Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Б. Е. Федунов

(Москва)

Рассматривается оптимальное по быстродействию управление объектом, который описывается системой линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с постоянными коэффициентами, на которые наложены некоторые связи; есть два фазовых ограничения. Описываются свойства оптимального управления и реализуется его синтез.

1. Постановка задачи [1]. Для ряда приложений характерна задача управления объектом, описываемым дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$d\delta/dt = u, \qquad dF/dt = a_2F + au + a_1\delta$$
$$d\vartheta/dt = \vartheta_1, \qquad d\vartheta_1/dt = b_4\vartheta_1 + b_2F \tag{1.1}$$

и ограничениями

$$u^2 \leqslant u_0^2, \quad \delta^2 \leqslant \delta_0^2, \qquad F^2 \leqslant F_0^2 \tag{1.2}$$

Коэффициенты системы (1.1) связаны соотношениями

$$a = \frac{k_fT_1}{T_2}, \quad a_1 = \frac{k_f}{T_2}, \quad a_2 = -\frac{1}{T_2}, \quad b_2 = \frac{k_0}{T_2}, \quad b_4 = -\frac{1}{T_1} \tag{1.3}$$

Величины u_0, δ_0, F_0 постоянны и положительны. Предполагается, что

$$a_2 < 0, \quad b_4 < 0, \quad T_1 > T_2 > 0, \quad k_0 > 0, \quad k_f > 0$$

Нужно найти измеримую функцию $u^\circ(t)$ (оптимальное управление), переводящую объект с максимальным быстродействием из начального состояния $\delta = F = \vartheta = \vartheta_1 = 0$ в конечное состояние $\delta = F = \vartheta_1 = 0$, $\vartheta = \vartheta_k$ и обеспечивающую выполнение ограничений (1.2).

2. Условия оптимальности. Исследуем эту задачу, используя результаты работы [1]. Пусть $\delta^\circ(t)$, $F^\circ(t)$, $\vartheta^\circ(t)$, $\vartheta_1^\circ(t)$, $u^\circ(t)$ — оптимальное решение. Запишем принцип максимума

$$u^\circ(t) = u_0 \operatorname{sign}(\psi_1 + a\psi_2) \tag{2.1}$$

$$-\frac{d\psi_1}{dt} = a_1\psi_2 - 2\delta^\circ\frac{d\mu_1}{dt}, \qquad -\frac{d\psi_2}{dt} = a_2\psi_2 + b_2\psi_4 - 2F^\circ\frac{d\mu_2}{dt}$$
$$-\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \qquad -\frac{d\psi_4}{dt} = \psi_3 + b_4\psi_4 \tag{2.2}$$

$$\frac{d\mu_1}{dt}[(\delta^\circ(t))^2 - \delta_0^2] = 0, \qquad \frac{d\mu_1}{dt} \geqslant 0$$
$$\frac{d\mu_2}{dt}[(F^\circ(t))^2 - F_0^2] = 0, \qquad \frac{d\mu_2}{dt} \geqslant 0 \tag{2.3}$$

---

[1] Постановка задачи принадлежит Н. П. Дергунову.

Выражение для функции $\psi_1 + a\psi_2$ получим из решения дифференциальных уравнений (2.2)

$$\psi_1(t) + a\psi_2(t) = (\psi_1 + a\psi_2)_\mu + Q(t)$$

$$(\psi_1 + a\psi_2)_\mu = A_1 e^{-b_4 t} + A_2 e^{-a_2 t} + A_3 t + A_4$$

$$Q(t) = \int_0^t \left[2\delta^\circ(t)\frac{d\mu_1}{dt} + 2aF^\circ(t)\frac{d\mu_2}{dt}\right]dt - (a_1 + aa_2)\times$$

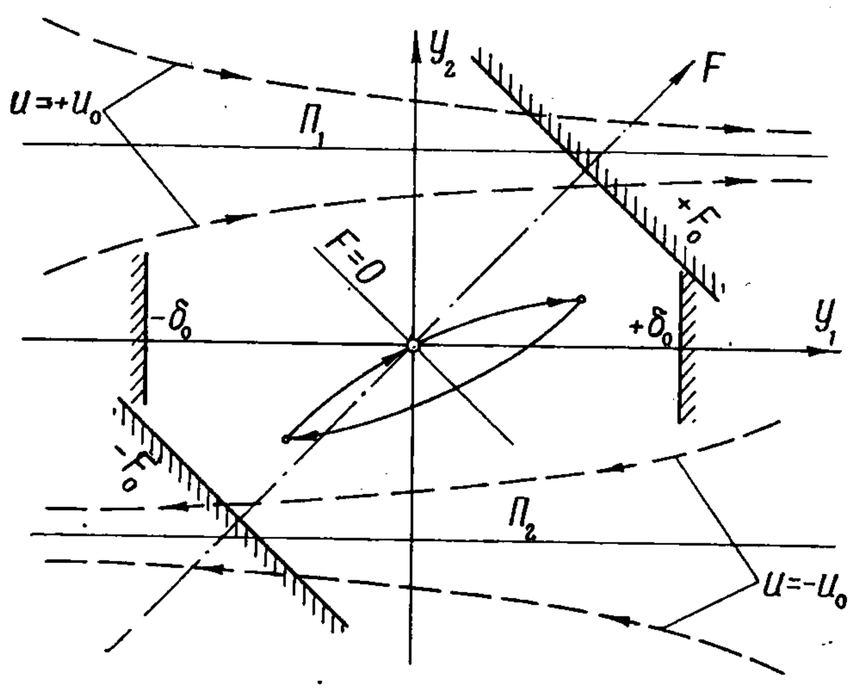
$$\times \int_0^t e^{-a_2\tau}\int_0^\tau 2F^\circ(\eta)\frac{d\mu_2}{d\eta}e^{a_2\eta}d\eta \qquad (2.4)$$

$$A_1 = \frac{(a_1 + ab_4)b_2}{a_2 - b_4}C_4, \qquad A_2 = \frac{a_1 + aa_2}{a_2}C_2$$

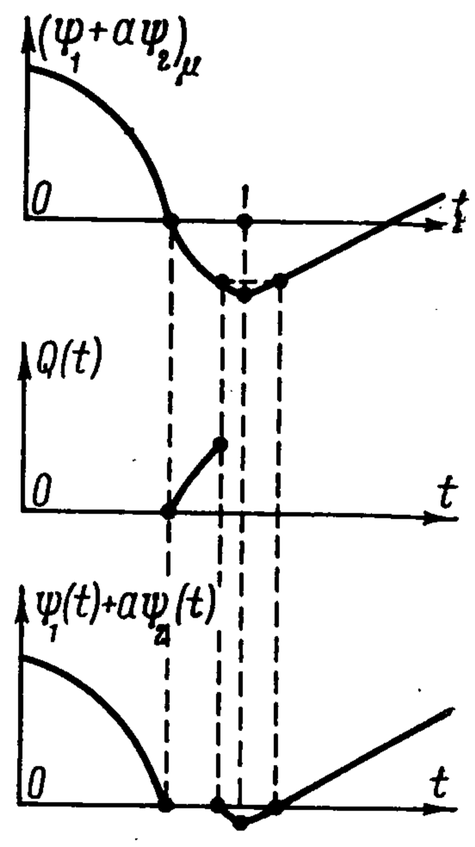
$$A_3 = -\frac{a_1 b_2}{a_2 b_4}C_3, \qquad A_4 = C_4$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные.

Используя соотношения для коэффициентов системы дифференциальных уравнений (1.1), получим $A_1 = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

3. Структура оптимальных решений. 1°. Если оптимальное решение таково, что меры $d\mu_i/dt = 0$ $(i = 1, 2)$, то оно будет совпадать с оптимальным по быстродействию решением соответствующей задачи без фазовых ограничений. Из (2.4) следует, что в этом случае оптимальное управление имеет два переключения и представляет собой кусочно-постоянную функцию времени.

Фазовые траектории системы при $u = \pm u_0$ на плоскости $y_1 y_2$, где

$$y_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_2}\delta, \qquad y_2 = F + \frac{a_1}{a_2}\delta$$

определяются выражением

$$y_2 \pm \frac{aa_2 + a_1}{a_2^2}u_0 = C\exp\left[\frac{a_2^2}{\pm(a_2 - a_1)u_0}y_1\right] \qquad (3.1)$$

Здесь C — произвольная постоянная. На фиг. 1 пунктирные кривые дают представление об обоих типах фазовых траекторий. Предельные пря-

мые Π_1 и Π_2 (фиг. 1) определяются зависимостями (3.1) при $y_1 \to \pm \infty$ для $u = \pm u_0$ соответственно. Замкнутая кривая соответствует типичной оптимальной траектории.

2°. Пусть оптимальное решение таково, что хотя бы одна из мер $d\mu_1 / dt$, $d\mu_2 / dt$ не равна тождественно нулю. Изучим функцию (2.4). По лемме из [2] функция $(\psi_1 + a\psi_2)_\mu$ имеет не более двух нулей, а ее производная — не более одного нуля. На фиг. 2 показан вид этой функции, функции $Q(t)$ и $\psi_1(t) + a\psi_2(t)$. Заметим, что на фиг. 2 указан и разбирается случай, когда при $t = 0$ функция $\psi_1(t) + a\psi_2(t)$ положительна. Для другого случая рассуждения аналогичны.

Вернемся к фиг. 1. В координатах y_1, y_2 фазовые ограничения $F = \pm F_0$ преобразуются в прямые $\pm F_0$, определяемые выражением

$$y_1 = (y_2 \mp F_0) \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

а фазовые ограничения $\delta = \pm \delta_0$ — в соответствующие прямые $\pm \delta_0$.

На фазовые ограничения $+F_0$, $+\delta_0$, $(-F_0, -\delta_0)$ (см. фиг. 1, где фазовые ограничения заштрихованы) система может выходить только с положительным (отрицательным) управлением. Так как $a > 0$ и $a_1 + aa_2 < 0$, то из выражения (2.4) видно, что в момент выхода на фазовое ограничение ни мера $d\mu_1 / dt$, ни мера $d\mu_2 / dt$ скачков иметь не могут, т. е. в момент выхода $\psi_1(t) + a\psi_2(t) = 0$. Отметим также, что при нахождении на фазовой границе $\psi_1(t) + a\psi_2(t) = 0$, а в момент схода с фазового ограничения мера не может иметь скачков. Из всего этого следует (для одного случая это показано на фиг. 2), что сход с ограничений $+F_0$ или $+\delta_0$ может быть осуществлен только в моменты, когда $d(\psi_1 + a\psi_2)_\mu / dt < 0$, ибо в противном случае фазовое ограничение будет нарушено (сход с $-F_0$, $-\delta_0$, когда $d(\psi_1 + a\psi_2)_\mu / dt > 0$).

Таким образом, в случае, когда в начальный момент $t = 0$ имеет место $(\psi_1 + a\psi_2) = (\psi_1 + a\psi_2)_\mu > 0$, оптимальная траектория может только один раз выходить на фазовые ограничения $+F_0$, $+\delta_0$ и только один раз — на ограничения $-F_0$, $-\delta_0$.

Замечание 1. Каждое решение дифференциальных уравнений из (1.1) удовлетворяет соотношению

$$T_1 \frac{d}{dt} (T_2\vartheta_1^{\cdot} + \vartheta_1 - k_0k_f\delta) + (T_2\vartheta_1^{\cdot} + \vartheta_1 - k_0k_f\delta) = 0$$

Отсюда, учитывая, что в конечной точке $\vartheta_1 = F = \delta = 0$, получим

$$(T_2 - T_1)\vartheta_1 = T_2k_0F - T_1k_0k_f\delta \tag{3.2}$$

Замечание 2. Рассмотрим участки оптимальной траектории, лежащие на фазовых ограничениях. При $|F^\circ(t)| = F_0$, например при $F^\circ(t) \equiv F_0$, из (1.1) находим, что $u^\circ(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция

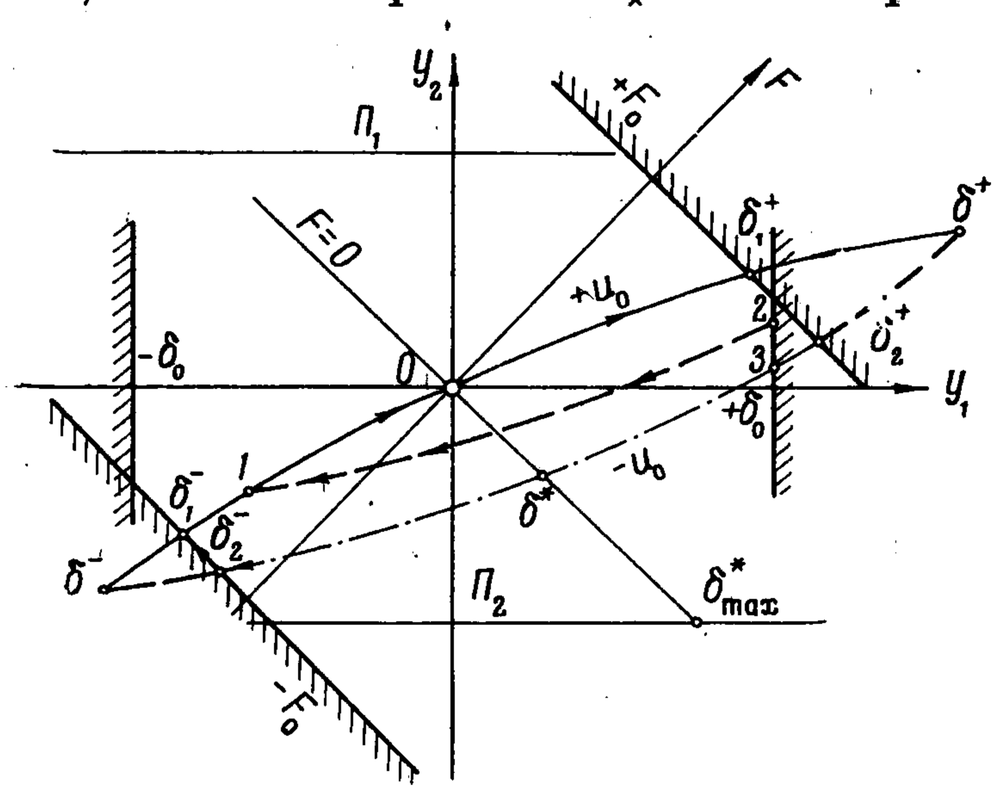
$$u^\circ(t) = -\frac{a_1\delta(t_1) + a_2F_0}{a} e^{-a_1(t-t_1)a^{-1}} \tag{3.3}$$

где t_1 — момент выхода на фазовое ограничение. При этом координата $\delta^\circ(t)$ равна

$$\delta^\circ(t) = \left[\delta(t_1) + \frac{a_2}{a_1} F_0\right] e^{-a_1(t-t_1)a^{-1}} - \frac{a_2}{a_1} F_0 \tag{3.4}$$

и, монотонно возрастая, стремится к $\delta(\infty) = -a_2F_0 / a_1$. Это следует из $a_1 / a > 0$, (3.1) и $a_1\delta + a_2F = k_f(T_2 - T_1)T_2^{-1}[1 - e^{-\delta/T_2u_0}] < 0$. При $|\delta^\circ(t)| = \delta_0$, например, $\delta^\circ = +\delta_0$, $u^\circ(t) \equiv 0$. Координата $F^\circ(t)$, монотонно убывая, стремится к $F(\infty) = -a_1\delta_0a_2^{-1} > 0$. Таким образом, оптимальная траектория выходит на фазовые ограничения только в следующем порядке: $+F_0$, $+\delta_0$, $-F_0$, $-\delta_0$, хотя при этом может и не выходить на некоторые из них.

4. Синтез оптимального управления. При построении синтеза управления ограничимся наиболее часто встречающимся на практике случаем, когда фазовая траектория с $u = \pm u_0$, проходящая через начало координат, вначале пересекает фазовое ограничение $F = \pm F_0$. Другой возможный случай, когда вначале пересекается ограничение $\delta = \pm\delta_0$, рассматривается аналогично.



Фиг. 3

Исследуем оптимальное решение с управлением на начальном участке $u^0(t) = \pm u_0$. Из следующего далее приложения заключаем, что если начальный участок оптимальной траектории заканчивается внутри фазовых ограничений, то вся траектория лежит внутри фазовых ограничений. Задачей синтеза в этом случае является определение при помощи текущих фазовых координат объекта двух моментов переключения. Рассмотрим случай, когда начальный участок траектории заканчивается на фазовом ограничении $F = \pm F_0$. Здесь задача синтеза состоит в определении момента времени t_3 схода с фазового ограничения (ограничения $F = \pm F_0$ или следующего за ним $\delta = \pm\delta_0$) и различения после этого двух возможных концевых участков оптимальной траектории:

1) концевой участок целиком находится внутри фазовых ограничений (фиг. 3, траектория, проходящая через точки 2, 1, 0) — тип 1);

2) концевой участок выходит на фазовое ограничение $F^\circ(t) = \mp F_0$ (фиг. 3, траектория, проходящая через точки 3, δ_2^-, δ_1^-, 0) — тип 2).

В случае 1) синтез управления будет осуществлен, если момент t_3 и момент t_5 — момент перехода на участок траектории с $u = \pm u_0$, проходящей через начало координат (фиг. 3) — будут выражены через фазовые координаты системы. Изменение фазового состояния объекта на концевом участке описывается при учете (3.2) следующими уравнениями:

$$\frac{d\delta}{dt} = u, \qquad \frac{d\vartheta_1}{dt} = a_2\vartheta_1 + a_3\delta$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \vartheta_1, \qquad a_3 = \frac{k_0k_f}{T_2} \tag{4.1}$$

Фазовые траектории этой системы при $u = u_0$ в координатах δ^*, ϑ^*_1, где

$$\delta^* = -\frac{a_3}{a_2}\delta, \qquad \vartheta^*_1 = -\frac{a_3}{a_2}\delta - \vartheta_1 \tag{4.2}$$

описываются уравнением

$$\vartheta_1^* - \frac{a_3}{a_2^2}u_0 = Ce^{-\frac{a_2^2}{a_3u_0}\delta^*} \tag{4.3}$$

где C — параметр.

Выразим фазовые координаты системы в момент t_5 (присвоим им индекс (5)) через координаты в момент t_3 (индекс (3)) перехода на концевой участок оптимальной траектории. Используя уравнение (4.3), получим

$$\vartheta_1^{*(5)} = \mp\left[\mp\frac{a_3}{a_2^2}u_0\left(\vartheta_1^{*(3)} \pm \frac{a_3}{a_2^2}u_0\right)\exp\left(\mp\frac{a_2^2}{a_3u_0}\delta^{*(3)}\right) + \left(\frac{a_3}{a_2}u_0\right)^2\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

$$\delta^{*(5)} = \mp\frac{a_3u_0}{a_2^2}\ln\left|\mp\frac{a_2^2}{a_3u_0}\vartheta_1^{*(5)} + 1\right| \tag{4.5}$$

Здесь и ниже верхние знаки соответствуют траектории, начинающейся с $u = +u_0$, а нижние — траектории, начинающейся с $u = -u_0$. Проинтегрировав уравнения (4.1) от концевой точки $\delta = F = \vartheta_1 = 0$, $\vartheta = \vartheta_k$ в обратном порядке соответственно до точки t_5 с $u = \pm u_0$, а от точки t_5 до t_3 с $u = \mp u_0$, получим

$$\vartheta^{(3)} = -\frac{1}{a_2}\left[\vartheta_1^{(5)} + \frac{a_3\delta^{(5)}}{a_2} \mp \frac{a_3u_0}{a_2^2}\right][e^{-a_3\tau^{(3)}} - 1] +$$
$$+\left[-\frac{a_3\delta^{(5)}}{a_2}\tau^{(3)} \mp a_3u_0\left(\frac{(\tau^{(3)})^2}{2a_2} - \frac{\tau^{(3)}}{a_2^2}\right)\right] + \vartheta^{(5)} \tag{4.6}$$

$$\tau^{(3)} = \frac{\delta^{(3)} - \delta^{(5)}}{\pm u_0}, \qquad \tau^{(5)} = \frac{\delta^{(5)}}{\mp u_0}$$

$$\vartheta_1^{(5)} = \pm\frac{a_3u_0}{a_2^2}e^{-a_2\tau^{(5)}} \pm a_3u_0\left[\frac{\tau^{(5)}}{a_2} - \frac{1}{a_2^2}\right]$$

$$\vartheta^{(5)} = \mp\frac{a_3u_0}{a_2^3}[e^{-a_2\tau^{(5)}} - 1] \pm a_3u_0\left[\frac{\tau^{(5)}}{2a_2} - \frac{1}{a_2^2}\right]\tau^{(5)} + \vartheta_k$$

Подставляя (4.4), (4.5) и (4.2) в (4.6), получим

$$\vartheta^3 = \vartheta_\pm^{(3)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}, \vartheta_k)$$

Отсюда следует, что момент t_3 определяется из условия равенства нулю функции

$$f_1(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_k) = \vartheta(t) - \vartheta_\pm^{(3)}(\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta_k) \tag{4.7}$$

В случае 2), кроме моментов t_3, t_5, через текущие фазовые координаты нужно выразить еще один характерный момент времени t_4 — момент выхода на фазовое ограничение $F = \mp F_0$. При движении по этому ограничению семейство фазовых траекторий системы описывается зависимостями:

в плоскости $\vartheta\vartheta_1$

$$\vartheta = \pm\frac{F_0}{b_4}\ln\left|\vartheta_1 \mp \frac{b_2}{b_4}F_0\right| + \left(\vartheta_1 \mp \frac{b_2}{b_4}F_0\right)\frac{1}{b_2} + C \tag{4.8}$$

в плоскости $\delta\vartheta_1$

$$\delta \pm \frac{a_2}{a_1} F_0 = \frac{C}{\vartheta_1 \mp (b_2/b_4) F_0} \tag{4.9}$$

Двигаясь из конечной точки в точку t_5, получим зависимости $\vartheta_1^{(5)}(\delta^{(5)})$, $\vartheta^{(5)}(\delta^{(5)})$. Используя первую из них, при помощи (3.2), при $F = \mp F_0$ определим $\delta^{(5)}$

$$\mp T_2 k_0 F - T_1 k_0 k_f \delta^{(5)} - (T_2 - T_1)\, \vartheta_1^{(5)}(\delta^{(5)}) = 0$$

Из (4.8), (4.9) находим, что в точке t_4

$$\vartheta^{(4)} = \pm \frac{F_0}{b_4} \ln \left| \vartheta_1^{(4)} \mp \frac{b_2}{b_4} F_0 \right| + \left(\vartheta_1^{(4)} \mp \frac{b_2}{b_4} F_0 \right) \frac{1}{b_2} + C_\vartheta^{(5)} \tag{4.10}$$

$$\delta^{(4)} \pm \frac{a_2}{a_1} F_0 = C_{\vartheta_1}^{(5)} \Big/ \left(\vartheta_1^{(4)} + \frac{b_2}{b_4} F_0 \right) \tag{4.11}$$

где постоянные $C_\vartheta^{(5)}(\vartheta_k)$, $C_{\vartheta_1}^{(5)}(\vartheta_k)$ находятся из условия прохождения этих фазовых траекторий через точку $\delta^{(5)}$, $\vartheta_1^{(5)}$, $\vartheta^{(5)}$, $\mp F_0$.

При движении в открытой области, когда $u = \text{const} = \mp u_0$, из системы (1.1) можно получить

$$\frac{d}{d\delta} \left(\vartheta_1 - b_4 \vartheta - \frac{b_2}{a_2} F + a \frac{b_2}{a_2} \delta \right) = - \frac{a_1 b_2}{a_2 u_0} \delta$$

что соответствует

$$\mp \frac{a_2 u_0 (\vartheta_1 - b_4 \vartheta)}{a_1 b_2} \pm \frac{u_0}{a_1} F \mp \frac{a u_0}{a_1} \delta = C^{(4)} - \frac{\delta^2}{2} \tag{4.12}$$

Из условия прохождения фазовой траектории (4.12) через точку $\delta^{(4)}$, $\vartheta_1^{(4)}$, $\vartheta^{(4)}$, $\mp F_0$ находим

$$C^{(4)} = \mp \frac{a_2 u_0}{a_1 b_2} (\vartheta_1^{(4)} - b_4 \vartheta^{(4)}) \mp \frac{u_0}{a_1} F_0 \mp \frac{a u_0}{a_1} \delta^{(4)} + \frac{(\delta^{(4)})^2}{2} \tag{4.13}$$

При помощи зависимости (3.1) получим уравнение, определяющее $\delta^{(4)}$

$$\mp F_0 + \frac{a_1}{a_2} \delta^{(4)} \mp \frac{a a_2 + a_1}{a_2^2} u_0 = C^{(3)} \exp\left(\mp \frac{a_2}{u_0} \delta^{(4)} \right) \tag{4.14}$$

$$C^{(3)} = \left[F^{(3)} + \frac{a_1}{a_2} \delta^{(3)} \mp \frac{a a_2 + a_1}{a_2^2} u_0 \right] \exp\left(\pm \frac{a_2}{u_0} \delta^{(3)} \right)$$

$$T_2 k_0 F^{(3)} - T_1 k_0 k_f \delta^{(3)} - (T_2 - T_1)\, \vartheta_1^{(3)} = 0$$

Таким образом, получаем из (4.14), (4.10), (4.11) и (4.13) соответственно

$$\delta^{(4)} = \delta^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}), \qquad \vartheta^{(4)} = \vartheta^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}, \vartheta_k) \tag{4.15}$$

$$\vartheta_1^{(4)} = \vartheta_1^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}), \qquad C^{(4)} = C^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}, \vartheta_k)$$

Переход оптимальной фазовой траектории на концевой участок, т. е. определение момента времени t_3 при синтезе оптимального управления, происходит тогда, когда текущие фазовые координаты системы δ, ϑ_1, ϑ удовлетворяют уравнению

$$f_2(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_k) = \mp \frac{a_2 u_0}{a_1 b_2} (\vartheta_1 - b_4 \vartheta) \pm \frac{u_0}{a_1} F \mp$$

$$\mp \frac{a u_0}{a_1} \delta - C^{(4)}(\delta^{(3)}, \vartheta_1^{(3)}, \vartheta_k) + \frac{\delta^2}{2} = 0 \tag{4.16}$$

где $C^{(4)}(\ldots)$ определяется из (4.14), F — через ϑ_1, δ из (3.2).

Синтез управления строится следующим образом. В процессе движения объекта вычисляются определенные выше (см. (4.7), (4.16)) функции текущих фазовых координат и требуемого конечного ϑ_k: $f_1(\ldots)$, $f_2(\ldots)$ и проверяются условия $F(t) = +F_0\ (-F_0)$ и $\delta(t) = +\delta_0\ (-\delta_0)$. Вначале движение объекта происходит по начальной траектории (фиг. 3) с $u^\circ(t) = \pm u_0$. Выбор того или другого начала определяется правилом $u^\circ(t) \cdot \vartheta_k > 0$, которое обосновывается в приложении. В момент $F(t) = +F_0(-F_0)$ траектория выходит на фазовое ограничение по F и движение продолжается с $u^\circ(t)$, определяемым в соответствии с формулой (3.3). При этом координата $|\delta(t)|$ монотонно возрастает. В момент $\delta(t) = +\delta_0\ (-\delta_0)$ траектория выходит на фазовое ограничение по δ и движение продолжается с $u^\circ(t) \equiv 0$. Траектория сразу же сходит с фазового ограничения по F, так как координата $|F|$ монотонно убывает.

Описанное движение осуществляется объектом полностью либо частично в зависимости от того, когда наступит момент t_3 схода с фазовых ограничений. Этот момент совпадает с моментом выполнения одного из равенств

$$f_1(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_k) = 0, \qquad f_2(\delta, \vartheta_1, \vartheta, \vartheta_k) = 0$$

В случае выполнения первого равенства оптимальная траектория имеет концевой участок типа 1). Движение объекта с момента t_3 происходит с $u^\circ(t) = \mp u_0$ до момента t_5 и при этом $f_1(\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta(t), \vartheta_k) \equiv 0$. Момент t_5 определяется как первый после t_3 момент, когда функция $f_1(\ldots)$ снова становится отличной от нуля. Начиная с t_5, $u^\circ(t) = \pm u_0$ и сохраняется таковым до конца процесса, определяемого равенством $\vartheta(t) = \vartheta_k$.

В случае выполнения второго равенства оптимальная траектория имеет концевой участок типа 2). Движение объекта с момента t_3 продолжается с $u^\circ(t) = \mp u_0$ до момента t_4 и при этом $f_2(\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta(t), \vartheta_k) \equiv 0$. Момент t_4 определяется из условия $F(t) = -F_0\ (+F_0)$. Начиная с момента t_4 и до момента t_5, движение происходит с $u^\circ(t)$, определяемым в соответствии с формулой (3.3). Момент t_5 определяется условием $f_1(\delta(t), \vartheta_1(t), \vartheta(t), \vartheta_k) = 0$. Заметим, что до этого момента времени, начиная с начала движения, эта функция знака не меняла. С момента t_5 и до конца процесса движение происходит с $u^\circ(t) = \pm u_0$.

5. *Приложение.* Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}(\vartheta_1 - b_4\vartheta) = b_2 F$$

получаемое из (1.1). Функция

$$J(t) = \vartheta_1(t) - b_4\vartheta(t) = \int_0^t b_2 F(t)\, dt$$

имеет $J(0) = 0$, $J(t_k) = \vartheta_k / T_1$.

Определим знак этого функционала ($t = t_k$) на оптимальных траекториях, целиком лежащих внутри фазовых ограничений (фиг. 3, траектория 0, δ^+, δ^-, 0). Пусть движение начинается с $u = +u_0$. Траектория, проходящая через начало координат

$y_1 = y_2 = 0$ ($F = 0$, $\delta = 0$), в соответствии с (3.1) имеет вид

$$F + \frac{a_1}{a_2}\delta + \frac{aa_2 + a_1}{a_2^2} u_0 = \frac{aa_2 + a_1}{a_2^2} u_0 \exp\left(\frac{a_2}{u_0}\delta\right) \tag{5.1}$$

а через точку $F = 0$, $\delta = \delta^*$ — вид

$$F + \frac{a_1}{a_2}\delta - \frac{aa_2 + a_1}{a_2^2} u_0 = \left[\frac{a_1}{a_2}\delta^* - \frac{aa_2 + a_1}{a_2^2} u_0\right] \exp\left[-\frac{a_2}{u_0}(\delta - \delta^*)\right] \tag{5.2}$$

Подсчитаем $J = J(0, \delta^+) + J(\delta^+, \delta^-) + J(\delta^-, 0)$, заменяя $F(t)$ через $F(\delta)$ при помощи (5.1), (5.2)

$$J(\ldots) = \frac{1}{u_0}\left\{-\frac{a_1}{a_2}[(\delta^+)^2 - (\delta^-)^2]\right\} \tag{5.3}$$

Для оценки знака этой величины вычтем (5.2) из (5.1), чтобы получить δ^+, δ^- — точки пересечения этих траекторий. После преобразования получим

$$\exp\frac{a_2}{u_0}\delta^{\pm} = 1 \mp \sqrt{1 + S(\delta^*)} \tag{5.4}$$

$$S(\delta^*) = \left[\frac{a_1 a_2}{aa_2 + a_1}\frac{\delta_*}{u_0} - 1\right]\exp\left(\frac{a_2}{u_0}\delta^*\right)$$

Отметим, что при $\delta^* < 0$ кривые не пересекаются и что $\delta^+ > 0$ и $\delta^- < 0$.

Для существования корней необходимо, чтобы $1 + S(\delta^*) \leqslant 1$, $-1 \leqslant S(\delta^*) \leqslant 0$. Изучим функцию $S(\delta^*)$. Производная $dS / d\delta^*$ этой функции сохраняет знак на интервале $0 \leqslant \delta^* \leqslant (aa_2 + a_1) u_0 (a_1 a_2)^{-1} - a_2 u_0^{-1}$. Из фиг. 3 следует, что максимальное значение $\delta_m^* = (aa_2 + a_1) u_0 (a_1 a_2)^{-1}$. Отсюда, так как на $0 \leqslant \delta^* \leqslant \delta_m^*$ функция $S(\delta^*)$ изменяется монотонно от $S(0) = -1$ до $S(\delta_m^*) = 0$, (5.4) имеет действительные корни и

$$\delta^+ - |\delta^-| = \delta^+ - \delta^- = \frac{u_0}{a_2}\ln[-S(\delta^*)] > 0$$

Таким образом, при $u^\circ(0) = +u_0$ получаем, что объект с найденным выше оптимальным уравнением достигает конечной точки $\vartheta_k > 0$. Отсюда в силу симметрии получим $u^\circ(0)\,\vartheta_k > 0$.

Замечание 3. В рассматриваемом случае получаем $|F(\delta^+)| - |F(\delta^-)| > 0$ Это соответствует тому факту, что если первое переключение (δ^+) было внутри фазовых ограничений, то внутри будет и второе переключение (δ^-).

Для доказательства указанного выше правила выбора начального управления в случае, когда оптимальная траектория выходит на фазовые ограничения, можно провести аналогичные оценки интеграла либо удовлетвориться следующими рассуждениями.

Пусть движение начинается с $u^\circ(0) = +u_0$. При достижении фазового ограничения $F = +F_0$ система движется по этому ограничению с монотонным выростанием координаты $\delta(t)$ до $\delta(\infty) = -a_2 F_0 a_1^{-1}$ (см. (3.4)). Если $-a_2 F_0 a_1^{-1} \leqslant \delta_0$, то траектория может находиться на фазовом ограничении $F = +F_0$ как угодно долго, увеличивая при этом значение

$$\int_0^t b_2 F(t)\,dt$$

После схода с этого ограничения и при движении на концевом участке даже в случае выхода на фазовое ограничение $F = -F_0$ в силу условий

$$|\delta_1^-| < |\delta_1^+|, \qquad |\delta_2^+ - \delta_1^+| > |\delta_1^- - \delta_2^-|$$

$$|\delta_1^-| < \left|\frac{a_2}{a_1}F_0\right|$$

находим, что с $F(t) \leqslant 0$ система находится ограниченное время.

Если же $-a_2F_0a_1^{-1} > \delta_0$, то на фазовом ограничении $F = +F_0$ система находится ограниченное время и затем переходит на ограничение $\delta(t) = \delta_0$. При движении по нему координата $F(t)$ монотонно убывает, стремясь к значению $F(\infty) = -a_1\delta_0a_2^{-1} > 0$. Таким образом, и в этом случае система как угодно долго может выдерживать условие $F(t) > 0$.

Итак, среди фазовых траекторий, которые имеют установленную выше структуру оптимальных траекторий, только траектории с $u(t)\,\vartheta_k|_{t=0} > 0$ обеспечивают любое значение

$$\int_0^{t_k} b_2F(t)\,dt$$

требуемого знака.

Замечание 4. В предлагаемой работе не выписывается явная зависимость оптимального управления $u^\circ(\ldots)$ от текущих фазовых координат объекта. Получение этой зависимости ввиду ее громоздкости вряд ли целесообразно. Приведенные выражения для определения характерных моментов времени (t_3, t_5 и т. д.) через текущие фазовые координаты и выражения для определения оптимального управления в промежуточные моменты времени дают полную информацию для практической реализации искомого синтеза.

Поступила 30 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. вычис. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
2. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимального управления. М., Физматгиз, 1961.