5. **Расчет I.** Рассмотрим функционал I на множестве $(\alpha, \beta) \in E$. Обозначим $\alpha l = \alpha_1$, $\beta m = \beta_1$. В силу соотношения (2.7)

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \theta_0^2 \tag{5.1}$$

Число Прандтля P линейно входит в оператор K. Понятно, что функционал I есть квадратный трехчлен от P. На окружности (5.1)

$$I(\alpha_1, P) = a(\alpha_1)P^2 + b(\alpha_1)P + c(\alpha_1) \tag{5.2}$$

Коэффициенты трехчлена (5.2) были вычислены при $\theta_0^2 = 9.7157$ Л. И. Михайловым и автором. Расчеты показали, что трехчлен не имеет положительных корней ни при каких значениях α_1. Это означает применимость теоремы при всех $(\alpha, \beta) \in E$.

Заметим, что величина I играет роль и при исследовании устойчивости получающихся вторичных режимов относительно возмущений той же периодичности.

Замечание. Все предыдущие рассуждения распространяются на случай конвекции в слое между двумя свободными поверхностями. В этом случае знак функционала I можно установить аналитически. Можно показать, что в этом случае

$$2I = -(D(\Phi_{12} + \Phi_{21}), \Phi_{12} + \Phi_{21})_H < 0$$

Поступила 6 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6
2. Rabinowitz P. H. Existence and Nonuniqueness of Rectangular Solutions of the Bènard Problem. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1968, vol. 29, No. 1.
3. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
4. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 1.
5. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.

УДК 536.25

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

П. С. Черняков

(Харьков)

Дается обоснование метода последовательных приближений для нахождения распределения скоростей и температур при нестационарной свободной конвекции в замкнутой выпуклой области, на поверхности которой задана плотность теплового потока. Области применимости этого метода и метода малого параметра совпадают. Доказывается сходимость приближенного решения к точному решению и приводится оценка погрешности. Доказывается локальная теорема существования и теорема единственности классического решения.

1. Пусть выпуклая область Ω полностью заполнена несжимаемой вязкой жидкостью, имеющей постоянную начальную температуру b_0. Пусть для $t_1 > 0$ на поверхности сосуда S задано распределение плотности теплового потока $q_1(x_{1s}, t_1)$. Выведем уравнения, описывающие нестационарную свободную конвекцию в ограниченной области с граничными условиями второго рода.

В приближении Буссинеска [1] запишем уравнение состояния в виде

$$\rho(b) = \rho(\langle b \rangle)[1 - \beta(\langle b \rangle)(b - \langle b \rangle)] \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность жидкости, β — коэффициент теплового расширения жидкости, b, $\langle b\rangle$ — температура и среднеобъемная температура жидкости.

Как показано экспериментально в работе [2]

$$|\langle b\rangle - b_1| \ll |b - \langle b\rangle|$$

и как следует из формулы для $\beta(b)$ в приближении Буссинеска $\beta(\langle b\rangle) \simeq \beta(b_1)$

$$|\rho(\langle b\rangle) - \rho(b_1)| = \rho(b_1)\beta(b_1)|\langle b\rangle - b_1| \ll \beta(\langle b\rangle)\rho(b_1)|b - \langle b\rangle| \ll \rho(b_1)$$

Здесь b_1 — средняя температура жидкости. Следовательно, $\rho(\langle b\rangle) = \rho(b_1) = \rho_0$, и уравнение состояния (1.1) принимает вид

$$\rho(b) = \rho_0[1 - \beta_0(b - \langle b\rangle)] \quad (\beta_0 = \beta(b_1)) \tag{1.2}$$

Преобразуя уравнения Навье — Стокса, неразрывности и переноса тепла обычным способом, применяемым при выводе уравнений стационарной свободной конвекции [1], и приводя их к безразмерному виду, получим следующую систему уравнений и начальные и граничные условия на S:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{V} = -\operatorname{grad} p - G\sigma^2(T - \langle T\rangle)\mathbf{i} + \sigma\Delta\mathbf{V}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \qquad \partial T/\partial t + (\mathbf{V}\cdot\operatorname{grad} T) = \Delta T \tag{1.3}$$

$$\mathbf{V}|_{t=0} = 0, \qquad \mathbf{V}|_{\mathbf{x}_s} = 0, \qquad T|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\mathbf{x}_s} = q(\mathbf{x}_s, t) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_1}{l}, \qquad t = \frac{a_0 t_1}{l^2}, \qquad p = \frac{(P_1 - P_0)l^2}{\rho_0 a_0^2}, \qquad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}l}{a_0}$$

$$T = \frac{(b - b_0)\lambda_0}{q_0 l}, \qquad \langle T\rangle = \frac{(\langle b\rangle - b_0)\lambda_0}{q_0 l} = \frac{Qt}{\Omega_0} \text{ [3,4]}$$

$$\sigma = \frac{\nu_0}{a_0}, \qquad G = \frac{g\beta_0 q_0 l^4}{\lambda_0 \nu_0^2}, \qquad q = \frac{q_1}{q_0}, \qquad q_0 = \max_{(\mathbf{x}, t)\in S_t} q_1$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \qquad \mathbf{x}_s \in S, \qquad S_t = S \times [0, t], \qquad Q = \int_S q\,ds$$

где l — характерный линейный размер, Ω_0 — безразмерный объем, а для исследуемой жидкости $\mathbf{V}$, P_1, P_0 — скорость, давление и гидростатическое давление, λ_0 — коэффициент теплопроводности, a_0 — коэффициент температуропроводности, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости.

Справедливость уравнений (1.3) косвенно подтверждается хорошим совпадением результатов приближенного решения начально-краевой задачи (1.3), (1.4) с экспериментальными данными, полученными для ряда сосудов в работах [3–5].

Классическим решением данной задачи (1.3), (1.4) назовем функции $\mathbf{V}$, p, T, если они и производные от T по пространственным координатам представляют собой непрерывные функции по совокупности переменных $\mathbf{x}$, t в $\Omega_{t_0}^* = \Omega^* \times [0, t_0]$ имеют все непрерывные производные по совокупности переменных $\mathbf{x}$, t в $\Omega_{t_0}' = \Omega' \times [0, t_0]$, входящие в систему уравнений (1.3), и удовлетворяют условиям (1.4), где $\Omega' \subset \Omega$, Ω^* — замыкание области Ω.

2. *Теорема* 1. Если Ω — выпуклая область, S — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, $q(\mathbf{x}_s, t) \subset H^{1,1/2}(S_{t_0})$ [6] и $q(\mathbf{x}_s, 0) = 0$, то существует классическое решение задачи (1.3), (1.4) в Ω_{t_0}, и это решение может быть получено методом последовательных приближений, где $S_{t_0} = S \times [0, t_0]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательности функций $\mathbf{V}_k$, T_k и p_k, удовлетворяющие системам уравнений

$$\mathbf{V}_0 = 0, \qquad p_0 = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial t} = \Delta T_0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial t} - \sigma\Delta\mathbf{V}_k = -\operatorname{grad} p_k - (\mathbf{V}_{k-1}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{V}_{k-1} - G\sigma^2(T_k - \langle T\rangle)\,\mathbf{i}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{V}_k = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \Delta T_k - \frac{\partial}{\partial x_j}(V_{j,\,k-1}T_{k-1}) \qquad (k \geqslant 1)$$

и начальным и граничным условиям

$$T_k|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial T_k}{\partial n}\right|_{\mathbf{x}_s} = q(\mathbf{x}_s, t), \qquad \mathbf{V}_k|_{t=0} = 0, \qquad \mathbf{V}_k|_{\mathbf{x}_s} = 0, \qquad (k \geqslant 0) \tag{2.2}$$

Оценим функции $\mathbf{V}_k$ и T_k. Обозначим

$$U_k(t) = \max_{(i=1,2,3)}\ \max_{\mathbf{x}\in\Omega^*} |V_{i,\,k}| \tag{2.3}$$

$$W_k(t) = \max_{\mathbf{x}\in\Omega^*}\left\{\left|\frac{\partial T_k}{\partial x_1}\right|, \left|\frac{\partial T_k}{\partial x_2}\right|, \left|\frac{\partial T_k}{\partial x_3}\right|, |T_k|\right\}$$

Оценим функции $U_k(t)$, используя результаты работы [7]

$$U_{k+1} \leqslant C_1G\sigma^2\int_0^t W_k(\tau)\left[\frac{1}{(t-\tau)^\beta} + e^{C_0(t-\tau)}\right]d\tau + C_1G\sigma^2\int_0^t \langle T(\tau)\rangle\left[\frac{1}{(t-\tau)^\beta} + e^{C_0(t-\tau)}\right]d\tau +$$

$$+ C_2\int_0^t U_k^2\left[\frac{1}{(t-\tau)^\gamma} + e^{C_0(t-\tau)}\right]d\tau \qquad \left(\gamma = \frac{1+\beta}{2}\right) \tag{2.4}$$

Здесь β — произвольно малое положительное число, C_0, C_1, C_2 — постоянные, зависящие только от области Ω.

Оценим T_{k+1}, используя априорную оценку работы [6]

$$\|T_{k+1}\|_{\Omega_t}^{(2)} \leqslant C\left[U_k(t)\sum_{n=1}^{3}\max_{(\mathbf{x},t)\in\Omega_t^*}\left|\frac{\partial T_k}{\partial x_n}\right| + \|q\|_{S_t}^{(1)}\right] \tag{2.5}$$

Здесь $\Omega_t = \Omega \times [0, t]$, C — постоянная, зависящая от области Ω и поверхности S; определения $\|T_{k+1}\|_{\Omega_t}^{(2)}$, $\|q\|_{S_t}^{(1)}$ приведены в [6]. Из (2.3) и (2.5) следует

$$W_{k+1} \leqslant C\,[\,\|q\|_{S_t}^{(1)} + 3U_kW_k] \tag{2.6}$$

Следовательно, для $k \geqslant 0$ функции $U_{k+1}(t)$, $W_{k+1}(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$U_{k+1}^{(t)} \leqslant \int_0^t K_1(t-\tau)\,W_k(\tau)\,d\tau + \int_0^t K_2(t-\tau)\,U_k^2(\tau)\,d\tau + E_0(t), \qquad U_0 = 0 \tag{2.7}$$

$$W_{k+1}(t) \leqslant D_0(t) + 3CU_k(t)\,W_k(t), \quad W_0(t) \leqslant D_0(t)$$

Здесь

$$K_1(t-\tau) = C_1G\sigma^2\left[\frac{1}{(t-\tau)^\beta} + e^{C_0(t-\tau)}\right]$$

$$K_2(t-\tau) = C_2\left[\frac{1}{(t-\tau)^\gamma} + e^{C_0(t-\tau)}\right]$$

$$E_0(t) = \int_0^t K_1(t-\tau)\,\langle T(\tau)\rangle\,d\tau, \qquad D_0(t) = C\,\|q\|_{S_t}^{(1)}$$

Обозначим

$$D_1(t) = 4E_0(t) + 4\int_0^t K_1(t-\tau)\,D_0(\tau)\,d\tau$$

и t_0 — наименьший интервал времени, для которого выполняются неравенства

$$\int_0^t K_2(t-\tau)\, D_1^2(\tau)\, d\tau < \frac{1}{2} D_1(t), \qquad \int_0^t K_2(\tau)\, d\tau + 6C\left[\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{6C}\int_0^t K_2(\tau)\, d\tau\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2CD_0(t)\int_0^t K_1(\tau)\, d\tau\right]^{1/2} < \frac{11}{12} C, \quad 6CD_1(t) < 1 \tag{2.8}$$

Методом математической индукции можно показать, что для любого $k \geqslant 0$ справедливы следующие неравенства для $t \in [0, t_0]$:

$$U_k(t) < D_1(t), \quad W_k(t) < 2D_0(t) \tag{2.9}$$

Следовательно, T_k, $\mathbf{V}_k$, $\partial T_k / \partial x_j$ — равномерно ограниченные функции для $t \in [0, t_0]$ $(j = 1, 2, 3)$.

Докажем, что последовательности $\mathbf{V}_k$, T_k, $\partial T_k / \partial x_j$ $(j = 1, 2, 3)$ сходятся при $k \to \infty$. Воспользовавшись (2.1), (2.2), получим систему уравнений, которой удовлетворяют функции $\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}_n$, $T_{n+1} - T_n$ с нулевыми начальными и граничными условиями. Обозначим

$$P_{n+1} = \max_{(i=1,2,3)} \max_{(\mathbf{x}, t)\in\Omega_{t_0}^*} |V_{n+1,i} - V_{n,i}|$$

$$q_{n+1} = \max_{(\mathbf{x}, t)\in\Omega_{t_0}^*} \left\{ |T_{n+1} - T_n|, \left| \frac{\partial (T_{n+1} - T_n)}{\partial x_i} \right| \right\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Воспользовавшись равномерной ограниченностью T_k, $\mathbf{V}_k$, получим

$$P_{n+1} \leqslant q_n \int_0^t K_1(\tau)\, d\tau + \frac{P_n}{3C} \int_0^t K_2(\tau)\, d\tau$$

$$q_{n+1} \leqslant \frac{q_n}{6} + 2CD_0 P_n \tag{2.10}$$

Обозначим

$$\mathbf{X}_n = \begin{Vmatrix} P_n \\ q_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{3C}\int_0^t K_2(\tau)\, d\tau & \int_0^t K_1(\tau)\, d\tau \\ 2CD_0 & 1/6 \end{Vmatrix}$$

Тогда (2.10) приводится к виду

$$\mathbf{X}_{n+1} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{X}_n \tag{2.11}$$

Из (2.11) получим, воспользовавшись [8]

$$|\mathbf{X}_{n+1}| \leqslant |\mathbf{A}\mathbf{X}_n| \leqslant \|\mathbf{A}\|\, |\mathbf{X}_n| \leqslant \lambda_{\max} |\mathbf{X}_n| \tag{2.12}$$

Здесь $\lambda_{\max}$ — наибольшее собственное значение матрицы $\mathbf{A}$, $|\mathbf{X}_n| = \sqrt{P_n^2 + q_n^2}$. В силу (2.8) $\lambda_{\max} < 1$. Из (2.12) получим

$$|\mathbf{X}_n| \leqslant \lambda_{\max}^n |\mathbf{X}_0|$$

$$P_n \leqslant \lambda_{\max}^n |\mathbf{X}_0|, \quad q_n \leqslant \lambda_{\max}^n |\mathbf{X}_0|$$

Так как $\lim_{n\to\infty} \lambda_{\max}^n = 0$, то при $n \to \infty$ $\lim P_n = 0$, $\lim q_n = 0$.

Следовательно, последовательности $\mathbf{V}_n$, T_n, $\partial T_n / \partial x_j$ — фундаментальные последовательности функций. И так как $\mathbf{V}_n$, T_n, $\partial T_n / \partial x_j$ — равномерно ограниченные функции, то существуют при $n \to \infty$

$$\lim \mathbf{V}_n = \mathbf{V}', \quad \lim T_n = T', \quad \lim \frac{\partial T_n}{\partial x_j} = T_j'$$

Можно показать, воспользовавшись [7,9], что $\mathbf{V}_n$ и T_n — классическое решение задачи (2.1), (2.2).

Так как $\mathbf{V}_k$, T_k, $\partial T_k / \partial x_m$ — непрерывные функции по совокупности переменных $\mathbf{x}$, t вплоть до границы области Ω_{t_0} и функции $\mathbf{V}_k$, T_k, $\partial T_k / \partial x_m$ равномерно сходятся при $k \to \infty$ к $\mathbf{V}'$, T', T_m', то $\mathbf{V}'$, T' и T_m' — непрерывные функции по совокупности переменных $\mathbf{x}$ и t вплоть до границы Ω_{t_0} и принимают начальные и граничные значения на S по непрерывности.

Покажем, что функции $\mathbf{V}'$ и T' — решение задачи (1.3), (1.4). Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \sigma \Delta \mathbf{V} = -\frac{\partial}{\partial x_s}(\mathbf{V}'\mathbf{V}_s') - G\sigma^2 (T - \langle T \rangle)\,\mathbf{i} - \operatorname{grad} p \tag{2.13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T = -\frac{\partial}{\partial x_s}(V_s' T')$$

с начальными и граничными условиями на S

$$\mathbf{V}\,|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{V}\,|_{\mathbf{x}_s} = 0, \quad T\,|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\mathbf{x}_s} = q\,(\mathbf{x}_s, t)$$

Воспользовавшись ограниченностью $\mathbf{V}'$ и T' и методом получения оценок для $\mathbf{V}_k$ и T_k, можно показать, что

$$|V_i| < D_1, \quad |T| < 2D_0, \quad \left|\frac{\partial T}{\partial x_i}\right| < 2D_0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

Вычтем (2.13) из (2.1), получим систему уравнений, которой удовлетворяют функции $\mathbf{V}_{n+1} - \mathbf{V}$, $T_{n+1} - T$.

Сделав для

$$\max_{(i=1,\,2,\,3)} \max_{(\mathbf{x},\,t)\in\Omega_{t_1}^*} |V_{n+1,\,i} - V_i|, \quad \max_{(\mathbf{x},\,t)\in\Omega_{t_0}^*} \left\{|T_{n+1} - T|, \left|\frac{\partial (T_{n+1} - T)}{\partial x_m}\right|\right\}$$

$$(m = 1, 2, 3)$$

такие же оценки, как и для P_{n+1}, q_{n+1}, воспользовавшись ограниченностью $\mathbf{V}_n$, $\mathbf{V}'$, T_n, T' и тем, что $\lim V_n = V'$, $\lim T_n = T'$ при $n \to \infty$, и устремив в неравенстве, аналогичном (2.11), $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(i=1,\,2,\,3)} \max_{(\mathbf{x},\,t)\in\Omega_{t_0}^*} |V_i - V_{n+1,\,i}| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \max_{(\mathbf{x},\,t)\in\Omega_{t_0}^*} \left\{|T_{n+1} - T| \left|\frac{\partial (T_{n+1} - T)}{\partial x_m}\right|\right\} = 0$$

Следовательно, при $n \to \infty$

$$\mathbf{V}' = \lim \mathbf{V}_n = \mathbf{V}, \quad T' = \lim T_n = T \quad (T_j' = \partial T / \partial x_j)$$

Поэтому функции $\mathbf{V}$ и T удовлетворяют системе (1.3) и начальным и граничным условиям на S (1.4) по непрерывности.

Следовательно, функции $\mathbf{V}$ и T являются классическим решением задачи (1.3), (1.4) в Ω_{t_0}, причем справедливы в Ω_{t_0} априорные оценки

$$|V_i| < D_1, \quad |T| < 2D_0, \quad \left|\frac{\partial T}{\partial x_i}\right| < 2D_0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

Так как $\mathbf{V}$, T и $\operatorname{grad} p$ удовлетворяют системе (1.3) в Ω_{t_0}', то $\operatorname{grad} p$ — непрерывная функция по совокупности переменных $\mathbf{x}$ и t в Ω_{t_0}'. Следовательно, давление p — непрерывная функция по совокупности переменных $\mathbf{x}$ и t в Ω_{t_0}'. Можно показать, воспользовавшись непрерывностью функций p и $\operatorname{grad} p$ в Ω_{t_0}', что давление p — непрерывная функция в $\Omega_{t_0}^*$.

Таким образом, доказана локальная по времени теорема существования классического решения задачи (1.3), (1.4) и указан приближенный метод для нахождения решения. Этот метод заключается в решении систем линейных уравнений (2.1) до некоторого номера k и в аппроксимации истинных решений приближенными.

Оценим скорость сходимости приближенного решения к точному решению. Для этого вычтем из уравнений (2.1) соответствующие уравнения (1.3) и обозначим

$$\max_{(i=1,\,2,\,3)}\ \max_{(\mathbf{x},\,t)\in\Omega_{t_0}^*} |V_i - V_{k,\,i}| = E_k, \qquad \Phi_k = \left\| \begin{matrix} E_k \\ F_k \end{matrix} \right\|$$

$$\max_{(\mathbf{x},\,t)\in\Omega_{t_0}^*} \left\{ |T - T_k|,\ \left| \frac{\partial (T - T_k)}{\partial x_m} \right| \right\} = F_k \qquad (m = 1,\ 2,\ 3)$$

Проделав оценки, аналогичные (2.10), получим $\Phi_{k+1} \leqslant A\Phi_k$.

Решая это неравенство так же, как и (2.11), получим

$$|\Phi_k| \leqslant \lambda_{\max}^k |\Phi_0|, \qquad t \in [0,\ t_0]$$

Отсюда получим следующую оценку погрешности:

$$\left.\begin{aligned} |V_j - V_{j,\,k}| &\leqslant 2 \max_{t\in[0,\,t_0]} \lambda_{\max}^k \max_{t\in[0,\,t_0]} \{D_1,\ 2D_0\} \\ |T - T_k| &\leqslant 2 \max_{t\in[0,\,t_0]} \lambda_{\max}^k \max_{t\in[0,\,t_0]} \{D_1,\ 2D_0\} \end{aligned}\right\} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

Замечание. Из теоремы 1 и формул (2.8) следует, что метод последовательных приближений применим как для расчета нестационарной слабой свободной конвекции ($t_0 \gg 1$, $R = G\sigma \ll 1$), так и для расчета нестационарной развитой свободной конвекции ($t_0 \ll 1$, $R \gg 1$). Таким образом, области применимости методов последовательных приближений и малого параметра (R — малый параметр) совпадают. Однако первый более прост для расчетов.

3. *Теорема* 2. Классическое решение задачи (1.3), (1.4) единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют два решения: $(\mathbf{V},\ T,\ p)$ и $(\mathbf{V}',\ T',\ p')$. Обозначим $\mathbf{W} = \mathbf{V} - \mathbf{V}'$, $\tau = T - T'$, $P = p - p'$. Тогда, воспользовавшись (1.3), (1.4), получим для функций $\mathbf{W}$, τ и P систему уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} - \sigma\Delta\mathbf{W} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(V_k\mathbf{W} + \mathbf{V}'W_k) - \operatorname{grad} P - G\sigma^2\tau\mathbf{i}, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0 \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \Delta\tau = -\frac{\partial}{\partial x_k}(V_k\tau + TW_k) \tag{3.3}$$

с однородными начальными и граничными условиями. Умножив (3.1) на $\mathbf{W}$ и (3.3) на τ и проинтегрировав полученные уравнения по области Ω, воспользовавшись (3.2) и граничными условиями, найдем соответственно

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{W}^2 d\Omega + 2\sigma \int_\Omega \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_s}\right)^2 d\Omega = 2\int_\Omega \mathbf{V}'W_k\mathbf{W}_{xk}\, d\Omega - 2\sigma^2 G \int_\Omega \tau\,(\mathbf{W},\ \mathbf{i})\, d\Omega \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \tau^2 d\Omega + 2\int_\Omega \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega = \int_\Omega \tau_{x_k} T W_k\, d\Omega \tag{3.5}$$

Оценив интегралы в правых частях уравнений (3.4) и (3.5), воспользовавшись ограниченностью $\mathbf{V}'$ и T и неравенствами Коши — Буняковского для сумм и интегралов, и подставив полученные оценки в (3.4) и (3.5) соответственно, найдем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} W^2 d\Omega + (2\sigma - C\varepsilon)\int\limits_{\Omega}\sum_{s=1}^{3}\left(\frac{\partial W}{\partial x_s}\right)^2 d\Omega \leqslant \frac{C}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega} W^2 d\Omega + G\sigma^2\int\limits_{\Omega}(\tau^2 + W^2)\,d\Omega \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \tau^2 d\Omega + (2 - \varepsilon_1 C_1)\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x_k}\right)^2 d\Omega \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\Omega} W^2 d\Omega \quad (\varepsilon > 0,\ \varepsilon_1 > 0) \quad (3.7)$$

Здесь C — постоянная, зависящая от D_1, области Ω и ε; C_1 — постоянная, зависящая от D_0, области Ω и ε_1. Взяв $\varepsilon < 2\sigma / C$ и $\varepsilon_1 < 2 / C_1$, получим из (3.6) и (3.7) следующие неравенства:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} W^2 d\Omega \leqslant \left(\frac{C}{\varepsilon} + G\sigma^2\right)\int\limits_{\Omega} W^2 d\Omega + G\sigma^2\int\limits_{\Omega}\tau^2 d\Omega, \qquad \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\tau^2 d\Omega \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon_1}\int\limits_{\Omega} W^2 d\Omega$$

Сложив эти неравенства, получим

$$dy / dt \leqslant ky$$

$$y(t) = \int\limits_{\Omega}(W^2 + \tau^2)\,d\Omega, \qquad k = \frac{C}{\varepsilon} + \frac{C_1}{\varepsilon_1} + G\sigma^2 \quad (3.8)$$

Решая (3.10) при условии $y(0) = 0$, найдем $y(t) \leqslant y(0)\,e^{-kt} = 0$.

Следовательно, $y(t) \equiv 0$ для любого $t > 0$, а значит, $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$, $T = T'$, $p = p' + \mathrm{const}$.

Поступила 14 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Кириченко Ю. А., Щелкунов В. Н., Комарова С. А. Исследование теплообмена в шаровом объеме, полностью заполненном жидкостью, при постоянном потоке на границе объема. В сб.: Тепло и массоперенос. т. 1. М., «Энергия», 1968.
3. Кириченко Ю. А., Черняков П. С., Щелкунов В. Н., Китарий В. В., Моторная А. А. Исследование квазистационарного конвективного теплообмена в замкнутом объеме. Тез. III Всес. съезда по теоретич. и прикл. механике. М., «Наука», 1968.
4. Кириченко Ю. А., Черняков П. С., Щелкунов В. Н. Исследование свободной конвекции в замкнутых осесимметричных объемах. Инж.-физ. ж., 1969, т. 16, № 6.
5. Кириченко Ю. А., Моторная А. А., Черняков П. С. Расчет интегральных коэффициентов теплоотдачи при свободной конвекции в замкнутых осесимметричных сосудах. ПМТФ, 1970, № 5.
6. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.
7. Головкин К. К., Солонников В. А. О первой краевой задаче для нестационарных уравнений Навье — Стокса. Докл. АН СССР, 1961, т. 140, № 2.
8. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1959.
9. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.