Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 534

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ПРИ РЕЗОНАНСЕ

Н. В. Воробьев

(Москва)

Изучаются свойства решений одной двухчастотной системы во всем пространстве. Установлено соответствие между ее решениями и фазовыми траекториями автономной системы второго порядка, получающейся из исходной путем использования ее групповых свойств. Исходная система может рассматриваться как модельная для изучения явлений, происходящих в многочастотных системах при резонансе. Работа примыкает к исследованию [1].

1. Рассмотрим следующую автономную систему дифференциальных уравнений:

$$dz_1 / d\tau = z_4, \quad dz_3 / d\tau = (z_1^2 + z_2^2)(\beta z_2 + \alpha z_1)$$
$$dz_2 / d\tau = z_3, \quad dz_4 / d\tau = (z_1^2 + z_2^2)(\beta z_1 - \alpha z_2) \tag{1.1}$$
$$(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

система (1.1) является эволюционной и описывает поведение исходных систем на временах $t \sim O(\sqrt{\varepsilon}^{-1})$.

Здесь система (1.1) будет преобразована к виду, позволяющему провести ее качественное исследование во всем фазовом пространстве.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (1.1) инвариантна относительно непрерывной группы преобразований — одновременный поворот в плоскостях z_1z_2 и z_4z_3 на угол ϑ. Следовательно, число искомых функций в (1.1) можно уменьшить на единицу [2], для чего необходимо найти инварианты инфинитезимального оператора группы и принять их за новые переменные. Для указанной группы оператор и его инварианты имеют вид

$$M \equiv z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} - z_4 \frac{\partial}{\partial z_3} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_4}$$

$$c_1 = z_1^2 + z_2^2, \qquad c_2 = z_3^2 + z_4^2, \qquad c_3 = \frac{z_1z_3 - z_2z_4}{z_1z_4 + z_2z_3}$$

Вводим новые искомые функции

$$r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \qquad \rho = \sqrt{z_3^2 + z_4^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{z_1z_3 - z_2z_4}{z_1z_4 + z_2z_3} \tag{1.2}$$

Для однозначности отображения пространства Z в пространство r, ρ, φ полагаем $r \geqslant 0$, $\rho \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Тогда, если $r(\tau)$ либо $\rho(\tau)$ в некоторый момент времени обращаются в нуль, то $\varphi(\tau)$ в этой точке скачком меняется на π. В остальных точках фазового пространства преобразование (1.2) непрерывно.

В новых переменных система (1.1) будет инвариантна относительно следующей группы растяжений:

$$r' = \lambda r, \quad \rho' = \lambda^2 \rho, \quad \tau' = \lambda^{-1} \tau \quad (\lambda > 0)$$

Введем новые переменные $R = \rho / r^2$, $dt = r d\tau$ и перейдем к декартовым координатам $x = R \sin \varphi$, $y = R \cos \varphi$. Тогда система (1.1) примет вид

$$dx / dt = \alpha - 3xy, \qquad dy / dt = \beta + x^2 - 2y^2 \tag{1.3}$$

Итак, в качестве следствия системы (1.1) получена система (1.3) второго порядка, исследование фазовых траекторий которой будет проведено ниже стандартными методами.

2. Если в системе (1.3) произвести масштабное преобразование переменных: $x = x_* x'$, $y = y_* y'$, $t = t_* t'$, то путем соответствующего подбора постоянных x_*, y_*, t_* можно уменьшить число параметров в правой части (1.3) до одного. Поэтому ниже, в тех случаях, когда это удобно, вместо α и β, входящих в (1.3), будем употреблять обозначения $\sin \psi$ и $\cos \psi$.

Заметим, что система (1.3) остается инвариантной при замене $x \to (-x)$, $y \to (-y)$, $t \to (-t)$. Следовательно, картина фазовых траекторий симметрична относительно начала координат, но направление движения по симметричным траекториям различно, поэтому, если имеется устойчивая особая точка, то симметричная ей будет неустойчивой.

Анализ показывает, что при всех значениях α и β $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$ в конечной части плоскости расположены две особые точки, причем при $\alpha > 0$ особые точки лежат в первом и третьем квадрантах, а при $\alpha < 0$ — во втором и четвертом. При этом особая точка, расположенная в верхней части фазовой плоскости всегда устойчива, а в нижней — неустойчива.

В зависимости от значений параметра $\psi \in [0, 2\pi]$ особые точки имеют следующий тип: при $\psi \in [0, \psi_0)$ и $\psi \in (2\pi - \psi_0, 2\pi]$ — узел, при $\psi = \psi_0$ и $\psi = 2\pi - \psi_0$ — логарифмический узел, при $\psi \in (\psi_0, \pi)$ и $\psi \in (\pi, 2\pi - \psi_0)$ — фокус, при $\psi = \pi$ — центр. Здесь $\psi_0 = \operatorname{arctg}(6\sqrt{6} / 47) \approx 18°$.

На плоскости xy при любых значениях ψ особые точки располагаются на замкнутой кривой

$$4y_0^4 + 5x_0^2 y_0^2 + x_0^4 = 1$$

охватывающей начало координат, причем при $|y_0| > 2\sqrt{6}\,|x_0|$ особая точка — узел, при $|y_0| = 2\sqrt{6}\,|x_0|$ — логарифмический узел, при $|y_0| < 2\sqrt{6}\,|x_0|$ — фокус, при $y_0 = 0$ — центр.

Бесконечно удаленные точки не являются стационарными особыми точками для системы (1.3), но при любых значениях параметра ψ существует единственная траектория, проходящая через бесконечно удаленную точку, расположенную в «конце» оси y. В случае, когда $\sin \psi \neq 0$, при $y \to \pm \infty$ эта фазовая траектория асимптотически представима формулой

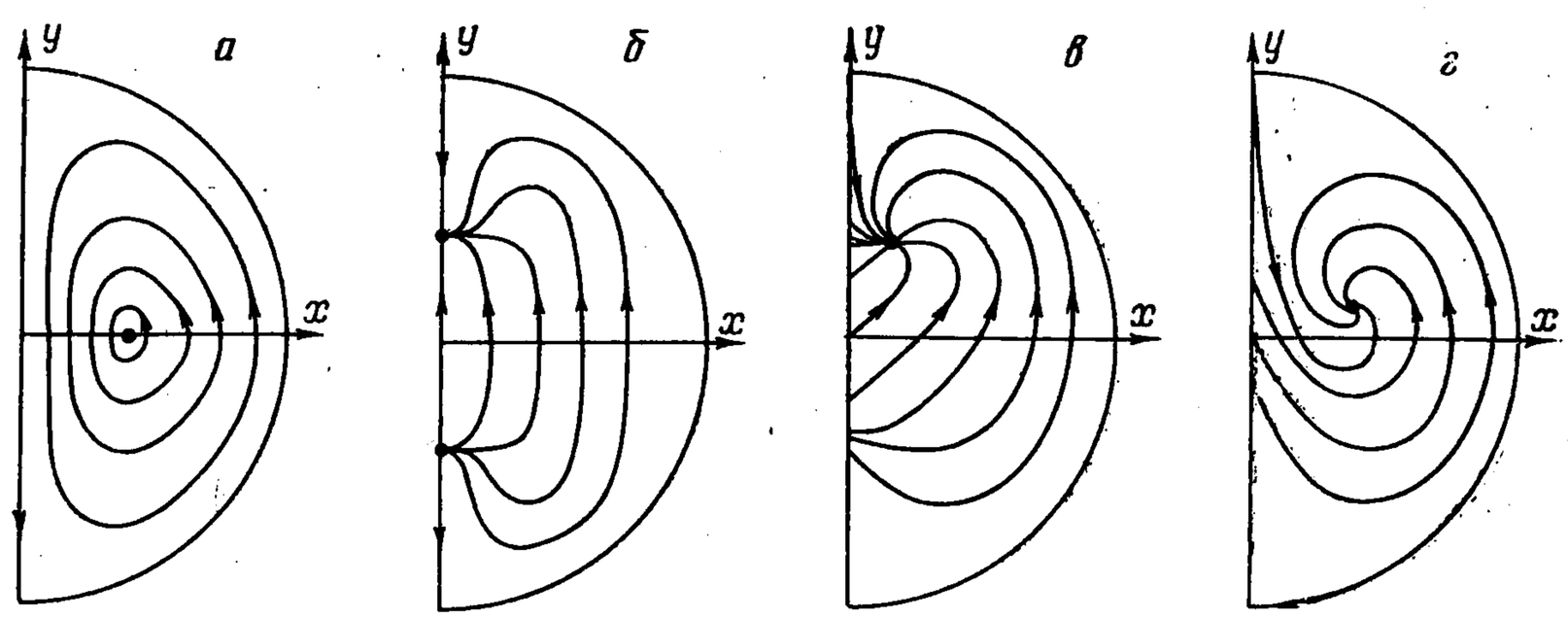
$$x = (\sin \psi) / 5y + O(1 / y^3) \tag{2.1}$$

При $\sin \psi = 0$ эта траектория тождественно совпадает с осью y.

Изучение особых точек позволяет получить картину фазовых траекторий лишь локально в окрестности этих точек. Выяснение поведения фазовых траекторий на всей плоскости удобно начать со случая $\psi = \pi$, что соответствует $\alpha = 0$, $\beta < 0$. В этом случае общий интеграл системы (1.3) имеет вид

$$x^2 + y^2 - \beta / 2 = cx^{4/3} \tag{2.2}$$

Из (2.2) следует, что в случае $\psi = \pi$ фазовая плоскость xy системы (1.3) целиком заполнена замкнутыми, вложенными одна в другую кривыми, охватывающими особые точки. Ось y является замкнутой траекторией, проходящей через бесконечно удаленную точку. На фигуре, *а* показано качественное поведение фазовых траекторий в этом случае (напомним, что траектории симметричны относительно начала координат, а направления движения на симметричных траекториях противоположны).



В общем случае при $\psi \neq \pi$ система (1.3) не интегрируема, и для построения ее полного фазового портрета необходимо выяснить вопрос о существовании у нее предельных циклов [3]. Из характера особых точек системы (1.3) следует, что любой из предельных циклов в случае их существования может охватывать лишь одну из особых точек. Вокруг особой точки предельных циклов заведомо не будет, если удастся показать, что траектория, проходящая через бесконечно удаленную точку, стремится к этой особой точке при $t \to +\infty$ либо при $t \to -\infty$. Для доказательства применим прием, основанный на использовании функции Ляпунова, для построения которой используем общий интеграл (2.2), найденный для $\psi = \pi$. Пусть уравнение $H(x, y, c) = 0$ задает семейство простых замкнутых непересекающихся кривых, охватывающих особую точку и заполняющих некоторую область G. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — траектория, расположенная в G. Рассмотрим функцию $H(x(t), y(t), c)$. Если ее производная, вычисленная в силу системы (1.3), окажется отрицательно определенной в G, то любая траектория, попадающая в эту область, будет стремиться к особой точке при $t \to +\infty$. Доказательство будет закончено, если покажем, что траектория, проходящая через бесконечно удаленную точку, попадает в G.

Будем считать, что $\alpha > 0$, тогда одна из особых точек системы лежит в первом квадранте.

Если в (1.3) начало координат перенести в особую точку, то получим

$$\begin{aligned} dx'' / dt &= -3y_0x'' - 3y'' - 3x''y \\ dy'' / dt &= 2x'' - 4y_0y'' + x''^2 - 2y''^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $y_0 \geqslant 0$ — ордината особой точки системы.

При $y_0 = 0$ система (2.3) имеет общий интеграл

$$H'' \equiv x''^2 + 2x'' + y''^2 + {}^3/_2 = c\,(x'' + 1)^{4/3} \qquad (c \geqslant {}^3/_2)$$

Это семейство замкнутых непересекающихся кривых, охватывающих начало координат и заполняющих полуплоскость $x'' > -1$.

Найдем полную производную от H'' в силу уравнений (2.3)

$$W = \frac{dH''}{dt} = \frac{-2y_0(x''+2)(x''^2+2y''^2)}{(x''+1)^{7/3}}$$

Очевидно, что $W < 0$ при $x'' > -1$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Тем самым показано, что любая траектория системы (1.3), попадающая в правую полуплоскость, стремится к особой точке.

Из формулы (2.1) следует, что траектория, проходящая через бесконечно удаленную точку, обязательно попадает в правую полуплоскость. Доказательство отсутствия предельных циклов в системе (1.3) при $\psi \neq \pi$ закончено.

Теперь можно описать общую картину поведения фазовых траекторий системы (1.3).

Все траектории при $t \to +\infty$ приближаются к особой точке, расположенной в верхней полуплоскости, а при $t \to -\infty$ — к точке в нижней полуплоскости. Фиг., *б* показывает поведение траекторий при $\psi = 0$. Фиг. *в*, показывает общий вид поведения траекторий в случае узла.

Поведение фазовых траекторий в случае, когда особые точки являются фокусами, показано на фиг., *г*. Число нулей функции $y(t)$, соответствующей произвольно взятой фазовой траектории, отличается не более чем на четыре от числа точек пересечения с осью x фазовой траектории, проходящей через начало координат.

Из линейной теории можно получить оценку для числа пересечений с осью x целой траектории, проходящей через начало координат

$$N \sim \frac{2\sqrt{6}}{7\pi} |\operatorname{ctg}\psi| \quad \text{при } \psi \to \pi$$

Опишем поведение функций $x(t)$, $y(t)$ в случае, когда особые точки системы (1.3) не являются центрами. В этом случае, все траектории, идущие из одной особой точки в другую и остающиеся в конечной части фазовой плоскости, определены при $t \in (-\infty, \infty)$ и имеют своими предельными значениями координаты особых точек.

Функции $x(t)$, $y(t)$, соответствующие фазовой траектории, проходящей через бесконечно удаленную точку (для системы (1.3) она не является особой), в окрестности этой точки имеют асимптотическое представление

$$y \sim {}^1/_2 (t - t_0)^{-1}, \qquad x \sim {}^2/_5\, \alpha\, (t - t_0) \tag{2.4}$$

Следовательно, они также определены при $t \in (-\infty, \infty)$, причем $y(t)$ при $t = t_0$ имеет полюс первого порядка.

3. Установим из системы (1.3) связь функций $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$ системы (1.1) с функциями $x(t)$ и $y(t)$, поведение которых теперь известно.

Рассмотрим тождество

$$(z_1^2 + z_2^2)\, z_4 = (z_1 z_4 + z_2 z_3)\, z_1 - (z_1 z_3 - z_2 z_4)\, z_2$$

Оно справедливо при произвольных z_1, z_2, z_3, z_4. Если же эти функции являются решениями системы (1.1), то с помощью преобразований, рас-

смотренных в п. 1, можно получить следующее уравнение для $z_1(t)$:

$$dz_1 / dt = yz_1 \pm x\sqrt{r^2 - z_1^2}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$z_1 = r(t)\sin\left(\int_0^t x(\vartheta)\,d\vartheta + c_1\right) \tag{3.1}$$

Аналогично из тождества

$$(z_1^2 + z_2^2)\,z_3 = (z_1z_4 + z_2z_3)\,z_2 + (z_1z_3 - z_2z_4)\,z_1$$

получаем

$$z_2 = r(t)\cos\left(\int_0^t x(\vartheta)\,d\vartheta + c_1\right) \tag{3.2}$$

Из формул (3.1), (3.2) следует, что поведение решений системы (1.1) полностью определяется функциями $x(t)$ и $y(t)$, задаваемыми (1.3), в случае, если известна связь между t и τ, определяемая уравнением $dt = rd\tau$.

Зная поведение $y(t)$ из (1.3), можно выяснить характер $r(t)$

$$r(t) = r_0 \exp\left(\int_0^t y(\vartheta)\,d\vartheta\right) \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что для ограниченных $y(t)$ функция $r(t)$ строго положительна, а в случае, если $y(t)$ имеет при $t = t_0$ особенность вида (2.4), в окрестности этой точки $r(t) \sim \sqrt{|t - t_0|}$. Из (3.3) следует, что при $y(t) \not\equiv \mathrm{const}$ функция $r(t)$ экспоненциально растет при $t \to \pm\infty$. Очевидно, что в точках, где фазовая траектория пересекает ось x, $r(t)$ имеют локальные экстремумы.

Зависимость $\tau(t)$ определяется формулой

$$\tau = \int_0^t \frac{d\vartheta}{r(\vartheta)} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что $\tau(t)$ определена при $t \in (-\infty, \infty)$, строго монотонно возрастает и, если $y(t) \not\equiv \mathrm{const}$, то функция $\tau(t)$ ограничена, причем область изменения ее имеет порядок $L \sim 1 / y_0$ $(y_0 > 0)$. В окрестности точки $t = t_0$, где $r(t)$ обращается в нуль, имеем $\tau \sim \pm\sqrt{|t - t_0|}$. Следовательно, обратная функция $t(\tau)$ определена на конечном интервале, монотонна, неограничена. Отсюда следует, что сложная функция $r[t, (\tau)]$, в случае, если $y(t) \not\equiv \mathrm{const}$, неотрицательна, определена на конечном интервале, на границах области определения обращается в $+\infty$ (это будут полюсы первого порядка), имеет столько локальных экстремумов, сколько раз фазовая траектория $y(t)$ пересекает ось x. Если $r(\tau_0) = 0$, то в окрестности точки $\tau = \tau_0$ будет $r(\tau) \sim |\tau - \tau_0|$.

Если $y(t) \equiv y_0 = \mathrm{const}$, то функцию $r(\tau)$ можно выписать в явном виде

$$r(\tau) = r_0 / (1 - y_0r_0\tau)$$

Функция $r(\tau)$, как это видно из формул (3.2) и (3.1), описывает изменение амплитуды колебаний функций $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$. Форма и частота коле-

баний зависит от функции

$$\Phi = \int_0^t x(\vartheta)\, d\vartheta.$$

При $t \to \infty$ будет $\Phi(t) \sim x_0 t$, значит, при независимом переменном τ период колебаний стремится к нулю при стремлении τ к границе области определения.

4. Рассмотрим критический случай, когда особые точки системы (1.3) являются центрами.

В этом случае $x(t)$ и $y(t)$ — периодические функции. В силу симметрии фазовых траекторий функция $y(t)$ имеет среднее значение за период равное нулю, следовательно, $r(t)$, определяемая формулой (3.3), периодическая функция. Если $y(t)$ ограничена, то $r(t)$ — строго положительная функция. В этом случае функция $\tau(t)$ из формулы (3.4) строго монотонна, и ее можно представить в виде

$$\tau(t) = gt + \varphi(t), \qquad g = \int_0^{T_0} \frac{d\vartheta}{z(\vartheta)}$$

где $\varphi(t)$ некоторая периодическая функция с тем же периодом T_0, что и $r(t)$. В этом случае $r(\tau)$, полученная по формулам (3.3), (3.4) в параметрическом виде, будет периодической функцией с периодом $T_1 = gT_0$.

Действительно, зафиксируем произвольное τ_0. В силу неограниченности и строгой монотонности $\tau(t)$ найдется единственное $t_0 = t_0(\tau_0)$; для этого значения t_0 найдем $r(t_0)$. Рассмотрим значения параметра $t_1 = t_0 + T_0$. Тогда $r(t_1) = r(t_0)$, $\tau_1 = g(t_0 + T_0) + \varphi(t_0) = \tau_0 + T_1$. Отсюда получаем для любого τ равенство $r(\tau + T_1) = r(\tau)$

Очевидно, что период T_1 зависит от выбора замкнутой траектории системы (1.3) на плоскости xy.

Функция $r(\tau)$ приобретает более простой вид, когда замкнутая траектория совпадает с осью y. В этом случае $r(\tau)$ удовлетворяет уравнению $d^2r / d\tau^2 + 2r^3 = 0$; его общее решение выражается через эллиптические функции.

Хотя функция $r(\tau)$ получилась периодической, функции $z_1(\tau)$ и $z_2(\tau)$, вообще говоря, будут только почти периодическими. Это следует из того, что в правых частях (3.2) и (3.1) стоит произведение периодических функций с несоизмеримыми периодами.

5. *Пример*. Пусть в системе (1.1) $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.8$, тогда

$$\psi = \arcsin(\alpha / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = 76°$$

Следовательно, особые точки системы (1.3) являются фокусами и расположены в первом и третьем квадратах. Область определения функции $r(\tau)$ имеет порядок $L \sim 1 / y_0 = 12$, на границах области определения $r(\tau)$ имеют полюсы первого порядка, причем число локальных экстремумов можно найти по приближенной формуле

$$N \simeq \frac{1}{7\pi} \sqrt{24\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 - 1}\, \ln\left[\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2 - 1\right]$$

Здесь x_0, y_0 — координаты особой точки. В рассматриваемом случае $x_0 = 0.9$, $y_0 = 0.08$, значит, $N = 3$.

Таким образом, выяснен характер поведения решения системы (1.1) в зависимости от значений параметров, входящих в правую часть. Установлено, что система имеет ограниченное общее решение, определенное при $\tau \in (-\infty, \infty)$ лишь в исключительных случаях при наложении на параметры условий типа равенства. Во всех остальных случаях система имеет неограниченное общее решение, определенное на конечном интервале времени, характер которого при любых начальных данных полностью определяется картиной фазовых траекторий системы (1.3).

В заключение автор выражает признательность А. М. Молчанову за постоянное внимание и помощь в работе.

Поступила 18 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Н. В. О получении эволюционных уравнений для квазилинейных систем. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
2. Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Изд-во Новосибирск. гос. ун-та, 1966.
3. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1949.