theta), \quad q = -\rho^{\gamma-2} q_1(\theta), \quad \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad \theta = \text{arctg}(\eta/\xi) \quad (5.2)$$

где γ — константа. Ограничимся рассмотрением решений, симметричных относительно оси ξ . В этом случае решение системы (5.1) можно искать лишь при $\eta > 0$. Подставим (5.2) в систему (5.1), предварительно записав ее в полярных координатах. Получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} -(\gamma - 2)\rho^{\lambda+\gamma-3} q_1 \sin^\lambda \theta \cos \theta + \rho^{\lambda+\gamma-3} q_1' \sin^{\lambda+1} \theta + \\ + \gamma(\gamma - 2)\rho^{2\gamma-4} q_1 \varphi_1 + \rho^{2\gamma-4} q_1' \varphi_1' + \rho^{2\gamma-4} q_1^2 = 0 \\ \varphi_1'' + \gamma^2 \varphi_1 = q_1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Если приравнять показатели степеней ρ в первом уравнении (5.3), то получим связь между λ и γ . Она имеет вид $\gamma = \lambda + 1$. В этом случае система (5.3) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-(\lambda - 1)q_1 \sin^\lambda \theta \cos \theta + q_1' \sin^{\lambda+1} \theta + (\lambda^2 - 1)q_1 \varphi_1 + q_1' \varphi_1' + q_1^2 = 0 \quad (5.4)$$

$$\varphi_1'' + (\lambda + 1)^2 \varphi_1 = q_1$$

Если $\lambda > 0$, то $V = 0$ при $\eta = 0$. Решение системы (5.4) можно использовать в этом случае для изучения обтекания проводящей или непроводящей стенки ($\eta = 0$) вихревым потоком униполярно заряженной жидкости.

Если $\lambda < 0$, то $V = (\infty, 0)$ при $\eta = 0$. Решение системы (5.4) в этом случае можно использовать как модельное для изучения распределений электрических параметров в сильно завихренной струе.

Рассмотрим постановку краевой задачи для системы (5.4) в общем случае. Требуется найти электрогидродинамическое течение в области G между эмиттером ($0 \leq \rho < \infty$, $\theta = \theta_2 = \text{const}$) и коллектором ($0 \leq \rho < \infty$, $\theta = \theta_1 = \text{const}$). Углы θ_1 и θ_2 удовлетворяют неравенствам $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Незаряженная жидкость заряжается на эмиттере и разряжается на коллекторе. На эмиттере задан электрический потенциал $\varphi = 0$ и объемный заряд $q = -q_* \rho^{\lambda-1}$, $q_* = \text{const}$. На коллекторе задан электрический потенциал $\varphi = 0$. Следовательно, краевые условия для системы (5.4) в области G имеют вид

$$\varphi_1(\theta_1) = 0, \quad \varphi_1(\theta_2) = 0, \quad q_1(\theta_2) = q_* \quad (5.5)$$

При $\lambda = -1$ система (5.4) имеет наиболее простой вид

$$2q_1 \text{ctg} \theta + q_1' + q_1' \varphi_1' + q_1^2 = 0, \quad \varphi_1'' = q_1 \quad (5.6)$$

Рассмотрим этот случай более подробно. Исключим q_1 из системы (5.6) при помощи второго уравнения. Вводим вместо φ_1 новую неизвестную функцию $p = 1 + \varphi_1'$. Для нее получаем нелинейное уравнение второго порядка

$$pp'' + p'^2 + 2p' \text{ctg} \theta = 0 \quad (5.7)$$

Таким образом, система (5.6) допускает понижение порядка на единицу.

Рассмотрим приближенное решение уравнения (5.7) в случае, когда выполнены неравенства $0 < \theta_1 < \theta_2 \ll 1$. При этом в уравнении (5.7) можно заменить $\text{ctg} \theta$ на θ^{-1} и искать его приближенное решение как точное решение уравнения

$$p_0 p_0'' + p_0'^2 + 2\theta^{-1} p_0' = 0, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (5.8)$$

Приближенное решение отмечено индексом нуль. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\theta = \theta_1 P \exp[4k(p_0, c)], \quad P = \left| \frac{p_0^2 - 4p_0 + c}{p_{01}^2 - 4p_{01} + c} \right|$$

$$k(p_0, c) = \int_{p_{01}}^{p_0} \frac{dp_0}{p_0^2 - 4p_0 + c} = \begin{cases} k_1(p_0, c), & c = 4 + \alpha^2, \\ k_2(p_0, c), & c = 4 \\ k_3(p_0, c), & c = 4 - \alpha^2 \end{cases}$$

$$k_1(p_0, c) = \frac{1}{\alpha} \left[\operatorname{arctg} \frac{p_0 - 2}{\alpha} - \operatorname{arctg} \frac{p_{01} - 2}{\alpha} \right], \quad k_2(p_0, c) = -\frac{1}{p_0 - 2} + \frac{1}{p_{01} - 2}$$

$$k_3(p_0, c) = \frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{(p_0 - 2 - \alpha)(p_{01} - 2 + \alpha)}{(p_0 - 2 + \alpha)(p_{01} - 2 - \alpha)} \right|$$

Здесь $c, p_{01} = p_0(\theta_1) = \text{const}$.

Предполагая, что для φ_{10} и q_{10} выполнены краевые условия (5.5), а также то, что p_0 и φ_{10} связаны соотношением $p_0 = 1 + \varphi_{10}'$, получаем

$$\varphi_{10} = -\theta_1 P \exp[4k(p_0, c)] + \theta_1 + 2(p_0 - p_{01}) + 4 \ln P + 2(8 - c)k(p_0, c)$$

$$\theta_2 = \theta_1 P \exp[4k(p_{02}, c)]$$

$$2(p_{02} - p_{01}) - 2ck(p_{02}, c) = \theta_2 - \theta_1 - 4(\ln \theta_2 - \ln \theta_1)$$

$$c = -p_{02}^2 + 4p_{02} + 2q_* p_{02}, \quad p_{02} = p_0(\theta_2) = \text{const}$$

Здесь c будет больше, равно или меньше четырех в зависимости от того, какие значения принимают θ_1, θ_2, q_* .

Поступила 10 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
2. Жермен П. Механика сплошных сред. М., «Мир», 1965.
3. Ушаков В. В. О построении приближенных решений двумерных потенциальных задач в электрогидродинамике. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
4. Грабовский В. И. Некоторые вопросы исследования электрогидродинамических струй за срезом источника заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
5. Бучин В. А. Задача об электрогидродинамическом зонде, не возмущающем распределений плотностей тока и объемного заряда. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
6. Ватажин А. Б., Лихтер В. А., Шулъгин В. И. Исследование электрогазодинамической струи за источником заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
7. Бортников Ю. С., Рубашев И. Б. Некоторые вопросы исследования системы уравнений электрогазодинамики. Магнитная гидродинамика, 1968, № 2.
8. Зыков В. А. Элементы электродинамики униполярных газовых течений. Теплофизика высоких температур, 1969, т. 7, вып. 6.
9. Грабовский В. И. Электрогидродинамическое течение в плоском канале с осевым электродом-эмиттером. ПМТФ, 1970, № 6.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3, М., «Наука», 1965.