Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ

А. В. Кряжимский, Ю. С. Осипов

(Свердловск)

Устанавливаются достаточные условия успешного завершения дифференциально-разностной игры сближения в случае, когда целевое множество является подмножеством пространства начальных состояний системы. Работа примыкает к исследованиям [1–6].

1. Рассмотрим систему

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + A_\tau(t)\,x(t-\tau) + B(t)\,u - C(t)\,v + w(t) \qquad (1.1)$$

Здесь x — фазовый вектор; векторы u и v — управления первого и второго игроков соответственно, причем

$$u \in P(t), \quad v \in Q(t) \qquad (1.2)$$

где $P(t)$, $Q(t)$ — выпуклые компакты, непрерывные по t; матрицы $A(t)$, $A_\tau(t)$, $B(t)$, $C(t)$ непрерывны; $w(t)$ интегрируема на любом отрезке оси t; $\tau = \mathrm{const} > 0$. Назовем состоянием системы (1.1) в момент t отрезок $x_t(s) = x(t+s)$ траектории (1.1) (здесь и далее s меняется в пределах $-\tau \leqslant s \leqslant 0$).

Пусть H — пространство вектор-функций $x(s)$, суммируемых с квадратом величины $\|x(s)\|$, с нормой

$$\|x(s)\|_\tau = \left(\|x(0)\|^2 + \int_{-\tau}^{0} \|x(s)\|^2\,ds\right)^{1/2}, \quad \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

$\langle x, y\rangle$ — скалярное произведение в H.

Рассматриваемая игра состоит в следующем [6].

Заданы начальный момент t_0, начальное состояние $x^\circ(s) \in H$, конечный момент $\vartheta \geqslant t_0$ и некоторое множество $M \subset H$ (цель). Первый игрок, зная в каждый момент $t \in [t_0, \vartheta]$ состояние $x_t[\cdot] = x_t[s] = x[t+s]$ системы, стремится выбрать свое управление так, чтобы конечное состояние $x_\vartheta[s]$ лежало в M. Второй игрок выбирает свое управление любым способом и стремится, напротив, к тому, чтобы $x_\vartheta[s] \notin M$.

Уточним постановку задачи. Введем определения [5, 6].

Определение 1.1. Программным управлением первого (второго) игрока называется суммируемая на $[t_0, \vartheta]$ функция $u(t)$ $(v(t))$, удовлетворяющая при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ условию

$$u(t) \in P(t) \qquad (v(t) \in Q(t))$$

Множество всех программных управлений первого (второго) игрока обозначим через $\{u\}$ $(\{v\})$.

Определение 1.2. 1°. Стратегией U (V) первого (второго) игрока называется правило, ставящее в соответствие каждой паре $p = \{t, x(s)\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(s) \in H$, называемой позицией игры, множество $U(p) = U(t, x(s)) \subset P(t)$ ($V(p) = V(t, x(s)) \subset Q(t)$).

2°. Стратегия U (V) первого (второго) игрока называется допустимой, если множества $U(t, x(s))$ ($V(t, x(s))$), определяющие эту стратегию, являются выпуклыми, замкнутыми и полунепрерывными сверху относительно включения по t, $x(s)$ (по t — справа).

3°. Тривиальная стратегия $U_т$ ($V_т$) первого (второго) игрока задается множествами $U(t, x(s)) = P(t)$ ($V(t, x(s)) = Q(t)$).

4°. Программная стратегия U_u (V_v) первого (второго) игрока задается множествами $U(t, x(s)) = \{u(t)\}$ ($V(t, x(s)) = \{v(t)\}$), где $u(t)$ ($v(t)$) — программное управление первого (второго) игрока.

Определение 1.3. 1°. Движением $x[t, p_0, U, V_т]$ системы (1.1) из позиции $p_0 = \{t_0, x^\circ(s)\}$, отвечающим стратегиям U, $V_т$ (U — допустима), называется всякая абсолютно непрерывная на $[t_0, \vartheta]$ функция $x[t]$, удовлетворяющая условию

$$x[t_0 + s] = x^\circ(s) \tag{1.3}$$

и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ — равенству

$$x^\cdot[t] = A(t)x[t] + A_\tau(t)x[t-\tau] + B(t)u[t] - C(t)v[t] + w(t)$$

где суммируемые функции $u[t]$ и $v[t]$ удовлетворяют условиям: $u[t] \in U(t, x_t[s])$, $v[t] \in Q(t)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

2°. Движением $x[t, p_0, U_u, V_v]$ системы (1.1) из позиции $p_0 = \{t_0, x^\circ(s)\}$, отвечающим стратегиям U_u, V_v, называется абсолютно непрерывная функция $x[t]$, удовлетворяющая условию (1.3) и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ — равенству

$$x^\cdot[t] = A(t)x[t] + A_\tau(t)x[t-\tau] + B(t)u(t) - C(t)v(t) + w(t)$$

Определенные таким способом движения системы существуют [7].

Задача 1. Заданы начальная позиция $p_0 = \{t_0, x^\circ(s)\}$, конечный момент $\vartheta \geqslant t_0$ и выпуклое замкнутое ограниченное множество $M \subset H$ (цель). Требуется построить допустимую стратегию U° первого игрока такую, что все движения $x[t] = x[t, p_0, U^\circ, V_т]$ удовлетворяют условию $x_\vartheta[s] \in M$.

Приведем также следующие определения [6,7].

Определение 1.4. Множества $W_t \subset H$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильны, если, каковы бы ни были $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $x(s) \in W_{t_*}$, $v(t) \in \{v\}$, существует $u(t) \in \{u\}$ такое, что движение $x[t] = x[t, \{t_*, x(s)\}, U_u, V_v]$ удовлетворяет условию $x_{t^*}[s] \in W_{t^*}$.

Определение 1.5. Множество $W_{t_*}(\vartheta)$, $t_* \leqslant \vartheta$, программного поглощения цели M системой (1.1) в момент ϑ есть совокупность всех $x(s) \in H$, обладающих свойством: для любого $v(t) \in \{v\}$ существует $u(t) \in \{u\}$ такое, что движение $x[t] = x[t, \{t_*, x(s)\}, U_u, V_v]$ удовлетворяет условию $x_\vartheta[s] \in M$.

В дальнейшем следует иметь в виду, что встречающиеся ниже понятия, не сопровождаемые пояснениями, содержатся в [5,6].

Из леммы 4 работы [6] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть начальная позиция $p_0 = \{t_0, x^\circ(s)\}$ такова, что $x^\circ(s) \in W_{t_0}(\vartheta)$. Если множества $W_t(\vartheta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильны, то экстремальная к ним стратегия U^e разрешает задачу 1.

В работе [6] на основании теоремы о неподвижной точке многозначных отображений установлены достаточные условиях сильной u-стабильности множеств программного поглощения конечномерной цели в общем случае нелинейной системы с последействием. Аналогичным образом формулируются такие условия и для задачи наведения на функциональную цель [1]. В рассматриваемом случае линейной системы укажем необходимые и достаточные (и вытекающие из них эффективные достаточные) условия сильной u-стабильности множеств программного поглощения функциональной цели.

Сформулируем два вспомогательных утверждения, аналогичных соответствующим утверждениям из [5].

Лемма 1.1. $x(s) \in W_t(\vartheta)$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{\|h\|_\tau \leqslant 1} \{\rho(\vartheta, t, h) + \langle A_{t,\vartheta} x, h\rangle\} \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Здесь

$$\rho(\vartheta, t, h) = r(\vartheta, t, h) - \min_{y \in M} \langle y, h\rangle$$

$$r(t^*, t_*, h) = r_1(t^*, t_*, h) - r_2(t^*, t_*, h) + r_3(t^*, t_*, h)$$

$$r_1(t^*, t_*, h) = \max_{u \in \{u\}} \left\langle h, \int_{t_*}^{t^*} F(t^* + s, \xi) B(\xi) u(\xi)\, d\xi \right\rangle$$

$$r_2(t^*, t_*, h) = \max_{v \in \{v\}} \left\langle h, \int_{t_*}^{t^*} F(t^* + s, \xi) C(\xi) v(\xi)\, d\xi \right\rangle$$

$$r_3(t^*, t_*, h) = \left\langle h, \int_{t^*}^{t^*} F(t^* + s, \xi) w(\xi)\, d\xi \right\rangle$$

$$A_{t_*, t^*} y(s) = F(t^* + s, t_*) y(0) +$$

$$+ \int_{-\tau}^{0} F(t^* + s, t_* + \tau + \eta) A_\tau(t_* + \tau + \eta) y(\eta)\, d\eta = f(s, y)$$

при $\delta = t^* - t_* \geqslant \tau$

$$A_{t_*, t^*} y(s) = \begin{cases} f(s, y), & s \in [-\delta, 0] \\ y(s + \delta), & s \in [-\tau, -\delta) \end{cases}$$

при $\delta = t^* - t_* < \tau$

матрица $F(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям: $F(\xi, \xi) = E$ — единичная матрица

$$F(\xi, \eta) = 0 \text{ при } \eta > \xi \tag{1.5}$$

$\partial F(\xi, \eta)/\partial\xi = A(\xi) F(\xi, \eta) + A_\tau(\xi - \tau) F(\xi - \tau, \eta)$ при $\eta < \xi$.

---

[1] Этот вопрос рассматривался в работе: Осипов Ю. С. Задачи теории дифференциально-разностных игр. Докторская диссертация. Свердловск, 1971.

Лемма 1.2. Множества $W_t(\vartheta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильны тогда и только тогда, когда

$$\inf_{h\in S}\{r(t^*, t_*, h) + \inf_{y\in W_{t_*}(\vartheta)}\langle A_{t_*, t^*}y, h\rangle - \inf_{y\in W_{t^*}(\vartheta)}\langle y, h\rangle\} \geqslant 0$$

при любых $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$. Здесь S — множество всех $h \in H$, $\| h \|_\tau \leqslant 1$, на которых определена разность

$$\alpha(h) = \inf_{y\in W_{t_*}(\vartheta)}\langle A_{t_*, t^*}y, h\rangle - \inf_{y\in W_{t^*}(\vartheta)}\langle y, h\rangle$$

(значения $\alpha(h) = \pm\infty$ допускаются).

Пусть B_{t_*,t^*} — оператор, сопряженный к A_{t_*,t^*}, т. е. такой, что для любых h и x из H

$$\langle A_{t_*, t^*}x, h\rangle = \langle x, B_{t_*,t^*}h\rangle$$

Нетрудно установить, что B_{t_*,t^*} имеет вид

$$B_{t_*, t^*}h(s) = T'(t^*, t_*, s)h(0) + \int_{-\tau}^{0} T'(t^* + \eta, t_*, s)h(\eta)d\eta = g(s, h)$$

при $\delta = t^* - t_* \geqslant \tau$

$$B_{t_*, t^*}h(s) = \begin{cases} g(s, h), & s \in [-\tau, -\tau+\delta], \; s = 0 \\ h(s-\delta), & s \in (-\tau+\delta, 0) \end{cases}$$

при $\delta = t^* - t_* < \tau$

Здесь

$$T(t, \xi, s) = \begin{cases} F(t, \xi), & s = 0 \\ F(t, \xi+\tau+s)A_\tau(\xi+\tau+s), & s \in [-\tau, 0) \end{cases}$$

и штрих означает транспонирование.

Из леммы 1.2. и теоремы об отделимости выпуклых множеств в пространстве H вытекают следующие необходимые и достаточные условия сильной u-стабильности множеств $W_t(\vartheta)$ программного поглощения.

Теорема 1.2. Множества $W_t(\vartheta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильны тогда и только тогда, когда при любых $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $t^* - t_* < \tau$

$$\inf_{\|h\|_\tau\leqslant 1}\{r(t^*, t_*, B_{t^*, \vartheta}h) + \inf_{y\in W_{t_*}(\vartheta)}\langle y, B_{t_*, \vartheta}h\rangle -$$
$$- \inf_{y\in W_{t^*}(\vartheta)}\langle y, B_{t_*, \vartheta}h\rangle\} \geqslant 0 \qquad (1.6)$$

2. Проверка условия (1.6) затруднительна. Укажем, опираясь на теорему 1.2, эффективные достаточные условия сильной u-стабильности множеств $W_t(\vartheta)$.

Обозначим через $W_t(\vartheta, \eta)$ множество программного поглощения в момент ϑ замкнутой η-окрестности M^η множества M. В силу леммы 1.1 и определения оператора $B_{t,\vartheta}$

$$W_t(\vartheta, \eta) = \{x(s) \mid \min_{\|h\|_\tau\leqslant 1}[\rho(\vartheta, t, h, \eta) + \langle x, B_{t, \vartheta}h\rangle] \geqslant 0\} \qquad (2.1)$$

$$\rho(\vartheta, t, h, \eta) = \rho(\vartheta, t, h) + \eta\| h \|_\tau \qquad (2.2)$$

Пусть далее выполняются следующие условия:

а) функция $\rho(\vartheta, t, h)$ выпукла по h при всех $t \in [t_0, \vartheta]$;

б) множества $W_t(\vartheta, \eta)$ не пусты при всех $\eta > 0$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Введем обозначения

$$A_t = A_{t,\vartheta}H, \qquad B_t = B_{t,\vartheta}H$$

если $h \in B_t$, то $K_t(h) = \{g \mid B_{t,\vartheta}g = h\}$.

Нетрудно установить, что подпространство E_t пространства H, ортогональное к подпространству $\bar{A}_t$ (к замыканию A_t), есть ядро оператора $B_{t,\vartheta}$. Отсюда и из того, что H является прямой суммой $\bar{A}_t$ и E_t, вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.1. Если $h \in B_t$, то существует единственный элемент h_t из $K_t(h)$, принадлежащий $\bar{A}_t$, и

$$K_t(h) = h_t + E_t$$

Положим

$$\rho_t(h, \eta) = \sup\nolimits_{y \in W_t(\vartheta, \eta)} \langle y, h\rangle$$

Лемма 2.2. Если $h \in B_t$, то

$$\rho_t(h, \eta) = \inf\nolimits_{g \in K_t(h)} \rho(\vartheta, t, -g, \eta)$$

Доказательство. Пусть $h \in B_t$. Ввиду (2.1) для любого $x \in W_t(\vartheta, \eta)$ и любого $g \in K_t(h)$

$$\langle x, h\rangle \leqslant \rho(\vartheta, t, -g, \eta$$

откуда

$$\rho_t(h, \eta) \leqslant \inf\nolimits_{g \in K_t(h)} \rho(\vartheta, t, -g, \eta)$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in W_t(\vartheta, \eta)$ такой, что

$$\langle x, h\rangle > \inf\nolimits_{g \in K_t(h)} \rho(\vartheta, t, -g, \eta) - \varepsilon \| h_t \|_{\tau} \tag{2.3}$$

Пусть $k \in \bar{A}_t$. Положим $N(k) = k + E_t$. На $\bar{A}_t$ определим функционал

$$p(k) = \inf\nolimits_{g \in N(k)} \rho(\vartheta, t, -g, \eta)$$

По лемме 2.1 $N(l_t) = K_t(l)$, $l \in B_t$, поэтому

$$p(l_t) = \inf\nolimits_{g \in K_t(l)} \rho(\vartheta, t, -g, \eta) \tag{2.4}$$

Нетрудно установить, что функционал $p(k)$ выпукл, положительно однороден и ограничен.

Зададим подмножество L пространства $\bar{A}_t$ следующим образом: y из $\bar{A}_t$ принадлежит L тогда и только тогда, когда для всех $k \in \bar{A}_t$ $\langle y, k\rangle \leqslant p(k)$.

Можно показать, что $x \in W_t(\vartheta, \eta)$ тогда и только тогда, когда $A_{t,\vartheta}\, x \in L$. В самом деле, пусть $A_{t,\vartheta}\, x \in L$. Пусть g — произвольный элемент из H и $B_{t,\vartheta}\, g = l$. Тогда, учитывая (2.4), получим

$$\langle x, B_{t,\vartheta} g\rangle = \langle x, B_{t,\vartheta} l_t\rangle = \langle A_{t,\vartheta} x, l_t\rangle \leqslant p(l_t) \leqslant \rho(\vartheta, t, -g, \eta)$$

откуда $x \in W_t(\vartheta, \eta)$. Обратно, пусть $x \in W_t(\vartheta, \eta)$. Пусть k — произвольный элемент из $\bar{A}_t$. Для любого $g \in N(k)$

$$\langle x, B_{t,\vartheta}\, g\rangle + \rho(\vartheta, t, g, \eta) \geqslant 0$$

или, поскольку $\langle A_{t,\vartheta}\, x, g\rangle = \langle A_{t,\vartheta}\, x, k\rangle$

$$\langle A_{t,\vartheta}\, x, -k\rangle \leqslant \rho\, (\vartheta, t, g, \eta)$$

В силу произвольности $g \in N\,(k)$

$$\langle A_{t,\vartheta} x, -k\rangle \leqslant \inf_{g \in N(k)} \rho\, (\vartheta, t, g, \eta) = p\,(-k)$$

значит, $A_{t,\vartheta}\, x \in L$.

Согласно теореме 2.2 [7]

$$p\,(k) = \max_{y \in L} \langle y, k\rangle \tag{2.5}$$

Пусть $0 < \eta_1 < \eta$. Исходя из (2.1), можно показать, что

$$A_{t,\vartheta} W_t\,(\vartheta, \eta_1) + \{y \in A_t \mid \| y \|_\tau \leqslant \eta - \eta_1\} \subset A_{t,\vartheta} W_t\,(\vartheta, \eta) \subset L$$

Тогда для элемента $x_1 \in A_{t,\vartheta}\, W_t\,(\vartheta, \eta_1)$ в силу замкнутости L в $\bar{A}_t$ имеем

$$x_1 + S\,(\eta - \eta_1) \subset L$$

где $S\,(\eta - \eta_1)$ — замкнутый шар в $\bar{A}_t$ радиуса $\eta - \eta_1$ с центром в 0.

Пусть z — такой элемент из L, что $\langle z, h_t\rangle = p\,(h_t)$. Положим

$$C = \{y = \lambda x + (1 - \lambda)\, z \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ \ x \in x_1 + S\,(\eta - \eta_1)\}$$

Так как L выпукло, то $C \subset L$. Пусть ε — произвольное положительное число и элемент $y_1 = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)\, z$ таков, что $\| y_1 - z_1 \|_\tau < \varepsilon / 2$. Ясно, то $\lambda_1\,(\eta - \eta_1)$-окрестность элемента y_1 содержится в C. Поскольку $C \subset L$, заключаем, что в пространстве $\bar{A}_t$ некоторая δ-окрестность S_δ, $\delta < \varepsilon / 2$, элемента y_1 лежит в L. Так как $y_1 \in \bar{A}_t$, то найдется такой $y \in A_t = A_{t,\vartheta}\, H$, что $y \in S_\delta$; поэтому $\| y - z \|_\tau < \varepsilon$.

Поскольку $S_\delta \subset L$, элемент x, такой, что $A_{t,\vartheta}\, x = y$, принадлежит $W_t\,(\nu, \eta)$. Кроме того, с учетом (2.4), имеем

$$\langle x, h\rangle = \langle x, B_{t,\vartheta} h_t\rangle = \langle A_{t,\vartheta} x, h_t\rangle \geqslant \langle z, h_t\rangle - \varepsilon \| h_t \|_\tau = p\,(h_t) - \varepsilon \| h_t \|_\tau =$$
$$= \inf_{g \in K_t(h)} \rho\, (\vartheta, t, -g, \eta) - \varepsilon \| h_t \|_\tau$$

Соотношение (2.3) доказано. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть функция $z\,(\xi)$ суммируема на $[t_*, t^*]$, $\delta = t^* - t_* < \tau$, $t^* < \vartheta$. Тогда

$$Z\,(s) = A_{t^*,\vartheta} \int_{t_*}^{t^*} F\,(t^* + s, \xi)\, z\,(\xi)\, d\xi = \int_{t_*}^{t^*} F\,(\vartheta + s, \xi)\, z\,(\xi)\, d\xi$$

Доказательство. Пусть сначала $\Delta = \vartheta - t^* \geqslant \tau$. Тогда, применяя теорему Фубини, имеем

$$Z\,(s) = \beta\,(s) = \int_{t_*}^{t^*} \Phi\,(s, t^*, \xi)\, z\,(\xi)\, d\xi$$

$$\Phi\,(s, t, \xi) = F\,(\vartheta + s, t)\, F\,(t, \xi) + \int_{\xi - t^*}^{0} F\,(\vartheta + s, t + \tau + \eta)\, A_\tau\,(t + \tau + \eta)\, F\,(t + \eta, \xi)\, d\eta$$

Из свойств (1.5) матрицы $F\,(\xi, \eta)$ получаем

$$\partial \Phi\,(s, t, \xi) \,/\, \partial t = 0$$

для всех $t, \xi, t > \xi$. Отсюда для всех $\xi \in [t_*, t^*)$

$$\Phi\,(s, t^*, \xi) = \Phi\,(s, \xi, \xi) = F\,(\vartheta + s, \xi)$$

Следовательно, в случае, когда $\Delta = \vartheta - t^* \geqslant \tau$, утверждение леммы справедливо.

Пусть $\Delta = \vartheta - t^* < \tau$. Тогда при $s \in [-\Delta, 0]$, как и выше $Z(s) = \beta(s)$; при $s \in [-\tau, -\Delta)$

$$Z(s) = \int_{t_*}^{t^*} F(t^* + \Delta + s, \xi) z(\xi) d\xi = \beta(s)$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия а) и б). Тогда множества $W_t(\vartheta, \eta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, сильно u-стабильны при любом $\eta > 0$.

Доказательство. Покажем, что для любых $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $t^* \in (t_*, \vartheta]$, $t^* - t_* < \tau$, выполняется условие (1.6) теоремы 1.2. Пусть h_0 — произвольный элемент, $\|h_0\|_\tau \leqslant 1$, $B_{t_*,\vartheta}h_0 = h_1$, $B_{t^*,\vartheta}h_0 = h_2$. Пусть, далее, g — произвольный элемент из $K_{t^*}(h_2)$. Используя лемму 2.3 и выражения для $r_i(t^*, t_*, h)$ $(i = 1, 2, 3)$, получим

$$r_1(t^*, t_*, h_2) = \max_{u \in \{u\}} \left\langle g, \int_{t_*}^{t^*} F(\vartheta + s, \xi) B(\xi) u(\xi) d\xi \right\rangle = p_1(g)$$

$$r_2(t^*, t_*, h_2) = \max_{v \in \{v\}} \left\langle g, \int_{t_*}^{t^*} F(\vartheta + s, \xi) C(\xi) v(\xi) d\xi \right\rangle = p_2(g)$$

$$r_3(t^*, t_*, h_2) = \left\langle g, \int_{t_*}^{t^*} F(\vartheta + s, \xi) w(\xi) d\xi \right\rangle = p_3(g)$$

Следовательно

$$r(t^*, t_*, h_2) = p_1(g) - p_2(g) + p_3(g), \qquad g \in K_{t^*}(h_2) \tag{2.6}$$

По лемме 2.2

$$\inf_{y \in W_{t^*}(\vartheta, \eta)} \langle y, h_2 \rangle = -\rho_t(-h_2, \eta) = -\inf_{k \in K_{t^*}(h_2)} \rho(\vartheta, t^*, k, \eta)$$

Отсюда и из (2.6)

$$\begin{aligned} r(t^*, t_*, h_2) - \inf_{y \in W_{t^*}(\vartheta, \eta)} \langle y, h_2 \rangle &= \inf_{g \in K_{t^*}(h_2)} [\rho(\vartheta, t^*, g, \eta) + \\ + r(t^*, t_*, h_2)] &= \inf_{g \in K_{t^*}(h_2)} \{[r_1(\vartheta, t^*, g) + p_1(g)] - \\ - [r_2(\vartheta, t^*, g) + p_2(g)] &+ [r_3(\vartheta, t^*, g) + p_3(g)] + \eta \|h_2\|_\tau\} = \\ &= \inf_{g \in K_{t^*}(h_2)} \rho(\vartheta, t_*, g, \eta) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Далее

$$\inf_{y \in W_{t_*}(\vartheta, \eta)} \langle y, h_1 \rangle = -\rho_{t_*}(-h_1, \eta) = -\inf_{g \in K_{t_*}(h_1)} \rho(\vartheta, t_*, g, \eta) \tag{2.8}$$

Ввиду (2.7), (2.8) выражение, стоящее в (1.6) под знаком inf, при $h = h_0$ равно

$$a(h_0) = \inf_{g \in K_{t^*}(h_2)} \rho(\vartheta, t_*, g, \eta) - \inf_{g \in K_{t_*}(h_1)} \rho(\vartheta, t_*, g, \eta) \tag{2.9}$$

Очевидно

$$K_t(B_{t,\vartheta} h_0) = h_0 + K_t(0) \tag{2.10}$$

Из определения оператора A_{t_*,t^*} вытекает, что

$$B_{t^*,\vartheta} = B_{t_*,t^*}B_{t^*,\vartheta}$$

Поэтому, если $B_{t^*,\vartheta}g = 0$, то $B'_{t_*,\vartheta}g = 0$; следовательно, $K_{t_*}(0) \supset \supset K_{t^*}(0)$. Отсюда, из (2.9) и (2.10) и определения элементов h_1, h_2 вытекает, что $a(h_0) \geqslant 0$. В силу произвольности h_0 теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия а) и б) и множество $W_{t_0}(\vartheta)$ не пусто. Тогда множества $W_t(\vartheta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, не пусты и сильно u-стабильны.

Доказательство. Пусть $t^* \in (t_0, \vartheta]$. Покажем, что $W_{t^*}(\vartheta)$ не пусто. Пусть $x(s) \in W_{t_0}(\vartheta)$, $p = \{t_0, x(s)\}$, $v(t) \in \{v\}$. Докажем, что для некоторого $u^*(t) \in \{u\}$ движение $x^*[t] = x[t, p, U_{u^*}, V_v]$ удовлетворяет условию: $x^*_{t^*}[s] \in W_{t^*}(\vartheta)$. Пусть $\eta_i \to 0$, $\eta_i > \eta_{i+1} > 0$, и $u_i(t) \in \{u\}$ таковы, что движения $x^i[t] = x[t, p, U_{u_i}, V_v]$ удовлетворяют условиям $x_{t^*}{}^i[s] \in W_{t^*}(\vartheta, \eta_i)$. Такие $u_i(t)$ существуют, поскольку множества $W_t(\vartheta, \eta_i)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, по теореме 2.1 сильно u-стабильны и $x(s) \in \in W_{t_0}(\vartheta) \subset W_{t_0}(\vartheta, \eta_i)$.

Так как $\{u\}$ слабо бикомпактно в $L_2[t_0, t^*]$, можно считать (выбирая, если нужно, подпоследовательность), что

$$u_i(t) \to u^*(t) \quad \text{слабо в} \quad L_2[t_0, t^*] \tag{2.11}$$

По формуле Коши

$$x^i[t] = A_{t_0,t}x(0) + \int_{t_0}^{t} F(t, \xi)[B(\xi)u_i(\xi) - C(\xi)v(\xi) + w(\xi)]\,d\xi \tag{2.12}$$

Исходя из этого выражения, можно показать, что множество функций $\{x^i[t] \mid i = 1, 2, \ldots\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на $[t_0, t^*]$, т. е. компактно в $C[t_0, t^*]$. Поэтому можем считать (выбирая, если нужно, подпоследовательность), что $x^i[t] \to y(t)$ в $C[i_0, t^*]$. С другой стороны, из (2.11), (2.12) вытекает, что $x^i[t] \to x^*[t] = x[t, p, U_{u^*}, V_v]$ при любом $t \in [t_0, t^*]$. Поэтому $x^*[t] = y(t)$, откуда следует, что

$$x_{t^*}{}^i[s] \to x_{t^*}{}^*[s] \quad \text{в} \quad H \tag{2.13}$$

Выберем произвольный элемент $h \in H$. Так как $x_{t^*}{}^i \in W_{t^*}(\vartheta, \eta_i)$, то

$$\langle x_{t^*}{}^i, h\rangle \leqslant \rho_{t^*}(h, \eta_i)$$

Поскольку $\eta_i > \eta_{i+1}$, $W_{i^*}(\vartheta, \eta_i) \supset W_{t^*}(\vartheta, \eta_{i+1})$. Следовательно, $\rho_{t^*}(h, \eta_i)$ монотонно убывает при возрастании i. Поэтому, с учетом (2.13), имеем

$$\langle x_{t^*}{}^*, h\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle x_{t^*}{}^i, h\rangle \leqslant \inf_i \rho_{t^*}(h, \eta_i) \tag{2.14}$$

Значит, $x_{t^*}{}^* \in \bigcap_{\eta>0} W_{t^*}(\vartheta, \eta)$. Действительно, если $x_{t^*}{}^* \notin \bigcap_{\eta>0} W_{t^*}(\vartheta, \eta)$, то существует номер i_0 такой, что $x_{t^*}{}^* \notin W_{t^*}(\vartheta, \eta_{i_0})$, поэтому $\langle x_{t^*}{}^*, h\rangle > > \rho_{t^*}(h, \eta_{i_0})$ для некоторого h, что противоречит (2.14), справедливому для всех h. Но, очевидно, $\bigcap_{\eta>0} W_{t^*}(\vartheta, \eta) = W_{t^*}(\vartheta)$. Непустота $W_{t^*}(\vartheta)$ доказана.

Доказательство сильной u-стабильности дословно повторяет приведенное доказательство непустоты, с заменой всюду момента t_0 на произвольный момент $t_* \in [t_0, t^*)$.

3. Выясним условия, необходимые и достаточные для выполнения предположения б) (для непустоты всех множеств $W_t(\vartheta, \eta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, $\eta > 0$).

Лемма 3.1. $W_t(\vartheta, \eta)$ не пусто для любого $\eta > 0$ тогда и только тогда, когда $\rho(\vartheta, t, h) \geqslant 0$ для всех $h \in K_t(0) = \{h \mid B_{t,\vartheta} h = 0\}$.

Доказательство. Пусть $W_t(\vartheta, \eta)$ не пусто для любого $\eta > 0$; $y^{(\eta)} \in W_t(\vartheta, \eta)$. Тогда ввиду (2.1) для любого h

$$\langle y^{(\eta)}, B_{t,\vartheta} h\rangle + \rho(\vartheta, t, h, \eta) \geqslant 0$$

Если $B_{t,\vartheta} h = 0$, то по (2.2)

$$\rho(\vartheta, t, h, \eta) = \rho(\vartheta, t, h) + \eta \, \| h \|_\tau \geqslant 0$$

каково бы ни было $\eta > 0$; отсюда $\rho(\vartheta, t, h) \geqslant 0$.

Обратно, пусть $\rho(\vartheta, t, h) \geqslant 0$ для всех $h \in K_t(0)$. Определим на $\bar{A}_t$ функционал

$$q(k) = \inf_{g \in N(k)} \rho(\vartheta, t, -g), \qquad N(k) = k + E_t$$

Можно проверить, что при принятом предположении функционал $q(k)$ выпукл, положительно однороден и ограничен. Пусть $l \in \bar{A}_t$ — опорный функционал к $q(k)$ в точке $k = 0$ (такой функционал существует [8]). Имеем

$$\min_{\|k\|_\tau \leqslant 1} [q(k) - \langle l, k\rangle] \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Пусть $\eta > 0$, $p(k)$ — введенный в доказательстве леммы 2.2 функционал на $\bar{A}t$

$$p(k) = \inf_{g \in N(k)} \rho(\vartheta, t, -g, \eta)$$

Исходя из (2.2), можно показать, что

$$p(k) \geqslant q(k) + \eta \, \|k\|_\tau \tag{3.2}$$

Пусть $l_1 \in A_t$, $\| l_1 - l \|_\tau < \eta$. Тогда из (3.1), (3.2) и положительной однородности $p(k)$ следует, что для всех $k \in \bar{A}_t$ $p(k) - \langle l_1, k\rangle \geqslant 0$, т.е. $l_1 \in L$ (лемма 2.2). Но тогда, как показано, при доказательстве леммы 2.2, элемент x такой, что $A_{t,\vartheta}\, x = l_1$, принадлежит $W_t(\vartheta, \eta)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Если $\rho(\vartheta, t_0, h) \geqslant 0$ при всех $h \in K_{t_0}(0)$, то для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ $\rho(\vartheta, t, h) \geqslant 0$ при всех $h \in K_t(0)$.

Доказательство. Пусть выполнено предположение леммы. Допустим, что для некоторого $t^* > t_0$ существует элемент $h^* \in K_{t*}(0)$ такой, что $\rho(\vartheta, t^*, h^*) < 0$.

Нетрудно проверить, что для любой суммируемой функции $z(\xi)$, $t_0 \leqslant \xi \leqslant \vartheta$, выполняется равенство

$$\left\langle h, \int_t^\vartheta F(\vartheta + s, \xi) z(\xi) \, d\xi \right\rangle = \int_t^\vartheta [B_{\xi,\vartheta} h(0)]' z(\xi) \, d\xi, \quad t \in [t_0, \vartheta], \ h \in H \tag{3.3}$$

Как было установлено при доказательстве теоремы 2.1, $K_\xi(0) \supset K_{t*}(0)$ при $\xi \leqslant t^*$. Отсюда при $\xi \leqslant t^*$ $B_{\xi,\vartheta} h^* = 0$ в H, следовательно, $B_{\xi,\vartheta} h^*(0) = 0$. Поэтому ввиду (3.3) имеем

$$\left\langle h^*, \int_{t_0}^\vartheta F(\vartheta + s, \xi) z(\xi) \, d\xi \right\rangle = \left\langle h^*, \int_{t*}^\vartheta F(\vartheta + s, \xi) z(\xi) \, d\xi \right\rangle$$

Отсюда вытекает, что $r_i(\vartheta, t_0, h^*) = r_i(\vartheta, t^*, h^*)$ $(i = 1, 2, 3)$; значит, $\rho(\vartheta, t_0, h^*) = \rho(\vartheta, t^*, h^*) < 0$, а это противоречит предположению, поскольку $h^* \in K_{t^*}(0) \subset K_{t_0}(0)$. Лемма доказана.

Из лемм 3.1, 3.2 вытекает утверждение.

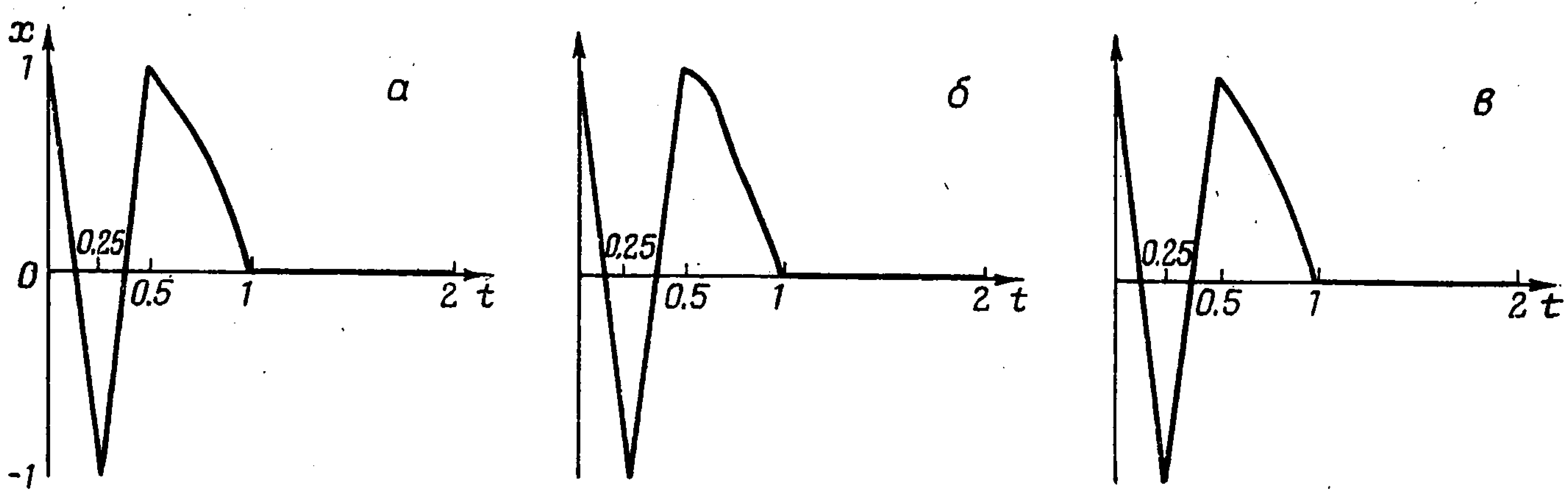
Теорема 3.1. Каждое из следующих условий эквивалентно условию б):

в) $\rho(\vartheta, t_0, h) \geqslant 0$ для всех $h \in K_{t_0}(0)$;

г) $W_{t_0}(\vartheta, \eta)$ не пусты при всех $\eta > 0$.

Из теорем 1.1, 2.2, 3.1 вытекает следующий результат.

Теорема 3.2. Если функционал $\rho(\vartheta, t, h)$ выпукл по h при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ (выполнено условие а)) и $x^\circ(s) \in W_{t_0}(\vartheta)$, то экстремальная к множествам $W_t(\vartheta)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, стратегия U^e разрешает задачу 1.



Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Заданы система (1.1), выпуклое замкнутое ограниченное множество $M \subset H$, начальный момент t_0, конечный момент $\vartheta > t_0$ и последовательность чисел $\varepsilon_i \to +0$. Требуется найти последовательности: $\{x^i\}$ элементов из H и $\{U^i\}$ допустимых стратегий первого игрока — такие, что для всех движений $x^i[t] = x[t, \{t_0, x^i\}, U^i, V_\tau]$ выполняется условие: $x_\vartheta^i[s] \in M^{\varepsilon_i}$, где M^{ε_i} — ε_i-окрестность множества M.

Из теорем 2.1, 3.1 следует

Теорема 3.3. Если выполнены условия а) и в), то следующие последовательности $\{x^i\}$, $\{U^i\}$ разрешают задачу 2:

$$x^i \in W_{t_0}(\vartheta, \varepsilon_i)$$

U^i — экстремальная к множествам $W_t(\vartheta, \varepsilon_i)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, стратегия первого игрока.

4. Задача 1 была смоделирована на ЭВМ для системы

$$x^\cdot(t) = x(t-1) + u - v \tag{4.1}$$

где x, u, v — скаляры, $|u| \leqslant 2$, $|v| \leqslant 1$, при $t_0 = 0$, $\vartheta = 2$, $M = \{0\} \subset H$.

Очевидно, для системы (4.1) функционал

$$\rho(\vartheta, t, h) = \max_{|z(\xi)| \leqslant 1} \left\langle h, \int_t^\vartheta F(\vartheta + s, \xi) z(\xi) d\xi \right\rangle$$

выпукл по h. В качестве начального состояния была выбрана функция

$$x^\circ(s) = \begin{cases} -9, & -1 \leqslant s < 0.75 \\ 9, & -0.75 \leqslant s < -0.5 \\ -1.5, & -0.5 \leqslant s < 0 \\ 1, & s = 0 \end{cases}$$

лежащая в $W_{t_0}(\vartheta)$. Таким образом, по теореме 3.1 стратегия U^e должна решать задачу 1. На фигуре а) — в) изображены реализованные траектории, отвечающие соответственно парам стратегий $\{U^e, V_1\}$, $\{U^e, V_2\}$, $\{U^e, V_3\}$.

V_1, V_2 и V_3 определяются соответственно множествами $V_1(t, x) = \{0\}$, $V_2(t, x) = \{v = - \operatorname{sgn} x(0)\}$, $V_3(t, x) = \{v = - \operatorname{sgn} x(-1)/2\}$.

Поступила 21VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Линейные дифференциальные игры. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 1.
3. Пшеничный Б. Н. О линейных дифференциальных играх. Кибернетика, 1968, № 1.
4. Никольский М. С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
5. Красовский Н. Н., Осипов Ю. С. Линейные дифференциально-разностные игры. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
6. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 4.
7. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд-во ЛГУ, 1968.
8. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.