Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 531.391.5

ОБ ОДНОЙ ИДЕЕ Н. Г. ЧЕТАЕВА

Ю. М.-Л. Костюковский

(Москва)

Развивается идея Н. Г. Четаева о том, что если ошибки измерений достаточно малы, то можно найти наилучшие условия для экспериментального исследования материального объекта, используя свойство неустойчивости его математической модели [1]. Показано, что в ряде случаев можно значительно ослабить требования к точности измерений при экспериментальном поиске новых свойств объекта, отличных от свойств его известной математической модели. Для этого достаточно использовать свойство математической модели, более сильное, чем неустойчивость. Это свойство названо в работе свойством полной лабильности. Найдены достаточные условия полной лабильности. Вводится понятие степени лабильности. Рассматривается задача управления степенью лабильности. Полученные результаты применены к двум системам: математической модели борьбы за существование между двумя биологическими видами и задаче входа космического летательного аппарата в атмосферу планеты с неработающим двигателем (пассивный спуск).

1. Рассмотрим класс объектов, движение которых можно задать системой дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x), \qquad t_0 \leqslant t < t_* \tag{1.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор в действительном n-мерном линейном нормированном пространстве R_x^n с нормой $\|x\| = \max_i |x_i|$, t — время, t_0 — начальный момент, $t_0 \in (-\infty, \infty)$, t_* — или число на полупрямой $t > t_0$, или символ ∞.

Пусть V_0 — заданное множество в R_x^n начальных состояний $x(t_0) = x_0$; $x(t) = f(t, x_0, t_0)$, $t_0 \leqslant t < t_*$, $x_0 \in V_0$ — решение (траектория) системы (1.1) в $R_x^n \times I$, где $I = \{t : t_0 \leqslant t < t_*\}$. Предположим, что $X(t, x)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование и непрерывность функции $f(t, x_0, t_0)$ при всех $t \in I$ и всех $x_0 \in V_0$.

Следуя Н. Г. Четаеву [2], будем «на конкретное явление смотреть как на теоретическое явление, возмущенное недоучтенными малыми силами и отклонениями начальных данных». Кроме того, следуя рекомендациям [1], ограничим структуру возмущающих сил: будем считать, что отличие поведения материального объекта от поведения его модели (1.1) вызвано лишь различием их начальных состояний. Следовательно, если $f(t, x_0, t_0)$, $t_0 \leqslant t < t_*$ — теоретическая траектория, траектория модели объекта (1.1), то $f(t, x_0^*, t_0)$, $t_0 \leqslant t < t_*$ — истинная траектория объекта, тогда как $\Delta x_0 = x_0^* - x_0$ — это недоучтенное возмущение начального состояния модели, равное отклонению истинного начального состояния x_0^* объекта от теоретического начального состояния, т. е. начального состояния $x(t_0) = x_0$ его модели (1.1).

Ясно, что в том случае, когда сколь угодно малые отклонения Δx_0 начального состояния объекта x_0^* от начального состояния его модели (1.1) x_0 приводят к сколь угодно большому возрастанию нормы разности $\| f(t, x_0^*, t_0) - f(t, x_0, t_0) \|$ с течением времени t, различие между поведением объекта и его модели можно будет обнаружить даже грубыми, неточными средствами наблюдения. В этом случае возникают благоприятные условия для выявления экспериментальным путем тех свойств объекта, которые отличны от свойств его известной модели (1.1), и в том числе его новых, неожиданных свойств. Эта сколь угодно сильная подверженность модели (1.1) малым возмущениям ее начального состояния x_0 является более сильным свойством, чем неустойчивость ее траекторий по Ляпунову, так как здесь идет речь о неограниченном возрастании расстояния между состояниями системы (1.1) в R_x^n на невозмущенной и возмущенной траекториях.

Определение. Назовем траектории $C = \{f(t, x_0, t_0),\ t_0 \leqslant t < t_*,\ x_0 \in V_0\}$ полностью лабильными относительно множества V_0, если каким бы большим ни было число $\varepsilon > 0$ и каким бы малым ни было число $\delta > 0$, среди множества траекторий C существуют, по крайней мере, такие две траектории $f(t, (x_0)_1, t_0)$, $f(t, (x_0)_2, t_0)$, $t_0 \leqslant t < t_*$; $(x_0)_1, (x_0)_2 \in V_0$ и такой момент времени $t_1 = t_1(\varepsilon, \delta, (x_0)_1, (x_0)_2)$, $t_0 < t_1 < t_*$, что

а) $0 < \| (x_0)_1 - (x_0)_2 \| \leqslant \delta$, б) $\| f(t_1, (x_0)_1, t_0) - f(t_1, (x_0)_2, t_0) \| > \varepsilon$.

Здесь и далее t_* — это или число на полупрямой $t > t_0$, или символ ∞.

Теорема 1. Пусть правая часть системы (1.1) $X(t, x)$ — функция t и x, непрерывная вместе со своими частными производными по t и x в $R_x^n \times I$, где $I = \{t : t_0 \leqslant t < t_*\}$.

Обозначим

$$L(t, x_0, t_0) = \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(\tau, f(\tau, x_0, t_0)) d\tau \tag{1.2}$$

Тогда для того, чтобы траектории C были полностью лабильными относительно множества V_0, достаточно, чтобы

$$L(t, x_0, t_0) \to \infty \text{ при } t \to t_* \tag{1.3}$$

равномерно по $x_0 \in V_0$.

Доказательство. Пусть $\bar{x}_0$ — любая точка из V_0. Из теорем существования, единственности и непрерывной зависимости траекторий C от x_0 следует, что для каждого $t, t_0 \leqslant t < t_*$, отображение $T_t : x = f(t, x_0, t_0)$, $x_0 \in V_0$ непрерывно и взаимнооднозначно.

По условию V_0 — открытое множество, поэтому существует множество шаров

$$S_{\delta_0}(\bar{x}_0) = \{x_0 : \| x_0 - \bar{x}_0 \| \leqslant {}^1/_2\, \delta_0\}, \quad S_{\delta_0}(\bar{x}_0) \subset V_0$$

где $\delta_0 > 0$ — любое число, не превосходящее заданного числа $\delta > 0$, как бы мало ни было последнее. Непрерывная функция $f(t, x_0, t_0)$, $x_0 \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$ определяет отображение T_t шара $S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$ на множество $S_{\rho_t} = T_t(S_{\delta_0}(\bar{x}_0))$, где S_{ρ_t} — замкнутое связное и ограниченное при каждом

фиксированном t, $t_0 \leqslant t < t_*$, множество (связный компакт), диаметр которого равен ρ_t.

Обозначим якобиан

$$J(t, x) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_{10}, \ldots, x_{n0})}$$

Согласно теореме Лиувилля [3]

$$J(t, f(t, x_0, t_0)) = \exp \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(\tau, f(\tau, x_0, t_0))\, d\tau \tag{1.4}$$

Поэтому $J(t, f(t, x_0, t_0)) \neq 0$.

Пусть $|S_{\rho_t}|$ — объем множества S_{ρ_t}. Учитывая непрерывность $J(t, f(t, x_0, t_0))$ от x_0, получим

$$|S_{\rho_t}| = \int_{S_{\rho_t}} dx = \int_{S_{\delta_0}(\bar{x}_0)} J(t, f(t, x_0, t_0))dx_0 = |S_{\delta_0}(\bar{x}_0)|\, J(t, f(t, a, t_0)) \tag{1.5}$$

Здесь $a = a(t)$ — некоторая точка из $S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$, фиксированная при фиксированном t, $t_0 \leqslant t < t_*$. Из (1.4), (1.5) следует, что

$$|S_{\rho_t}| = |S_{\delta_0}(\bar{x}_0)| \exp \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(\tau, f(\tau, a, t_0))\, d\tau \tag{1.6}$$

Диаметр ρ_t компакта S_{ρ_t}

$$\rho_t = \sup_{x, x' \in S_{\rho_t}} \|x - x'\| = \|x^1 - x^2\| \tag{1.7}$$

где x^1 и x^2 принадлежат границе $\Gamma(S_{\rho_t})$ множества S_{ρ_t} в силу непрерывности нормы $\|x - x'\|$. Прообразы точек x^1, x^2

$$(x_0)_1 = T_t^{-1}(x^1), \qquad (x_0)_2 = T_t^{-1}(x^2)$$

где T_t^{-1} — непрерывное отображение, обратное к T_t, также принадлежат границе $\Gamma(S_{\delta_0}(\bar{x}_0))$ шара $S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$. Поэтому

$$\|(x_0)_1 - (x_0)_2\| \leqslant \delta_0 \leqslant \delta \tag{1.8}$$

Заметим, что

$$|S_{\rho_t}| \leqslant (\rho_t)^n \tag{1.9}$$

С учетом обозначения (1.2) из (1.6), (1.9) получим оценку

$$\rho_t \geqslant |S_{\delta_0}(\bar{x}_0)|^{1/n} \exp[L(t, a, t_0)/n], \quad a \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0) \subset V_0 \tag{1.10}$$

Из неравенства (1.10) и условия (1.3) следует утверждение теоремы.

2. Введем знакоположительную функцию

$$h(t, \delta_0, x_0, t_0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(n-\varkappa)/2n} (n!!)^{-1/n} \delta_0 \exp[L(t, x_0, t_0)/n]$$

$$\varkappa = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \\ 1, & n = 3, 5, 7, \ldots \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $n!!$ — произведение всех натуральных чисел той же четности, что и n, но не превосходящих n.

Теорема 2. Пусть правая часть системы (1.1) $X(t, x)$ — функция t и x, непрерывная вместе со своими частными производными по t и x в $R_x^n \times I$.

Тогда траектории C являются полностью лабильными относительно множества V_0, если для любого (сколь угодно большого) числа $\varepsilon > 0$ и для любого (сколь угодно малого) числа $\delta > 0$ существуют: а) начальное состояние $\bar{x}_0 \in V_0$, б) шар $S_{\delta_0}(\bar{x}_0) \subset V_0$ диаметром $\delta_0 \leqslant \delta$, в) момент времени $t_1 = t_1(\varepsilon, \delta_0)$, $t_0 < t_1 < t_*$, такие, что

$$h(t_1, \delta_0, b, t_0) \geqslant \varepsilon \text{ для каждой точки } b \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0) \tag{2.2}$$

Доказательство. Обратимся к (1.10), где объем $|S_{\delta_0}(\bar{x}_0)|$ шара $S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$ диаметром δ_0 может быть вычислен по формуле Якоби [4]; в результате (1.10) примет вид

$$\rho_t \geqslant h(t, \delta_0, a, t_0), \qquad a \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0) \tag{2.3}$$

Далее, принимая во внимание (2.2), а также (1.7), (1.8) и (2.3), легко завершить доказательство теоремы.

Замечание 1. Величина ρ_t в левой части (2.3) характеризует погрешность определения состояния системы (1.1) в момент t, вызванную погрешностью δ_0, с которой задается ее начальное состояние, а $h(t, \delta_0, a, t_0)$ в (2.3) характеризует минимальный уровень этой погрешности.

Замечание 2. Использование неравенства (2.2) для выявления полностью лабильных траекторий системы (1.1) предполагает, что функцию $L(t, x_0, t_0)$ в (2.1) либо можно вычислить точно, либо эффективно оценить снизу.

3. Рассмотрим математическую модель борьбы за существование между двумя биологическими видами [5], принятую в качестве исходной в [6], относящуюся к обширному классу так называемых моделей развития [7]

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 x_2), \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 x_1), \qquad t \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$ — положительные числа; x_1, x_2 — координаты вектора $x = (x_1, x_2) \in R_x^2$, $x_0 = (x_{10}, x_{20})$ — состояние системы (3.1) в момент $t = 0$; $V_0 = \{x_0 : 0 < x_{10}, x_{20} < \beta\}$, $\beta > 0$ — число.

Покажем, что траектории системы (3.1), берущие начало при $t = 0$ на V_0, являются полностью лабильными относительно V_0.

Чтобы воспользоваться теоремой 2, необходимо найти величину

$$L(t, x_0, 0) = \int_0^t (\varepsilon_1 - \gamma_1 x_2(\tau) - \varepsilon_2 + \gamma_2 x_1(\tau))\, d\tau \tag{3.2}$$

$$x_1(t) = f_1(t, x_0, 0), \quad x_2(t) = f_2(t, x_0, 0), \quad t \geqslant 0, \quad x_0 \in V_0$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ — решение системы (3.1). С учетом (3.1) подынтегральное выражение в (3.2) можно представить в виде

$$(\varepsilon_1 - \gamma_1 x_2(t) - \varepsilon_2 + \gamma_2 x_1(t))\, dt = dx_1/x_1 + dx_2/x_2 \tag{3.3}$$

Подстановка (3.3) в (3.2) дает

$$L(t, x_0, 0) = \ln \left| \frac{x_1(t)\, x_2(t)}{x_{10} x_{20}} \right| \tag{3.4}$$

На фазовой плоскости R_x^2 построим круг диаметром $\delta_0 \leqslant \beta$

$$S_{\delta_0}(\bar{x}_0) = \left\{ x_0 : \left(x_{10} - \frac{m+1}{2m}\alpha \right)^2 + \left(x_{20} - \frac{m+1}{2m}\alpha \right)^2 \leqslant \left(\frac{m-1}{2lm}\alpha \right)^2 \right\} \tag{3.5}$$

$$l \geqslant 1,\ m > 1,\ 0 < \alpha \leqslant lm\beta / (m-1)$$

При помощи (3.4) по формуле (2.1) для $n = 2$ найдем

$$h(t, \delta_0, x_0, 0) = 0.8862269 \ldots \frac{m-1}{lm}\alpha \left| \frac{f_1(t, x_0, 0)\, f_2(t, x_0, 0)}{x_{10} x_{20}} \right| \tag{3.6}$$

$$x_0 \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$$

Пусть $b = (b_1, b_2)$ — любая точка из $S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$. Из (3.5) следует, что

$$b_1 b_2 \leqslant \left(\frac{m-1}{m}\alpha \right)^2 \tag{3.7}$$

Число $\alpha > 0$ в (3.5) можно выбрать столь малым, чтобы на плоскости R_x^2 особая точка $(\varepsilon_2 / \gamma_2,\ \varepsilon_1 / \gamma_1) \notin S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$.

Известно [5], что уравнения (3.1) имеют в квадранте $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ единственную особую точку $(\varepsilon_2 / \gamma_2,\ \varepsilon_1 / \gamma_1)$, которая является центром, фазовые кривые системы (3.1) в этом квадранте все замкнуты, а изменение фазовых координат x_1, x_2 во времени происходит по периодическому закону. Следовательно, в квадранте $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ все фазовые кривые системы (3.1) должны охватывать точку $(\varepsilon_2 / \gamma_2,\ \varepsilon_1 / \gamma_1)$ (в противном случае, согласно теореме Бендиксона [8], в этом квадранте имелась бы особая точка, отличная от $(\varepsilon_2 / \gamma_2,\ \varepsilon_1 / \gamma_1)$). Поэтому для каждой точки $x_0 \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$ существует момент $t_1 = t_1(x_0)$, $0 < t_1 < \infty$, такой, что

$$f_1(t_1, x_0, 0) > \varepsilon_2 / \gamma_2, \qquad f_2(t_1, x_0, 0) > \varepsilon_1 / \gamma_1 \tag{3.8}$$

Функции $f_1(t, x_0, t_0)$, $f_2(t, x_0, t_0)$ непрерывно зависят от $x_0 \in V_0$, поэтому при любом фиксированном $\alpha > 0$ существует целое число $l_0 = l_0(\alpha) \geqslant 1$, зависящее от α, такое, что для любого круга (3.5), где $l \geqslant l_0 = l_0(\alpha)$, неравенства (3.8) выполняются для любой точки $x_0 = b = (b_1, b_2) \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$. Следовательно, из (3.8) имеем

$$f_1(t_1, b, 0)\, f_2(t_1, b, 0) > \varepsilon_1 \varepsilon_2 / \gamma_1 \gamma_2 \tag{3.9}$$

Тогда с учетом (3.7), (3.9) из (3.6) получим

$$h(t_1, \delta_0, b, 0) \geqslant 0.8862269 \ldots \frac{m \varepsilon_1 \varepsilon_2}{(m-1)\gamma_1 \gamma_2} \frac{1}{\alpha}$$

Следовательно, каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, выбирая $\alpha > 0$ достаточно малым, можно всегда обеспечить условие $h(t_1, \delta_0, b, t_0) \geqslant \varepsilon$ для любой точки $b = (b_1, b_2) \in S_{\delta_0}(\bar{x}_0)$, а это, согласно теореме 2.1, означает, что траектории $C = \{(f_1(t, x_0, 0), f_2(t, x_0, 0)),\ t \geqslant 0,\ x_0 \in V_0\}$ являются полностью лабильными относительно V_0. Необходимо отметить также, что диаметр и координаты центра круга (3.5) сколь угодно малы при $\alpha \to 0$, поэтому начало координат фазовой плоскости R_x^2 является точкой сгущения тех пар точек $\{(x_0)_1, (x_0)_2\}$, расстояние между которыми в момент $t = 0$ сколь угодно мало, тогда как расстояние между фазовыми траекториями системы (3.1), выходящими из каждой пары этих точек, становится с ростом t большим любого $\varepsilon > 0$.

4. Пусть выполняются все условия теоремы 1 за исключением условия (1.3), которое здесь не принимается во внимание. Зафиксируем некоторый момент на $I = \{t\colon\ t_0 \leqslant t < t_*\}$. Рассмотрим множество $V_t = T_t(V_0)$, $V_0 \subset R_x^n$ и шар $S_{\delta_t}(\bar{x}) = \{x : \|x - \bar{x}\| \leqslant \frac{1}{2}\delta_t\}$ с центром в любой точке $\bar{x} \in V_t$, где число $\delta_t > 0$ выбрано так, чтобы $S_{\delta_t}(\bar{x}) \subset V_t$. В силу принятых предположений для каждой точки $x \in S_{\delta_t}(\bar{x})$ существует единственный образ $x_0 = T_t^{-1}(x)$, где $T_t^{-1} : x_0 = f(t_0,\ x,\ t)$, $t_0 \leqslant t < t_*$, $x \in V_t$.

Пусть S_{δ_0} — образ шара $S_{\delta_t}(\bar{x})$, $S_{\delta_0} = T_t^{-1}(S_{\delta_t}(\bar{x}))$, где δ_0 — диаметр множества S_{δ_0}. Обозначим

$$\mu(t, \bar{x}_0, t_0) = \lim_{\delta_t \to 0} (\delta_0 / \delta_t) \tag{4.1}$$

где $\bar{x}_0 = f(t_0, \bar{x}, t)$, δ_t — диаметр шара $S_{\delta_t}(\bar{x})$, δ_0 — диаметр множества S_{δ_0}.

Величина $\mu(t, \bar{x}_0, t_0)$ характеризует, как сильно к моменту t сгущаются, сближаются между собой траектории системы (1.1), берущие начало в окрестности точки $\bar{x}_0$. Чем больше $\mu(t, \bar{x}_0, t_0)$, тем выше степень сгущаемости траекторий.

Найдем нижнюю оценку для $\mu(t, x_0, t_0)$, где x_0 — любая точка из V_0. Для этого по аналогии с (1.5) можно записать

$$|S_{\delta_0}| = [J(t, f(t, a, t_0))]^{-1} |S_{\delta_t}(\bar{x})| \tag{4.2}$$

где $a = a(t)$ — некоторая точка из S_{δ_0}. Если учесть (1.2), (1.4), то (4.2) можно переписать в виде

$$|S_{\delta_0}| = |S_{\delta_t}(\bar{x})| \exp[-L(t, a, t_0)] \tag{4.3}$$

Примем во внимание, что $(\delta_0)^n \geqslant |S_{\delta_0}|$; вычислим объем $|S_{\delta_t}(\bar{x})|$ по формуле Якоби [4]; тогда из (4.3) с учетом (4.1) получим оценку

$$\mu(t, x_0, t_0) \geqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(n-\varkappa)/2n} (n!!)^{-1/n} \exp[-L(t, x_0, t_0)/n]$$

$$\varkappa = \begin{cases} 0, & n = 2, 4, 6, \ldots \\ 1, & n = 3, 5, 7, \ldots \end{cases} \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что если

$$L(t, x_0, t_0) \to -\infty \text{ при } t \to t_* \tag{4.5}$$

то

$$\mu(t, x_0, t_0) \to \infty \text{ при } t \to t_* \tag{4.6}$$

Следовательно, одна и та же величина $L(t, x_0, t_0)$, с одной стороны, характеризует полную лабильность траекторий системы (1.1), когда $L(t, x_0, t_0) \to \infty$ (теоремы 1, 2), а с другой стороны, — неограниченную сгущаемость траекторий системы (1.1), когда $L(t, x_0, t_0) \to -\infty$ (соотношения (4.5), (4.6)).

Учитывая особую роль, которую играет величина $L(t, x_0, t_0)$ во всех предыдущих рассуждениях, назовем величину $L(t, x_0, t_0)$ степенью лабильности системы (1.1).

5. Рассмотрим движение космического летательного аппарата при входе в атмосферу планеты с неработающим двигателем (пассивный спуск). При определенных допущениях уравнения плоского движения летательного апарата могут быть представлены в виде [9]

$$\frac{dH}{dz} = A(z, H)\,\theta, \qquad (v_0 - z)\,\frac{d\theta}{dz} = \frac{C_y}{C_x} - \frac{A(z, H)}{v_0 - z}\left[g - \frac{1}{r}(v_0 - z)^2\right]$$

$$A(z, H) = \left[\frac{C_x S \rho(0)}{2m_0}(v_0 - z)\,e^{-\lambda H}\right]^{-1}, \qquad 0 \leqslant z < v_0 - v \tag{5.1}$$

Здесь в отличие от [9] (очевидно, несущественном) в качестве независимого переменного вместо v выбрана монотонно растущая во времени скалярная величина $z = v_0 - v$, где $v_0 = v(t_0)$ — скорость аппарата в начальный момент времени $t = t_0$, $v = v(t)$ — скорость аппарата в текущий момент t, значения z и t находятся во взаимно-однозначном соответствии. Что касается других обозначений в (5.1), то H — это высота аппарата над поверхностью планеты, θ — угол наклона траектории аппарата относительно плоскости местного горизонта, λ — логарифмический градиент плотности атмосферы, S и m — характерная площадь сечения и масса аппарата, c_y и c_x — коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления, $\rho(0)$ — плотность атмосферы на высоте $H = 0$, r — радиус планеты, g — ускорение силы тяжести.

Фактические траектории летательного аппарата могут отличаться от расчетных в силу ряда причин, анализ которых приводит к задаче о рассеивании. Одна из причин рассеивания траекторий заключается в возмущении начального состояния системы (5.1) $H(t_0) = H_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$. При помощи числовой меры сгущаемости траекторий (4.1) и соотношения (4.4) оценим сгущаемость траекторий системы (5.1).

Для этого сначала вычислим степень лабильности системы (5.1) по формуле (1.2). Принимая во внимание первое уравнение в (5.1), вычисляемый интеграл можно свести к квадратуре, берущейся в конечном виде

$$L(z; H_0, \theta_0; 0) = \lambda \int_0^{v_0 - v} A(z, H(z))\,\theta(z)\,dz = \lambda \int_0^z dH(\tau) = \lambda\,[H(z; H_0, \theta_0) - H_0] \tag{5.2}$$

Здесь $H(z) = H(z; H_0, \theta_0)$ — высота, соответствующая текущему значению z.

Если $H(z; H_0, \theta_0) < H_0$, то $L(z; H_0, \theta_0; 0) < 0$. В соответствии со смыслом величины $\mu(z; H_0, \theta_0; 0)$ и оценкой (4.4) это означает, что сам факт снижения аппарата в атмосфере планеты оказывает стабилизирующий эффект, который заключается в уменьшении возмущений траектории системы (5.1), вызванных возмущениями ее начального состояния (H_0, θ_0). Из (5.2) следует, что этот стабилизирующий эффект тем больше, чем больше градиент плотности λ, тогда как степень лабильности системы (5.1) $L(z; H_0, \theta_0; 0)$ не зависит от формы траекторий системы (5.1), а определяется лишь перепадом высот $H(z; H_0, \theta_0) - H_0$.

Например, пусть $H(z; H_0, \theta_0) - H_0 = 80$ *км*. При снижении на Землю $\lambda \approx (1/7170)$ *м*$^{-1}$. В этом случае $L(z; H_0, \theta_0; 0) \approx 11.16$, и по формуле (4.4) для $n = 2$ имеем $\mu(z; H_0, \theta_0; 0) \geqslant 235$.

Обращаясь к (1.2), (4.4) и (5.1), можно заметить, что существует дополнительная возможность воздействовать на величину $L(z; H_0, \theta_0; 0)$ и на нижнюю границу для $\mu(z; H_0, \theta_0; 0)$, которая заключается в использовании в качестве управляющих функций аэродинамического качества c_y / c_x и коэффициента лобового сопротивления c_x как функций H и θ.

6. Математические модели процессов управления часто бывают заданы уравнениями вида (1.1), у которых

$$X(t, x) = F(t, x, u(t)) \tag{6.1}$$

Здесь $F(t, x, u)$ — функция t, x, u, $u = (u_1, \ldots, u_r)$ — вектор в действительном r-мерном линейном нормированном пространстве R_u^r, $u(t)$ — управление (управляющая функция).

При экспериментировании с конкретным материальным объектом часто требуется выявить новые свойства этого объекта, отличные от свойств его модели (1.1), (6.1), а также уточнить границы и области применимости этой модели. Форсируя рост степени лабильности системы (1.1), (6.1) при помощи специально подобранных управлений и используя именно эти управления при экспериментировании с конкретным материальным объектом, можно надеяться скорейшим путем установить различие между поведением этого объекта и его модели (1.1), (6.1).

Пусть каждое из управлений $u = u(t)$, $t \geqslant t_0$, принадлежащее некоторому допустимому множеству управлений $U = \{u(t), t \geqslant t_0)\}$, обеспечивает выполнимость всех условий теоремы 1 на функцию (t, x), за исключением условия (1.3), которое здесь не принимается во внимание.

Среди управлений U можно выбрать такое управление, чтобы система (1.1), (6.1) достигала заданной величины степени лабильности $L(t_1, x_0, t_0) = B$, где B — заданное число, за минимальное время $t_+ - t_0$, где

$$t_+ = \min_{u(t) \in U} t_1 \tag{6.2}$$

Очевидно, что искомое управление $u = u_0(t)$, $t_0 \leqslant t < t_+$, может быть найдено из функционального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{\min_{u(t)\in U} t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(\tau, f(\tau, x_0, t_0))\, d\tau = B \tag{6.3}$$

Здесь функция $x(t) = f(t, x_0, t_0)$, $t_0 \leqslant t < t_+$, $x_0 \in V_0$ удовлетворяет системе (1.1), (6.1) при наличии заданного $x_0 \in V_0$ и искомого $u = u_0(t)$, $t_0 \leqslant t < t_+$.

Методом припасовывания все предшествующие рассуждения можно распространить на случай кусочно-гладких управлений.

Если значения управляющей функции принадлежат компактному замыканию в R_u^r, решение функционального уравнения (6.2) можно свести к известной задаче оптимального быстродействия [10] с дополнительным интегральным ограничением типа изопериметрического. Действительно, решение задачи (6.2) равносильно задаче минимизации интеграла

$$t_1 = \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau + t_0$$

подчиненного двум связям: дифференциальной (1.1), (6.1) (при условии, что начальное состояние $x(t_0) = x_0$ принадлежит множеству V_0, а управление $u = u_0(t)$, $t \geqslant t_0$ принадлежит множеству U) и интегральной (изопериметрическое условие)

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} X_i(\tau, f(\tau, x_0, t_0))\, d\tau = B$$

Автор приносит благодарность В. В. Румянцеву за полезные советы и замечания, а также всем участникам семинара по аналитической механике МГУ за обсуждение этой работы.

Поступила 3 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Из записной книжки. В кн.: Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962, стр. 495.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость и классические законы. В сб.: Научн. тр. Казанск. авиац. ин-та 1936, № 6.
3. Hartman Ph. Ordinary differential equations. New York— London — Sydney, J. Wiley and Sons, 1964. (Русс. перев.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970, стр. 119.)
4. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., «Наука», 1966, стр. 243.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959, стр. 164.
6. Колмогоров А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций. В сб.: Проблемы кибернетики (под ред. А. А. Ляпунова), вып. 25. М., «Наука», 1971.
7. Кузьмин В. И., Лебедев Б. Д., Чуев Ю. В. Пути совершенствования аналитических моделей развития. В сб.: Проблемы кибернетики (под ред. А. А. Ляпунова), вып. 24. М., «Наука», 1971.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.—Л., Гостехиздат, 1949, стр. 54.
9. Ярошевский В. А. Приближенный расчет траекторий входа в атмосферу. Космические исследования, 1964, т. 2, № 4, 5.
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961, стр. 131.