давлений в среде с переменной начальной плотностью ($\omega = 0.5$, сплошные линии) имеют такой же характер, как в среде с постоянной начальной плотностью ($\omega=0$, пунктир), но количественные значения существенно различаются.

Поступила 6 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4-е, М., Гостехиздат, 1957.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
4. Коробейников В. П. Точечный взрыв в детонирующем газе. Докл. АН СССР, 1969, т. 177, № 2.
5. Коробейников В. П., Мельникова Н. С. О точных решениях линеаризованной задачи о точечном взрыве с противодавлением. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
6. Sakurai A. On propagation and structure of the blast wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 8, No 5; 1954; vol. 9, No. 3.
7. Sakurai A. On exact solution of the blast wave problem. J. Phys. Soc. Japan, 1955, vol. 10, No 6.
8. Карликов В. П. Линеаризованная задача о распространении сильного взрыва в неоднородной атмосфере. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1959, № 4.
9. Мельникова Н. С., Саламахин Т. М. О расчете точечного взрыва в различных газах. ПМТФ, 1964, № 4.
10. Мельникова Н. С. О точечном взрыве в среде с переменной начальной плотностью. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 37.

УДК 536.25

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Г. К. Тер-Григорьянц

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются стационарные двоякопериодические конвекционные режимы в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, ответвляющиеся от состояния покоя при потере устойчивости.

Для почти всех отношений волновых чисел уравнение разветвления четырехмерно. Используя инвариантность задачи относительно сдвигов в горизонтальной плоскости, удается понизить размерность уравнения разветвления. Исследование полученной двумерной системы показывает, что от состояния покоя ответвляются три существенно разных режима. Один из этих режимов — прямоугольная конвекция [1, 2], а два других — плоская. Приведенные утверждения о ветвлении справедливы и в случае конвекции в слое с двумя свободными границами.

Обычно при отыскании вторичных двоякопериодических конвекционных режимов делаются некоторые дополнительные предположения об их симметрии, позволяющие свести задачу к случаю простого спектра (см. [1–3]). Однако для решения вопроса об отыскании всех двоякопериодических режимов необходимо рассмотреть полное многомерное уравнение разветвления. Такая задача ставится, например, в работе [4].

Исследовать уравнение разветвления помогает использование групповых свойств задачи. Так, в работе [5] показано, что в некоторых случаях (в частности для плоской конвекции) групповые соображения позволяют свести изучение ветвления при наличии кратного спектра к одномерному уравнению разветвления. Однако в случае прямоугольной конвекции метод работы [5] позволяет лишь уменьшить порядок системы уравнений разветвления до двух.

Цель данной работы—изучить всевозможные стационарные режимы двоякопериодической свободной конвекции в слое, возникающие при переходе числа Рэлея через его минимальное критическое значение.

1. Постановка задачи. Рассмотрим конвекцию в слое жидкости, заключенном между двумя неподвижными горизонтальными плоскостями $z = h$, $z = -h$ постоянной температуры

$$\nu\Delta \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p = (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \beta \mathbf{g} T, \quad \chi\Delta T = \mathbf{v}\nabla T, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$
$$T(x, y, h) = T_1, \quad T(x, y, -h) = T_2, \quad \mathbf{v}(x, y, \pm h) = 0 \tag{1.1}$$

Здесь x, y, z — декартовы прямоугольные координаты, ось z направлена вертикально вниз; ρ, ν, χ, β — постоянные, характеризующие жидкость, $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести.

Задача (1.1) имеет стационарное решение — состояние покоя

$$\mathbf{v}_0 = 0, \ T_0 = Cz + C_1, \ p_0 = \rho\beta g\ (Cz^2/2 + C_1 z + C_2)$$

Разыскиваем новое стационарное решение $\mathbf{v}'$, p', T' в виде

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_0 + \frac{\nu}{2h}\mathbf{V}, \qquad p' = p_0 + \frac{\nu^2\rho}{(2h)^2} q, \qquad T' = T_0 + \frac{2h\nu C}{\chi\sqrt{R}}\tau$$
$$\left(R = \frac{\beta g C (2h)^4}{\nu\chi}\right)$$

Получаем для возмущений систему в безразмерных переменных (обозначения координат сохраняются)

$$\Delta\mathbf{V} - \nabla q = (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + \gamma\tau\mathbf{k}, \qquad \Delta\tau = P\mathbf{V}\nabla\tau + \gamma V_z \tag{1.2}$$
$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0, \quad \gamma = \sqrt{R}, \quad P = \nu/\chi, \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$
$$\mathbf{V} = 0, \qquad \tau = 0, \qquad z = \pm 1/2 \tag{1.3}$$

Будем интересоваться решениями задачи (1.2), (1.3), периодическими по x, y, с периодами $2\pi/\alpha$, $2\pi/\beta$ соответственно. Пусть, кроме того, слой не перемещается как целое в горизонтальной плоскости

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-\pi/\beta}^{\pi/\beta} V_x dy\, dz = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-\pi/\alpha}^{\pi/\alpha} V_y dx\, dz = 0 \tag{1.4}$$

Рассмотрим следующие гильбертовы пространства.

1) Пространство H^1 — замыкание множества определенных в слое гладких периодических векторов $\mathbf{V}$, удовлетворяющих условию (1.4), в метрике

$$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)_{H^1} = \frac{\alpha\beta}{4\pi^2}\int_\Omega \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 d\Omega$$

Здесь Ω — параллелепипед $|x| \leqslant \pi/\alpha$, $|y| \leqslant \pi/\beta$, $|z| \leqslant 1/2$.

2) Пространство H^2 — замыкание множества определенных в слое гладких периодических функций τ, исчезающих на границе слоя, в метрике

$$(\tau_1, \tau_2)_{H^2} = \frac{\alpha\beta}{4\pi^2}\int_\Omega \tau_1\tau_2 d\Omega$$

3) Подпространство H_0^1 пространства H^1 — замыкание по норме H^1 множества гладких соленоидальных векторов $\mathbf{V} \in H^1$, исчезающих на границе слоя.

4) Пространство $H = H^1 \times H^2$.

5) Пространство $H_0 = H_0^1 \times H^2$.

В дальнейшем элементы пространства H будем обозначать $\Phi : \Phi = \{\mathbf{V}, \tau\} = \{V_x, V_y, V_z, \tau\}$, $\mathbf{V} \in H^1$, $\tau \in H^2$.

Пусть Π — оператор ортогонального проектирования из H на H_0 и пусть M — множество дважды непрерывно дифференцируемых векторов $\Phi \in H_0$, удовлетворяющих условиям (1.3). Следующие операторы действуют из M в H_0:

$$\begin{gathered} A\Phi = -\Pi\{\Delta\mathbf{V}, \Delta\tau\}, \qquad B\Phi = -\Pi\{\tau\mathbf{k}, V_z\} \\ K[\Phi_1, \Phi_2] = -\Pi\{(\mathbf{V}_1\nabla)\mathbf{V}_2, P\mathbf{V}_1\nabla\tau_2\}, \qquad K\Phi = K[\Phi, \Phi] \\ K^0[\Phi_1, \Phi_2] = K[\Phi_1, \Phi_2] + K[\Phi_2, \Phi_1] \end{gathered} \tag{1.5}$$

Система (1.2) — (1.4) в новых обозначениях принимает вид

$$A\Phi = \gamma B\Phi + K\Phi \tag{1.6}$$

Оператор B — симметричный, A — положительно определенный. Из уравнения (1.6) получаем

$$\Phi = \gamma A^{-1}B\Phi + A^{-1}K\Phi \equiv F_\gamma\Phi$$

Оператор F_γ вполне непрерывный в энергетическом пространстве H_A оператора A.

Пусть $\gamma = \gamma_0$ — точка бифуркации уравнения (1.6). Рассмотрим при малых $\mu > 0$ следующую задачу:

$$(A - \gamma_0 B)\Phi = \mu B\Phi + K\Phi \tag{1.7}$$

Рассмотрим малые решения задачи (1.7). Изучение ветвления затруднено здесь тем, что рассматриваемая задача имеет множество решений. Укажем одну из причин этого.

Определим в пространстве H оператор сдвига по x, y

$$L_{\xi\eta}\Phi = \Phi_1, \quad \Phi_1(x, y, z) = \Phi(x + \xi, y + \eta, z)$$

Операторы A, B, K инвариантны относительно сдвигов

$$L_{\xi\eta}A = AL_{\xi\eta}, \qquad L_{\xi\eta}B = BL_{\xi\eta}, \qquad L_{\xi\eta}K[\Phi_1, \Phi_2] = K[L_{\xi\eta}\Phi_1, L_{\xi\eta}\Phi_2] \tag{1.8}$$

Заметим, что оператор $L_{\xi\eta}$ — изометрический

$$(L_{\xi\eta}\Phi_1, L_{\xi\eta}\Phi_2)_H = (\Phi_1, \Phi_2)_H$$

Пусть Φ — любое решение уравнения (1.7). Тогда, в силу соотношений (1.8), его решениями будут также векторы $L_{\xi\eta}\Phi$ при любых ξ, η. Таким образом, кратность ветвления в рассматриваемом случае во многом определяется инвариантностью задачи относительно горизонтальных сдвигов.

Разобьем все множество решений задачи (1.7) на классы, относя к одному классу все решения, получающиеся друг из друга сдвигами. Такое разбиение выполнимо в силу обратимости преобразования сдвига. Каждое решение принадлежит одому и только одному классу. Набор решений, содержащий по одному представителю из каждого класса, назовем полным набором. Задача состоит в том, чтобы найти полный набор малых решений задачи (1.7).

2. Линеаризованная задача. Рассмотрим линейную задачу

$$A\Phi = \gamma_0 B\Phi \tag{2.1}$$

Задача (2.1) эквивалентна по определению системе

$$\Delta\mathbf{V} - \nabla q = \gamma_0\tau\mathbf{k}, \qquad V_z = \frac{1}{\gamma_0}\Delta\tau, \qquad \{\mathbf{V}, \tau\} \in M \tag{2.2}$$

Исключая $\mathbf{V}$, q, получаем из системы (2.2) уравнение

$$\Delta^3\tau = \gamma_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\tau, \qquad \tau = \Delta\tau = \frac{\partial\Delta\tau}{\partial z} = 0, \quad z = \pm {}^1/_2 \tag{2.3}$$

Обозначим через H° и $H_\tau{}^\circ$ пространства решений задач (2.1) и (2.3) соответственно. Рассмотрим вектор $\{\mathbf{V}, \tau\} = \Phi \in H^\circ$. По заданному τ из системы (2.2) однозначно определяется $\mathbf{V}$, откуда

$$\Phi = N\tau, \quad \Phi \in H^\circ$$

В силу последнего соотношения пространства H° и $H_\tau{}^\circ$ изоморфны. Если $\{\tau_i{}^\circ\}_1{}^n$ — базис в пространстве $H_\tau{}^\circ$, то $\{N\tau_i{}^\circ\}_1{}^n$ — базис в пространстве H°.

Разыскивая решение задачи (2.3) в виде $\tau = u(z)e^{i(\alpha lx+\beta my)}$, приходим к уравнению

$$-L^3u = \lambda u, \quad u = Lu = Lu' = 0, \quad z = \pm {}^1/_2 \tag{2.4}$$
$$L = d^2 / dz^2 - \theta^2, \qquad \lambda = \gamma_0{}^2\theta^2, \quad \theta^2 = \alpha^2l^2 + \beta^2m^2$$

Задача (2.4) имеет, как известно, простые собственные значения [1]. Пусть $\lambda_0(\theta)$ — первое собственное число задачи (2.4). Положим

$$\gamma_0{}^2 = \min_\theta \frac{\lambda_0(\theta)}{\theta^2} = \frac{\lambda_0(\theta_0)}{\theta_0{}^2} \tag{2.5}$$

Значение $\gamma = \gamma_0$ — точка бифуркации задачи (1.6) [1]. (Единственность экстремума (2.5) строго не доказана, однако многочисленные расчеты показывают, что она имеет место.)

Рассмотрим множество E всех пар (α, β) таких, что для одной и только одной пары натуральных чисел (l, m) выполняется соотношение

$$\alpha^2l^2 + \beta^2m^2 = \theta_0{}^2 \tag{2.6}$$

Для $(\alpha, \beta) \in E$ пространство $H_\tau{}^\circ$ четырехмерно; в качестве базисных можно выбрать следующие функции:

$$\tau_1{}^\circ = u(z)\cos(\alpha lx + \beta my), \quad \tau_2{}^0 = u(z)\cos(\alpha lx - \beta my)$$
$$\tau_3{}^\circ = u(z)\sin(\alpha lx + \beta my), \quad \tau_4{}^0 = u(z)\sin(\alpha lx - \beta my) \tag{2.7}$$

В качестве базиса в пространстве H° возьмем векторы $\Phi_i{}^\circ = N\tau_i{}^\circ$, $i = 1, \ldots, 4$. В силу соотношений (1.8) пространство H° инвариантно относительно преобразований $L_{\xi\eta}$: если $\Phi^\circ \in H^\circ$, то и $L_{\xi\eta}\Phi^\circ \in H^\circ$. Так же, как прежде, разобьем пространство H° на классы, относя к одному классу все векторы, получающиеся друг из друга сдвигами по x, y. Следующая лемма ставит в соответствие каждому такому классу из H° единственный вектор определенного вида из этого класса.

Лемма 1. Для любого ненулевого вектора $\Phi^\circ \in H^\circ$ найдутся такие ξ, η, что

$$L_{\xi\eta}\Phi^\circ = C_1{}^\circ\Phi_1{}^\circ + C_2{}^\circ\Phi_2{}^\circ, \qquad C_i{}^\circ \geqslant 0 \tag{2.8}$$

причем $C_i{}^\circ$ определяются единственным образом.

(Все леммы приводятся без доказательств ввиду ограничений на объем статьи).

Отметим еще одно важное для дальнейшего свойство задачи (2.1). Для всех $\Phi \in M$ выполняется неравенство

$$(A\Phi - \gamma_0 B\Phi, \ \Phi)_H \geqslant 0 \tag{2.9}$$

причем равенство в (2.9) возможно лишь в случае $\Phi \in H^\circ$ (см., например, [3]).

3. Зеркальные отражения. Условимся обозначать

$$\{V_x, V_y, V_z\}(\xi, \eta, \zeta) = \{V_x(\xi, \eta, \zeta), V_y(\xi, \eta, \zeta), V_z(\xi, \eta, \zeta)\}$$

Определим операторы «зеркального отражения» S_1, S_2 для векторов $\mathbf{V}$, Φ и функций τ следующим образом:

$$S_1\mathbf{V} = \{-V_x, V_y, V_z\}(-x, y, z), \qquad S_2\mathbf{V} = \{V_x, -V_y, V_z\}(x, -y, z)$$
$$S_1\tau = \tau(-x, y, z), \qquad S_2\tau = \tau(x, -y, z), \qquad S_i\Phi = \{S_i\mathbf{V}, S_i\tau\}$$

Непосредственной проверкой устанавливаются следующие свойства операторов S_i:

$$S_iA = AS_i, \qquad S_iB = BS_i, \qquad S_iK[\Phi_1, \Phi_2] = K[S_i\Phi_1, S_i\Phi_2] \tag{3.1}$$

Операторы S_i — изометрические

$$(S_i\Phi_1, S_i\Phi_2)_H = (\Phi_1, \Phi_2)_H \tag{3.2}$$

Обозначим $S = S_1S_2$. Пусть H^c — множество векторов $\Phi \in H_0$, $S\Phi = \Phi$; H^s — множество векторов $\Phi \in H_0$, $S\Phi = -\Phi$. В силу соотношения (3.2) — это ортогональные подпространства

$$(\Phi_1, \Phi_2)_H = 0, \ \Phi_1 \in H^c, \ \Phi_2 \in H^s \tag{3.3}$$

Заметим, что из выбранных ранее базисных векторов

$$\Phi_1^\circ, \Phi_2^\circ \in H^c, \quad \Phi_3^\circ, \Phi_4^\circ \in H^s$$

4. **Полный набор решений.** Ищем решение задачи (1.7) в виде

$$\Phi = \Phi^\circ + \Phi_0, \ \Phi^\circ \in H^\circ, \ \Phi_0 \perp H^\circ \tag{4.1}$$

Пусть Q — проектор на ортогональное дополнение к подпространству H°, $A - \gamma_0 B = D$. Задача (1.7) записывается в эквивалентном виде

$$D\Phi_0 = Q\,[\mu B\,(\Phi^\circ + \Phi_0) + K\,(\Phi^\circ + \Phi_0)], \quad \Phi_0 \perp H^\circ \tag{4.2}$$

$$(\mu B\Phi + K\Phi, \Phi_k^\circ)_H = 0, \qquad k = 1, \ldots, 4 \tag{4.3}$$

При заданных малых μ и Φ° уравнение (4.2) имеет единственное малое решение $\Phi_0 = \Phi_0\,(\mu, \Phi^\circ)$.

Лемма 2. Для любого решения Φ задачи (4.1) — (4.3) найдутся такие ξ, η, что $L_{\xi\eta}\,\Phi \in H^c$.

Эта лемма вытекает из предыдущего замечания, леммы 1 и соотношений (3.1) — (3.3). Лемма 2 позволяет свести задачу об отыскании полного набора малых ненулевых решений задачи (1.7) к отысканию полного набора решений из пространства H^c.

Для дальнейшего понадобятся следующие соотношения, получаемые интегрированием по частям:

$$(K\,[\Phi_1, \Phi_2], \Phi_3)_H = -\,(K\,[\Phi_1, \Phi_3], \Phi_2)_H, \ \Phi_i \in M \tag{4.4}$$

$$(K\,[\Phi_1, \Phi_2], \Phi_2)_H = 0 \tag{4.5}$$

Отметим еще одно важное свойство задачи (1.7): при $\mu = 0$ у нее нет ненулевых решений [5].

Лемма 3. Вектор $K\;[\Phi_j^\circ, \Phi_k^\circ]$ ортогонален к пространству H°.

Пусть Φ_{jk} — решение следующей задачи:

$$D\Phi_{jk} = K\,[\Phi_j^\circ, \Phi_k^\circ], \qquad \Phi_{jk} \perp H^\circ \tag{4.6}$$

Задача (4.6) разрешима в силу леммы 3 и имеет единственное решение.

Теорема 1. Для всех $(\alpha, \beta) \in E$ и числах Прандтля, таких, что

$$I = (D\Phi_{11}, \Phi_{11})_H - (D\Phi_{11}, \Phi_{22})_H - (D\Phi_{12}, \Phi_{12}, + \Phi_{21})_H \neq 0 \tag{4.7}$$

ненулевые решения задачи (1.7) при малых μ представимы в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k \varepsilon^k, \qquad \varepsilon = \sqrt{\mu} \tag{4.8}$$

Эти решения либо являются плоскими течениями, либо могут быть получены сдвигами из конвекционного течения с прямоугольной формой ячейки, симметричного относительно плоскостей XOZ, YOZ.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 вектор Φ° можно искать в виде

$$\Phi^\circ = \alpha_1\Phi_1^\circ + \alpha_2\Phi_2^\circ, \quad \alpha_i \geqslant 0 \tag{4.9}$$

Из уравнения (4.2) однозначно определяется $\Phi_0 = \Phi_0(\alpha_1, \alpha_2, \mu)$. Разыскиваем Φ_0 в виде ряда

$$\Phi_0 = \sum_{i,\, j,\, k=0}^{\infty} \Phi_{ijk}\alpha_1^{\,i}\alpha_2^{\,j}\mu^k, \qquad \Phi_{ijk} \perp H^\circ, \qquad \Phi_{ijk} \in H^\circ \tag{4.10}$$

где $\Phi_{000} = 0$. Подставляя (4.10) в условия (4.3), получаем систему уравнений разветвления

$$(\mu B\Phi + K\Phi,\ \Phi_k^\circ)_H \equiv F_k(\alpha_1, \alpha_2, \mu) = 0, \qquad k = 1,2 \tag{4.11}$$

Условия разрешимости для $k = 3,4$ выполняются автоматически в силу соотношения (3.3) и последующего замечания.

Различных решений из пространства H^c у задачи (1.7) столько же, сколько различных решений $\{\alpha_1(\mu), \alpha_2(\mu)\}$ у системы (4.11).

Установим некоторые свойства системы (4.11), вытекающие из групповых свойств исходной задачи. Обозначим $\mu B\Phi + K\Phi = f(\alpha_1, \alpha_2)$. Заметим, что

$$S_i\Phi_1^\circ = \Phi_2^\circ, \quad S_i\Phi_2^\circ = \Phi_1^\circ \tag{4.12}$$

Из отношений (4.12) следует, что $S_i f(\alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_2, \alpha_1)$, и далее, учитывая изометричность оператора S_i

$$(f(\alpha_1, \alpha_2),\ \Phi_2^\circ)_H = (S_i f(\alpha_1, \alpha_2),\ S_i\,\Phi_2^\circ)_H = (f(\alpha_2, \alpha_1),\ \Phi_1^\circ)_H$$

Таким образом

$$F_2(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \mu) = F_1(\alpha_2,\ \alpha_1,\ \mu) \tag{4.13}$$

Обозначим $L_{\pi/2al,\pi/2\beta,m} = L_1$. Заметим, что

$$L_1\,\Phi_1^\circ = -\Phi_1^\circ, \qquad L_1\Phi_2^\circ = \Phi_2^\circ \tag{4.14}$$

Аналогично предыдущему из соотношений (4.14) получаем

$$F_2(\alpha_1, \alpha_2, \mu) = F_1(-\alpha_1, \alpha_2, \mu)$$

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, \mu) = -F_1(-\alpha_1, \alpha_2, \mu) \tag{4.15}$$

Из соотношений (4.13), (4.15) заключаем, что F_1 содержит лишь нечетные степени α_1 и четные степени α_2; F_2 получается из F_4, если поменять α_1 и α_2 местами.

Итак, система (4.11) имеет вид

$$\begin{gathered} b\mu\alpha_1 + a_1\alpha_1^3 + a_2\alpha_1\alpha_2^2 + \ldots = 0 \\ b\mu\alpha_2 + a_2\alpha_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_2^3 + \ldots = 0 \end{gathered} \tag{4.16}$$

Ищем коэффициенты b, a_1, a_2. Подставляя выражение (4.10) в уравнение (4.2) и учитывая лемму 3 и (4.6), получаем

$$\Phi_{100} = \Phi_{010} = \Phi_{001} = \Phi_{00k} = 0,\ k = 1, 2, \ldots \tag{4.17}$$

$$\Phi_{200} = \Phi_{11},\ \Phi_{020} = \Phi_{22},\ \Phi_{110} = \Phi_{12} + \Phi_{21} \tag{4.18}$$

Коэффициенты b, a_1, a_2 выражаются через Φ_i°, Φ_{200}, Φ_{020}, Φ_{110}. Учитывая соотношения (4.4), (4.5), (4.18), получаем

$$b = (B\Phi_1^\circ,\ \Phi_1^\circ)_H \tag{4.19}$$

$$a_1 = (K^\circ[\Phi_{200},\ \Phi_1^\circ],\ \Phi_1^\circ)_H = -(D\Phi_{11},\ \Phi_{11})_H \tag{4.20}$$

Рассмотрим выражение для a_2

$$a_2 = (K^\circ[\Phi_{110},\ \Phi_2^\circ] + K^\circ[\Phi_{020},\ \Phi_1^\circ],\ \Phi_1^\circ)_H$$

Заметим, что в силу соотношений (4.12), (4.18) $S_i\Phi_{110} = \Phi_{110}$, откуда, учитывая тождество (4.4), получаем

$$(K[\Phi_{110},\ \Phi_2^\circ]_2\Phi_1^\circ)_H = (K[\Phi_{110},\ \Phi_1^\circ]_H = 0$$

Теперь, принимая во внимание (4.4), (4.5), (4.18), получаем

$$a_2 = -(D\Phi_{12}),\ \Phi_{12} + \Phi_{21} - (D\Phi_{11},\ \Phi_{22})_H \tag{4.21}$$

Покажем, что $b > 0$. По определению оператора B

$$-b = (\Pi \{\tau_1^\circ \mathbf{k}, V_{1z}^\circ\}, \Phi_1^\circ)_H = 2 (V_{1z}^\circ, \tau_1^\circ)_{H^2} = \frac{2}{\gamma_0} (\Delta\tau_1^\circ, \tau_1^\circ)_{H^2} < 0$$

Покажем теперь, что $a_1 < 0$. Из соотношений (4.20), (4.10) следует, что $a_1 \leqslant 0$, причем если $a_1 = 0$, то $\Phi_{11} \in H^\circ$. Последнее, однако, невозможно, иначе $K\,\Phi_1^\circ = 0$, и задача (1.7) имеет ненулевое решение Φ_1° при $\mu = 0$.

Вернемся к системе (4.16). Первое уравнение имеет множитель α_1, второе — α_2, поэтому система имеет два очевидных решения

$$\alpha_2 = 0, \qquad \alpha_1^2 = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \mu^k, \qquad t_1 = -\frac{b}{a_1} > 0$$

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \mu^k$$

Эти решения отвечают плоским конвекционным течениям. Пусть теперь $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Разыскивая другие допустимые решения, разделим уравнение системы (4.16) на α_1, α_2 соответственно. Получающаяся в результате система содержит только четные степени α_1, α_2

$$b\mu + a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots = 0 \qquad (4.22)$$
$$b\mu + a_2\alpha_1^2 + a_1\alpha_2^2 + \ldots = 0$$

Предположим, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = (a_1 + a_2)(a_1 - a_2)$$

отличен от нуля. Тогда система (4.22) однозначно разрешима относительно α_1^2, α_2^2

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \mu^k, \qquad g_1 = -\frac{b}{a_1 + a_2} > 0$$

(Ниже будет показано, что $a_1 + a_2 < 0$.) В этом случае соответствующие τ° имеют вид

$$\tau^\circ = \pm \alpha_1 u(z) [\cos(\alpha l x + \beta m y) \pm \cos(\alpha l x - \beta m y)]$$

Ясно, что все такие решения получаются сдвигами из «прямоугольной» конвекции, у которой

$$\tau^\circ = 2\alpha_1 u(z) \cos \alpha l x \cos \beta m y$$

Осталось показать, что из условия (4.7) следует, что $\Delta \neq 0$. Покажем сначала, что $a_1 + a_2 < 0$. Учитывая соотношения (4.12), (3.4), (3.5), получаем из выражений (4.20), (4.21) новые выражения для a_1, a_2

$$a_1 = -(D\Phi_{22}, \Phi_{22})_H, \quad a_2 = -(D\Phi_{21}, \Phi_{12} + \Phi_{21})_H - (D\Phi_{22}, \Phi_{11})_H \qquad (4.23)$$

Складывая выражения (4.23), (4.20), (4.21), получаем

$$-2(a_1 + a_2) = (D(\Phi_{12} + \Phi_{21}), \Phi_{12} + \Phi_{21})_H + (D(\Phi_{11} + \Phi_{22}), \Phi_{11} + \Phi_{22})_H \qquad (4.24)$$

В силу неравенства (2.10) выражение (4.21) неотрицательно, причем нулем оно может быть лишь в случае, если $\Phi_{11} + \Phi_{22} \in H^\circ$, $\Phi_{12} + \Phi_{21} \in H^\circ$. Однако это невозможно. В противном случае $K(\Phi_1^\circ + \Phi_2^\circ) = 0$, и задача (1.7) имеет ненулевое решение $\Phi = \Phi_1^\circ + \Phi_2^\circ$ при $\mu = 0$.

Итак, $\Delta \neq 0$, если $a_1 - a_2 \neq 0$, откуда получаем условие (4.7). Теорема доказана.

5. **Расчет** I. Рассмотрим функционал I на множестве $(\alpha, \beta) \in E$. Обозначим $\alpha l = \alpha_1$, $\beta m = \beta_1$. В силу соотношения (2.7)

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = \theta_0^2 \tag{5.1}$$

Число Прандтля P линейно входит в оператор K. Понятно, что функционал I есть квадратный трехчлен от P. На окружности (5.1)

$$I(\alpha_1, P) = a(\alpha_1)P^2 + b(\alpha_1)P + c(\alpha_1) \tag{5.2}$$

Коэффициенты трехчлена (5.2) были вычислены при $\theta_0^2 = 9.7157$ Л. И. Михайловым и автором. Расчеты показали, что трехчлен не имеет положительных корней ни при каких значениях α_1. Это означает применимость теоремы при всех $(\alpha, \beta) \in E$.

Заметим, что величина I играет роль и при исследовании устойчивости получающихся вторичных режимов относительно возмущений той же периодичности.

Замечание. Все предыдущие рассуждения распространяются на случай конвекции в слое между двумя свободными поверхностями. В этом случае знак функционала I можно установить аналитически. Можно показать, что в этом случае

$$2I = -(D(\Phi_{12} + \Phi_{21}),\ \Phi_{12} + \Phi_{21})_H < 0$$

Поступила 6 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6
2. Rabinowitz P. H. Existence and Nonuniqueness of Rectangular Solutions of the Bènard Problem. Arch. Rat. Mech. and Anal., 1968, vol. 29, No. 1.
3. Уховский М. Р., Юдович В. И. Об уравнениях стационарной конвекции. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
4. Schlüter A., Lortz D., Busse F. On the stability of steady finite amplitude convection. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, No. 1.
5. Юдович В. И. Свободная конвекция и ветвление. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.

УДК 536.25

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ

П. С. Черняков

(Харьков)

Дается обоснование метода последовательных приближений для нахождения распределения скоростей и температур при нестационарной свободной конвекции в замкнутой выпуклой области, на поверхности которой задана плотность теплового потока. Области применимости этого метода и метода малого параметра совпадают. Доказывается сходимость приближенного решения к точному решению и приводится оценка погрешности. Доказывается локальная теорема существования и теорема единственности классического решения.

1. Пусть выпуклая область Ω полностью заполнена несжимаемой вязкой жидкостью, имеющей постоянную начальную температуру b_0. Пусть для $t_1 > 0$ на поверхности сосуда S задано распределение плотности теплового потока $q_1(x_{1s}, t_1)$. Выведем уравнения, описывающие нестационарную свободную конвекцию в ограниченной области с граничными условиями второго рода.

В приближении Буссинеска [1] запишем уравнение состояния в виде

$$\rho(b) = \rho(\langle b\rangle)[1 - \beta(\langle b\rangle)(b - \langle b\rangle)] \tag{1.1}$$