УДК 534.222.2

О ВЗРЫВЕ В ДЕТОНИРУЮЩИХ СРЕДАХ С ПЕРЕМЕННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Н. С. Мельникова

(Москва)

Рассматривается неавтомодельная задача о точечном взрыве в детонирующем газе в среде с переменной начальной плотностью. Для давления, плотности и скорости газа получены аналитические зависимости от расстояния до точки взрыва и радиуса детонационной волны, определяемого из решения дифференциального уравнения. Проводятся расчеты для случая сферической и цилиндрической симметрии при разных значениях показателя адиабаты и показателя изменения начальной плотности.

Рассмотрим совершенный газ, невязкий и нетеплопроводный. Пусть в момент времени $t = 0$ в безграничной покоящейся среде ($v_1 = 0$) мгновенно происходит взрыв с конечной энергией E_0 в точке, вдоль плоскости или вдоль прямой [1]. Вследствие взрыва по газу распространяется сильная ударная волна, которая нагревает его до состояния, при котором возможна реакция быстрого горения. Предполагая, что энергия E_0 велика и много больше энергии Q_1, выделившейся при сгорании газа, можно считать, что газ сгорает в непосредственной окрестности фронта ударной волны. При этом можно рассматривать ударную волну вместе с зоной химических реакций как одну поверхность сильного взрыва с выделением тепла, т. е. рассматривать фронт детонационной волны.

Обозначим p_1 — начальное давление, ρ_1 — начальную плотность, зависящую от начальной координаты частицы ξ по следующему закону: $\rho_1 = A\xi^{-\omega}$, где A — положительная размерная постоянная, ω — отвлеченная постоянная, которая может быть положительной или отрицательной. Случай $\omega = 0$ соответствует постоянной начальной плотности.

Пусть Q — теплотворная способность единицы массы горючего газа, тогда энергия Q_1, выделившаяся при сгорании газа, когда радиус фронта волны равен r_2, имеет величину

$$Q_1 = \sigma_\nu(\nu - \omega)^{-1}\rho_1 Q r_2^\nu, \qquad \sigma_\nu = 2(\nu - 1)\pi + (\nu - 2)(\nu - 3)$$

где $\nu = 1$ для плоских, $\nu = 2$ для цилиндрических и $\nu = 3$ для сферических волн. Из физических соображений следует, что в первые моменты после взрыва газ будет двигаться, подчиняясь законам точечного взрыва без детонации, так как вклад энергии горения в общий влад энергии будет мал. Считая, что энергия взрыва E_0 много больше энергии горения Q_1, находим область течения $r_2 < r_2^*$, $r_2^* = (\nu E_0 / \sigma_\nu A Q)^{1/\nu+\omega}$, в которой слабо влияет детонация [2,3].

С увеличением радиуса детонационной волны энергия горения Q_1 увеличивается, и ее влияние следует учитывать в условии сохранения энергии, сохраняя при этом в неизменном виде механические условия на волне.

Ниже предлагается приближенный метод решения и рассматривается неавтомодельная задача о взрыве с учетом энергии горения Q_1 на фронте волны. В линеаризованной постановке эта задача рассмотрена в работе [4].

Решение рассматриваемой задачи сводится к интегрированию системы уравнений газовой динамики для одномерных движений с учетом начальных условий в центре и граничных условий на фронте детонационной волны. Систему уравнений газовой динамики, описывающую одномерные адиабатические движения газа при взрыве, возьмем в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0\\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{(\nu - 1)\rho v}{r} = 0\\ \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{p}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt} = 0\end{gathered} \tag{1}$$

В момент времени $t = 0$ в центре симметрии выделяется конечная энергия E_0 и заданы начальные условия

$$v(r, 0) = 0, \quad \rho(r, 0) = \rho_1 = A\xi^{-\omega} \tag{2}$$
$$p(r, 0) = p_1 = \text{const}, \quad r_2(0) = 0$$

На фронте детонационной волны должны выполняться законы сохранения массы, энергии и изменения количества движения

$$\rho_1(v_1 - c) = \rho_2(v_2 - c), \quad \rho_1(v_1 - c)^2 + p_1 = \rho_2(v_2 - c)^2 + p_2 \tag{3}$$
$$\frac{1}{2}(v_1 - c)^2 + \frac{\gamma_1 p_1}{(\gamma_1 - 1)\rho_1} + Q = \frac{1}{2}(v_2 - c)^2 + \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}\frac{p_2}{\rho_2}$$

где c — скорость ударной волны, а γ_1 и γ — удельные теплоемкости до и за фронтом волны.

Таким образом, для решения задачи о точечном взрыве в детонирующем газе требуется найти решение системы (1), удовлетворяющее краевым условиям (2), (3). Система определяющих параметров для возмущенного движения после взрыва представится величинами

$$E_0, Q, A, p_1, \omega, \gamma, r, t, \gamma_1 \tag{4}$$

Для простоты будем считать детонационную волну сильной, тогда можно пренебречь начальным давлением p_1, при этом γ_1 выпадает из условий на фронте (3). В случае сильной детонационной волны из системы определяющих параметров (4) следует, что если ввести безразмерные искомые функции и переменные

$$f(\lambda, q) = v/v_2, \quad g(\lambda, q) = \rho/\rho_2, \quad h(\lambda, q) = p/p_2 \tag{5}$$
$$\lambda = r/r_2, \; q = \sqrt{Q/c}$$

то безразмерные функции $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q)$ будут зависеть еще от постоянных параметров γ, ω. Условия на сильной детонационной волне ($p_1 = 0$) для покоящегося газа ($v_1 = 0$) можно записать в виде

$$v_2 = c(1 - \varepsilon), \quad p_2 = \rho_1 c^2(1 - \varepsilon), \quad \rho_2 = \rho_1/\varepsilon$$
$$\varepsilon = (\gamma + 1)^{-1}[\gamma - \sqrt{1 - 2(\gamma^2 - 1)q^2}] \tag{6}$$

В безразмерных переменных (5) условия на детонационной волне запишутся в виде

$$f_2(1, q) = 1, \; g_2(1, q) = 1, \; h_2(1, q) = 1 \tag{7}$$

В случае произвольного Q параметр q — переменный, следовательно, задача будет неавтомодельной. При малых значениях q для решения задачи можно применить метод линеаризации исходных уравнений (1) по малому параметру q около автомодельного решения [5–8].

В данной работе для решения неавтомодельной задачи применяется метод задания одной из функций, характеризующей движения, при помощи интерполяционной формулы. Для определения коэффициентов этой формулы, зависящих от времени, используются интегральные законы сохранения и граничные условия (6). Остальные функции, характеризующие движения, определяются из точных уравнений движения [9, 10].

Характеристики на детонационной волне $v_2(t)$, $\rho_2(t)$, $p_2(t)$ будут определены из соотношения (6), если известно $r_2(t)$. Для определения $r_2(t)$ используем закон сохранения энергии, связывающий энергию взрыва E_0 и энергию горения Q_1 с параметрами на фронте детонационной волны.

Если $p_1 = 0$, то в безразмерных переменных (5) интегральный закон сохранения энергии можно записать в виде

$$j_1(\varepsilon) I_1 + j_2(\varepsilon) I_2 = \frac{q^2}{\nu - \omega} + \frac{q^2}{\sigma_\nu \gamma R^{\nu - \omega}} \tag{8}$$

Здесь

$$j_1(\varepsilon)=\frac{p_2}{(\gamma-1)\rho_1c^2}=\frac{(1-\varepsilon)}{\gamma-1},\qquad j_2(\varepsilon)=\frac{\rho_2v_2^2}{2\rho_1c^2}=\frac{(1-\varepsilon)^2}{2\varepsilon}$$

$$I_1=\int_0^1 h\lambda^{\nu-1}d\lambda,\qquad I_2=\int_0^1 gf^2\lambda^{\nu-1}d\lambda$$

Введем безразмерные величины R и τ

$$R=\frac{r}{r_0},\qquad \tau=\frac{t}{t_0},\qquad r_0=\left(\frac{\gamma E_0}{QA}\right)^{1/\nu-\omega},\qquad t_0=\frac{r_0}{\sqrt{Q}}$$

где r_0 — динамическая длина, t_0 — динамическое время.

Интегральным законом удобно пользоваться для определения радиуса ударной волны $r_2(t)$, если найдено решение системы уравнений (1). Если известна зависимость эйлеровой координаты r от t и лагранжевой координаты ξ, то для скорости, плотности и давления из системы (1) получим аналитические зависимости от радиуса r и радиуса детонационной волны. Будем искать функцию r в следующем виде:

$$r=c(t)\,\xi^{\alpha_1}+b \tag{9}$$

При надлежащем выборе $c(t)$, $\alpha_1(t)$, b можно удовлетворить системе уравнений (1) и соответствующим граничным условиям (2), (3). В качестве лагранжевой координаты берем начальную координату частицы ξ, при этом в момент прохождения через частицу ударной волны лагранжева координата $\xi=r_2$. Тогда коэффициенты в формуле (9) имеют вид

$$c(t)=r_2^{(1-\alpha_1)},\qquad b=0 \tag{10}$$

Из закона сохранения масс в дифференциальной форме с использованием (9) и (10) получим

$$\rho=\rho_2\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha(t)} \tag{11}$$

$$\alpha(t)=\nu\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)-\omega\frac{\rho_2}{\rho_1},\qquad \alpha_1(t)=\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

В дальнейшем при решении задачи будем считать, что распределение плотности внутри ударной волны определяется формулами (11). Тогда из второго уравнения системы (1) можно определить скорость, а из первого — давление в газе. Третьим уравнением системы (1) — уравнением энергии — можно воспользоваться для определения радиуса ударной волны $r_2(t)$, но удобнее для этого использовать интегральный закон сохранения энергии (8). Поэтому в дальнейшем будем удовлетворять ему для всей области возмущенного движения, заключенного внутри ударной волны.

Подставим выражение $\rho(r,t)$ из (11) во второе уравнение (1), получим уравнение для скорости, решая которое с учетом граничных условий (2), (3), получим

$$v(r,t)=v_2\left(1-\frac{r_2}{v_2}\ln\frac{r}{r_2}\frac{d}{dt}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{r}{r_2} \tag{12}$$

Подставив $v(r,t)$ из (12), $\rho(r,t)$ из (11) в первое уравнение системы (1), получим уравнение для определения давления, решая которое с учетом граничного условия (3), найдем давление.

После некоторых упрощений формулы, дающие распределение безразмерных характеристик движения в возмущенной области, можно записать в следующем виде:

$$h=\frac{p}{p_2}=1+\frac{H_1\rho_2r_2}{(\alpha+2)p_2}\left[1-\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha+2}\right]-\frac{\rho_2r_2}{p_2(\alpha+2)}\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha+2}\left(H_2+H_3\ln\frac{r}{r_2}\right)\ln\frac{r}{r_2}$$

$$f=\frac{v}{v_2}=\left[1-H_4\ln\frac{r}{r_2}\right]\frac{r}{r_2},\qquad g=\frac{\rho}{\rho_2}=\left(\frac{r}{r_2}\right)^{\alpha} \tag{13}$$

Здесь

$$H_1 = K_1 - \frac{H_2}{\alpha + 2}, \qquad H_2 = K_2 - \frac{2H_3}{\alpha + 2}$$

$$H_3 = r_2 \left[\frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]^2, \qquad H_4 = \frac{r_2}{v_2}\frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

$$K_1 = \frac{v_2^2}{r_2} + \frac{dv_2}{dt} - v_2 \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{v_2}{r_2}\frac{dr_2}{dt} + \frac{dr_2}{dt}\frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

$$K_2 = 2H_3 - 2v_2 \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{r_2\rho_1}{\rho_2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$

Решение (13) удовлетворяет всем граничным условиям; время t в это решение входит через характеристики движения на фронте детонационной волны и координату фронта $r_2(t)$. Из условий на детонационной волне (6) ясно, что все характеристики движения $v_2(t)$, $\rho_2(t)$, $p_2(t)$ в возмущенной области выражаются через функцию $r_2(t)$, описывающую закон распространения детонационной волны; если $r_2(t)$ известно, например, из эксперимента, то формулы (13) дают полное решение рассматриваемой задачи о взрыве в среде с переменной начальной плотностью и с учетом горения на фронте. Следует отметить, что формулы (13) приведены к тому же виду, что и при решении задачи о точечном взрыве в среде с переменной начальной плотностью без учета горения на фронте [7], но зависимость функций H_1, H_2, H_3, H_4 от $R_2(q)$ определяется формулами

$$H_1 = \frac{Q}{r_0}\left\{\left[\frac{\varepsilon - 1}{q} - \frac{4(\gamma - 1)q}{[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon]}\right]\frac{1}{q^2}\frac{dq}{dR_2} + \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{q^2 R_2}\right\} - \frac{\varepsilon H_2}{[\nu - \omega + (2-\nu)\varepsilon]}$$

$$H_2 = \frac{Q}{r_0}\frac{2(\gamma - 1)R_2}{\varepsilon q[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon]}\left\{\frac{d^2q}{dR_2^2} + 2(1-\varepsilon)\frac{dq}{dR_2} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon]^2 q} - \frac{4(\gamma - 1)q}{[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon][\nu - \omega + (2-\nu)\varepsilon]} - \frac{1}{q}\right]\left(\frac{dq}{dR_2}\right)^2\right\} \qquad (14)$$

$$H_3 = \frac{Q}{r_0}\frac{4(\gamma - 1)^2 R_2}{\varepsilon^2[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon]^2}\left(\frac{dq}{dR_2}\right)^2$$

$$H_4 = \frac{2(\gamma - 1)qR_2}{\varepsilon(1-\varepsilon)[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon]}\frac{dq}{dR_2}$$

Если безразмерный радиус фронта детонационной волны $R_2(q)$ неизвестен, то, заменив в уравнении сохранения энергии (8) функции $f(\lambda, q)$, $g(\lambda, q)$, $h(\lambda, q)$ соответствующими им выражениями из решения (13), где функции H_1, H_2, H_3, H_4 определены по формулам (14), получим для определения $R_2(q)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка следующего вида:

$$A_1 R_2 \frac{d^2q}{dR_2^2} + \left\{2A_1(\nu + 1 + \varepsilon - \omega) + \frac{R_2(1-\varepsilon)}{\nu q(\gamma - 1)(\nu - \omega + 2\varepsilon)} - \right.$$

$$\left. - \nu(1-\gamma)(1-\varepsilon)A_1\right\}\frac{dq}{dR_2} + R_2 A_1\left\{\frac{1}{[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon]^2 q} - \frac{1}{q} + \right.$$

$$\left. + \frac{4(\gamma - 1)q}{[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon](\nu - \omega + 2\varepsilon)} - \frac{2\nu q(1-\gamma)^2}{[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon](\nu - \omega + 2\varepsilon)}\right\}\left(\frac{dq}{dR_2}\right)^2 - \qquad (15)$$

$$- \frac{1-\varepsilon}{(\nu - \omega + 2\varepsilon)}\left\{\frac{\nu - \omega + \varepsilon}{\nu(\gamma - 1)} + \frac{1-\varepsilon}{2}\right\} + \frac{q^2}{\gamma\sigma_\nu R_2^{\nu-\omega}} + \frac{q^2}{\nu - \omega} = 0$$

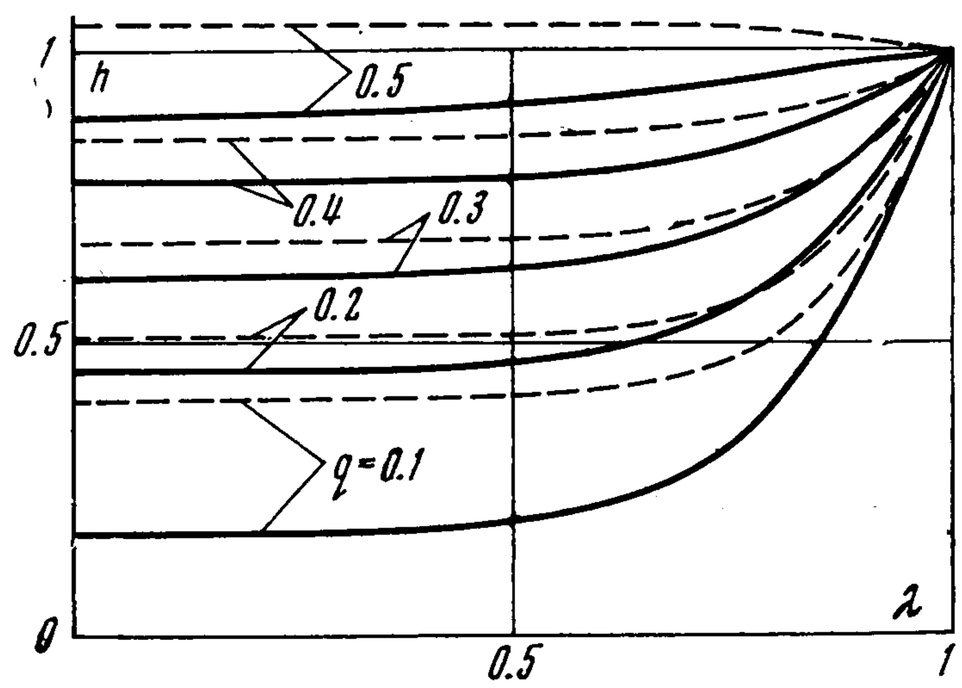
Здесь

$$A_1 = \frac{2R_2 q}{\nu[\gamma(1-\varepsilon) - \varepsilon](\nu - \omega + 2\varepsilon)^2}$$

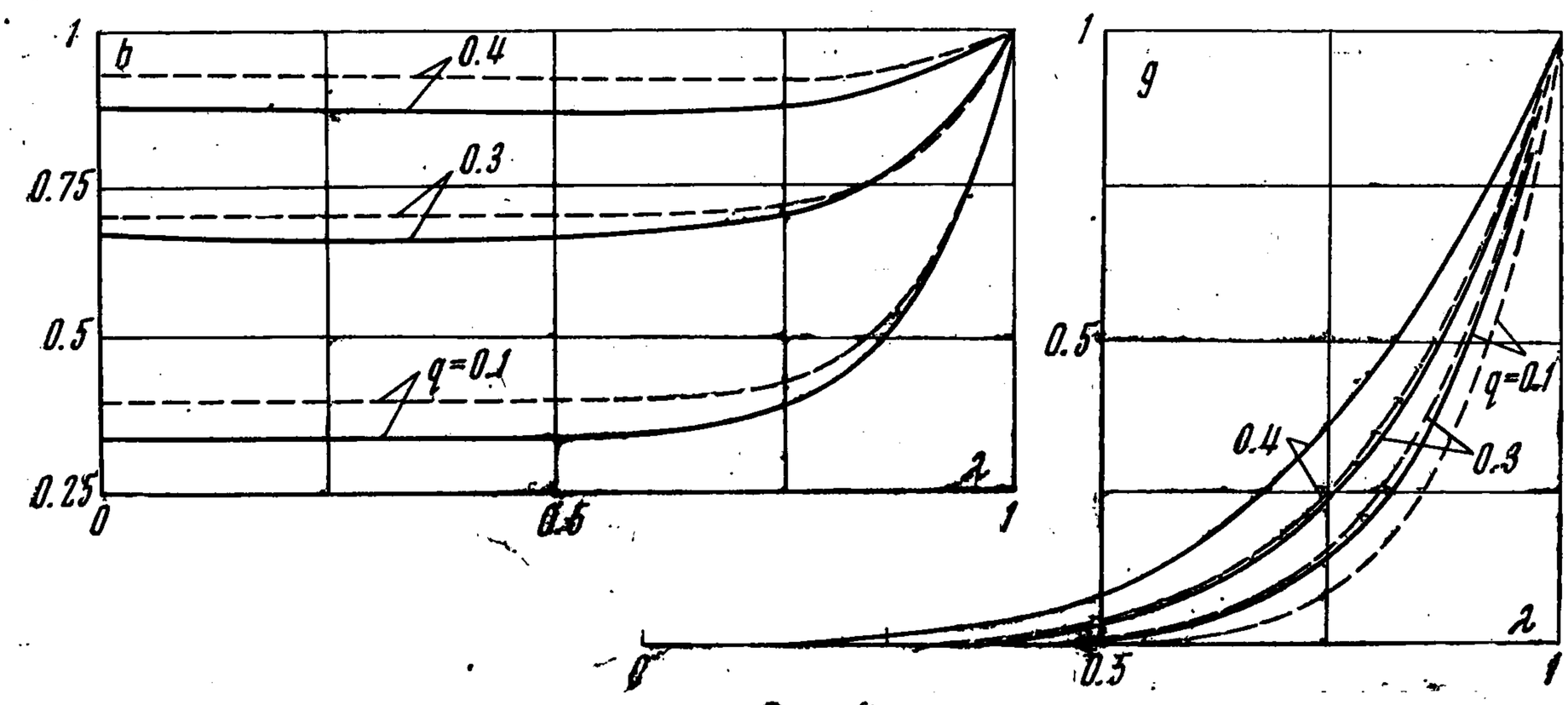
Взяв за независимое переменное параметр q, а за искомые функции $R_2(q)$ и $\sigma(q) = dq / dR_2$, получим систему двух обыкновенных уравнений, которая для разных значений γ проинтегрирована численно. С использованием найденных значений $R_2(q)$,

безразмерные характеристики: давление, скорость и плотность определялись по формулам (13).

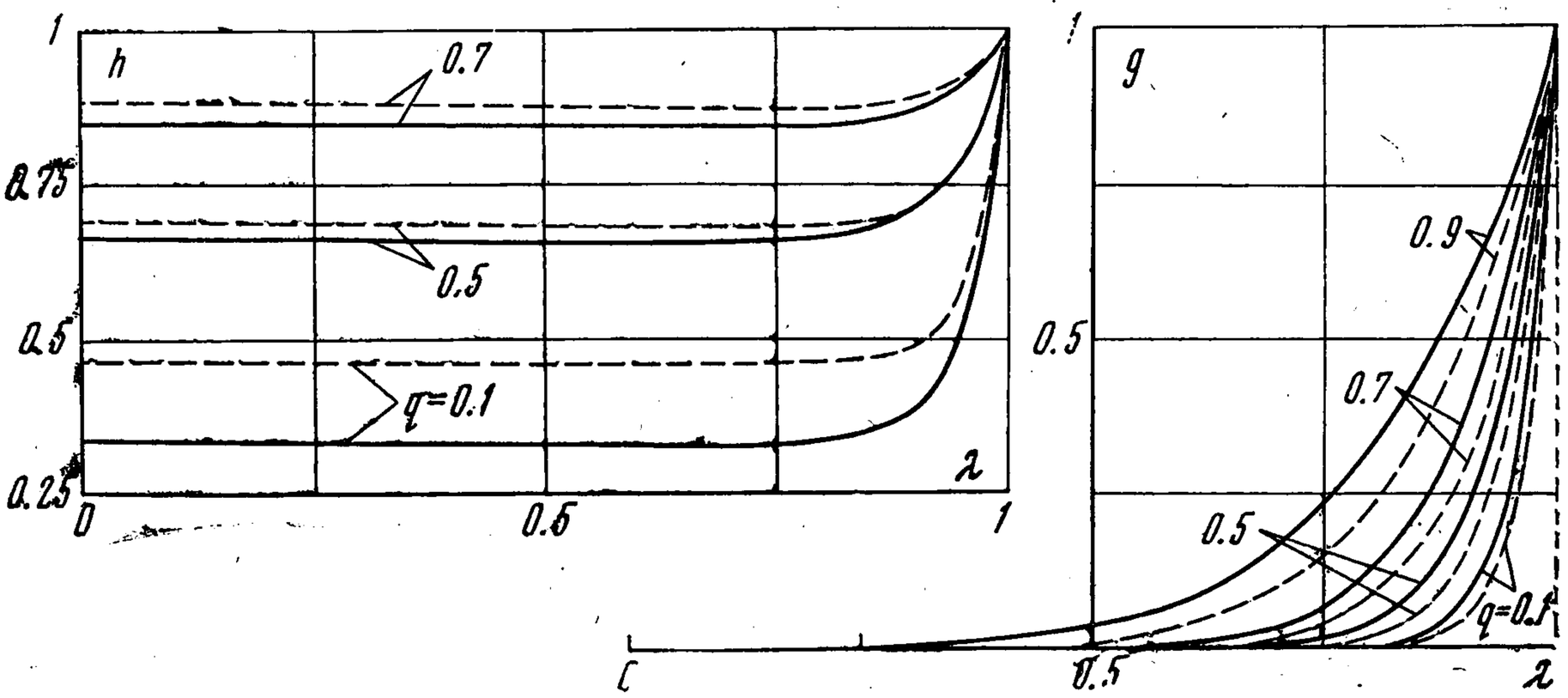
На фиг. 1 для некоторых значений безразмерного параметра q показаны распределения безразмерных давлений в случае цилиндрической симметрии ($\nu = 2$) при $\gamma = {}^5/_3$. На фиг. 2, 3 даны распределения безразмерных давлений и плотностей для сферической симметрии ($\nu = 3$), — на фиг. 2 при $\gamma = {}^5/_3$, на фиг. 3 при $\gamma = 1.2$. Из фиг. 1—3 видно, что качественные распределения во времени безразмерных плотностей и



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

давлений в среде с переменной начальной плотностью ($\omega = 0.5$, сплошные линии) имеют такой же характер, как в среде с постоянной начальной плотностью ($\omega=0$, пунктир), но количественные значения существенно различаются.

Поступила 6 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4-е, М., Гостехиздат, 1957.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
4. Коробейников В. П. Точечный взрыв в детонирующем газе. Докл. АН СССР, 1969, т. 177, № 2.
5. Коробейников В. П., Мельникова Н. С. О точных решениях линеаризованной задачи о точечном взрыве с противодавлением. Докл. АН СССР, 1957, т. 116, № 2.
6. Sakurai A. On propagation and structure of the blast wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 8, No 5; 1954; vol. 9, No. 3.
7. Sakurai A. On exact solution of the blast wave problem. J. Phys. Soc. Japan, 1955, vol. 10, No 6.
8. Карликов В. П. Линеаризованная задача о распространении сильного взрыва в неоднородной атмосфере. Вестн. МГУ, Сер. матем., механ., астроном., физ., хим., 1959, № 4.
9. Мельникова Н. С., Саламахин Т. М. О расчете точечного взрыва в различных газах. ПМТФ, 1964, № 4.
10. Мельникова Н. С. О точечном взрыве в среде с переменной начальной плотностью. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 37.

УДК 536.25

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

Г. К. Тер-Григорьянц

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются стационарные двоякопериодические конвекционные режимы в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, ответвляющиеся от состояния покоя при потере устойчивости.

Для почти всех отношений волновых чисел уравнение разветвления четырехмерно. Используя инвариантность задачи относительно сдвигов в горизонтальной плоскости, удается понизить размерность уравнения разветвления. Исследование полученной двумерной системы показывает, что от состояния покоя ответвляются три существенно разных режима. Один из этих режимов — прямоугольная конвекция [1, 2], а два других — плоская. Приведенные утверждения о ветвлении справедливы и в случае конвекции в слое с двумя свободными границами.

Обычно при отыскании вторичных двоякопериодических конвекционных режимов делаются некоторые дополнительные предположения об их симметрии, позволяющие свести задачу к случаю простого спектра (см. [1–3]). Однако для решения вопроса об отыскании всех двоякопериодических режимов необходимо рассмотреть полное многомерное уравнение разветвления. Такая задача ставится, например, в работе [4].

Исследовать уравнение разветвления помогает использование групповых свойств задачи. Так, в работе [5] показано, что в некоторых случаях (в частности для плоской