ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Колмановский В. Б. Оптимальное управление некоторыми процессами наблюдения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. Кац И. Я., Куржанский А. Б. О двойственности статистических задач оптимального управления и наблюдения. Автоматика и телемеханика, 1971, № 3.
5. Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л. Оптимизация помех при наблюдении за динамической системой. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 2.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М., «Наука», 1966.
7. Neustadt L. W. Optimisation, a moment problem and nonlinear programming. J. Soc. Industr. Appl. Math. A., 1964, vol. 2, No 1.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
9. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М., «Наука», 1965.

УДК 533.6

О ВОЗМОЖНОСТИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ФАЗОВОГО РАВНОВЕСИЯ

В. И. Цурков (Москва)

Указывается на возможность выбросов плотности при одномерных неустановившихся течениях жидкости вблизи критической точки фазового равновесия, как следствие особенности уравнения состояния.

Исследования относятся к вопросу о возможности обращения в бесконечность классических решений задачи с начальными условиями для уравнений одномерной нестационарной газодинамики в неизоэнтропическом случае. Здесь приходится рассматривать систему трех квазилинейных гиперболических уравнений, для которых, как известно [1,2], нормальным случаем является неограниченность решения. С другой стороны, система уравнений газодинамики имеет ряд специфических свойств. Прежде всего, наличие одного инварианта, т. е. функции, которая остается ограниченной [1]. Другое важное свойство заключается в том, что обобщенные инварианты Римана удовлетворяют многомерным интегральным уравнениям вольтерровского типа, где в качестве конуса интегрирования выступает область определенности гиперболических уравнений, и ограниченность решения следует из тонких свойств интегрируемости ядра. В терминах уравнений газодинамики последние приводят к ограничениям на уравнение состояния и сами вытекают из ограниченности вариации энтропии вдоль звуковых характеристик и слаболинейности (контактности) энтропийных характеристик [3].

Условия на уравнения состояния, обеспечивающие ограниченность, выражаются следующими неравенствами [3]:

$$0 < c^\circ \leqslant c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V, \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial S}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S^{-1}\right| \leqslant K^\circ \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, S — энтропия единицы массы, V — удельный объем, $p = p(\rho, S)$ — давление, T — температура, c_V — теплоемкость единицы массы.

Рассматривается случай, когда не выполнено второе ограничение [3]. Это имеет место в критической точке фазового равновесия, согласно феноменологической теории [4], базирующейся на логарифмической особенности теплоемкости. Указывается на возможность газодинамических эффектов, которые заключаются в локализованных вы-

бросах плотности, связанных со свойствами неограниченности решения уравнений газодинамики, полученных в [3,5].

Рассматривается задача Коши для уравнений газодинамики в лагранжевых координатах при отсутствии диссипативных членов

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = 0$$

$$u(0, q) = 0,\ v(0, q) = 0,\ \theta_i(0, q) = \theta_i^\circ(q),\ q \in [a, b],$$
$$s = S - S_*,\ v = V - V_*,\ \theta = T - T_*$$

где S_*, T_*, V_* — значения термодинамических функций в критической точке, t — время, q — массовая лагранжева координата, u — скорость.

Предполагается, что $\theta_i(q)$ — последовательность симметричных неотрицательных гладких функций, имеющих единственный локальный минимум в точке $q = 0$, стремящийся к нулю по функциональной последовательности. Другими словами, в начальный момент имеется однородная фаза с критической плотностью, причем в точке $q = 0$ осуществляется состояние, приближающееся к критическому.

Давление вблизи критической точки складывается из двух частей [4]: регулярной p_1 и нерегулярной p_2. Регулярная часть является разложением в ряд по целым степеням θ и v и с точностью до членов более высокого порядка малости имеет вид [6]

$$p_1 = -A\theta v - Bv^3 / 3 + f(\theta) \quad (A = \text{const},\ B = \text{const})$$

где $f(\theta)$ — неопределенная регулярная функция. Согласно [4], главный член разложения $f(\theta)$ вблизи критической точки равен $E\theta$, где $E = \text{const} > 0$. Нерегулярная часть равна $-(\partial F_2 / \partial v)_\theta$, где F_2 — нерегулярный добавок к свободной энергии [4]

$$F_2 = \alpha_1\theta^2 \ln[(\theta + \beta v^2)^2 + \gamma^2 v^4] + \theta^2 h(\theta / v^2)$$

Здесь h — ограниченная функция (несущественная в дальнейшем), $\alpha_1, \beta, \gamma = \text{const}$, $\alpha_1 < 0$.

Нерегулярный добавок теплоемкости равен [4]

$$c_{V_2} = 2\alpha_1 \ln[(\theta + \beta v^2)^2 + \gamma^2 v^4] + h_1(\theta / v^2) \tag{2}$$

где h_1 — ограниченная функция также несущественная в дальнейшем.

Можно показать, что при этих условиях адиабатическая скорость звука $a = (\partial p / \partial\rho)_S^{1/2}$ при подходе к критической точке стремится к нулю, и, поскольку $(\partial^2 p/\partial\rho\partial S) \cdot (\partial p/\partial\rho)_S^{-1} = (\partial \ln a^2 / \partial S)$, второе ограничение (1) не выполнено.

Выразим теперь давление вблизи критической точки как функцию плотности и удельной энтропии, по крайней мере, в начальный момент времени, т. е. при $v = 0$, чтобы затем воспользоваться результатами работ [3, 5].

Согласно (2), вблизи критической точки для производной $(\partial S / \partial\theta)_v$ имеет место соотношение

$$(\partial S / \partial\theta)_v = C_{V_1} / T + (2\alpha_1 / T) \ln[(\theta + \beta v^2)^2 + \gamma^2 v^4] + [h_1(\theta / v^2)] / T$$

Здесь c_{V_1} — регулярная часть теплоемкости.

Коэффициентами при логарифмических членах нерегулярных частей свободной энергии и теплоемкости в точной теории [4] служат неопределенные регулярные функции от θ и v, не равные нулю при $\theta = v = 0$. Поэтому можно предположить, что существенная для дальнейшего логарифмическая часть производной $(\partial S / \partial\theta)_v$ вблизи критической точки имеет вид

$$(\partial S / \partial\theta)_{v\log} = \alpha_2 V^{\gamma_1} \ln[(\theta + \beta v^2)^2 + \gamma^2 v^4], \qquad (\alpha_2, \gamma_1 = \text{const},\ \alpha_2 < 0,\ \gamma_1 > 0) \tag{3}$$

Далее вместо (3) возьмем (ε — малое положительное число).

$$(\partial s / \partial\theta)_v = \alpha_3 V^{\gamma_1} (\theta + \beta v^2)^{-\varepsilon} \quad (\alpha_3 = \text{const} > 0) \tag{4}$$

Последнее предположение означает замену логарифмического роста теплоемкости на рост с малой степенью, что существенно упростит выкладки, однако не повлияет на окончательный результат. Кроме того, для упрощения опускается член $\gamma^2 v^4$, так как, поскольку в исходной постановке задаче Коши $v = 0$, его влияние в первый момент может быть незначительным.

Интегрируя (4), получим, с точностью до произвольной функции v, главный вклад в энтропию

$$s = \alpha_3 V^{\gamma_1} (\theta + \beta v^2)^{(1-\varepsilon)} / (1 - \varepsilon)$$

откуда имеем

$$\theta = (1 - \varepsilon)^{\omega} \rho^{\gamma_1 \omega} s^{\omega} \alpha_3^{-\omega} - \beta v^2 \qquad (\omega = 1 / (1 - \varepsilon))$$

Соответствующий главный вклад в нерегулярную часть давления имеет вид

$$p_2 = \frac{\alpha_2 \gamma_1 V^{\gamma_1 - 1} (\theta + \beta v^2)^{(2-\varepsilon)}}{(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon)} + \frac{\alpha_3 V^{\gamma_1} (\theta + \beta v^2)^{(1-\varepsilon)} 2\beta v}{(1 - \varepsilon)}$$

При рассмотрении исходной задачи Коши, поскольку $v = 0$ и $p_2 \sim \theta^{(2-\varepsilon)}$, основной вклад дает член $E\theta$ от регулярной части давления, который при $t = 0$ равен

$$p_1 = E (1 - \varepsilon)^{\omega} \rho^{\gamma_1 \omega} s^{\omega} \alpha_3^{-\omega} \tag{5}$$

Равенство (5) принадлежит к типу $p = A^2{}_0 \rho^{\gamma_0} S^{2\alpha} / \gamma_0$, где γ_0 заменяется на $\gamma_1 \omega$ и $2\alpha = \omega$. Для такого класса уравнений состояния при рассмотрении задачи Коши с начальной энтропией $S^0(q) = S^0 q^{\beta} + S^i_{\min}$ и плотностью $\rho^0(q) = \rho^0(\rho^0, S^0, \beta, S^i_{\min} = \text{const} > 0)$ в [3,5] получено следующее поведение решения. Градиенты давления из-за градиентов энтропии заставляют газ втекать в точку $q = 0$. Если $\alpha\beta \in [0.5, 1]$, то при $S^i_{\min} \to 0$ максимум плотности в точке $q = 0$ на соответствующем решении стремится к бесконечности. При $\alpha\beta = 1$ время до момента достижения максимума стремится к конечному значению (неограниченность типа «пробоя»); при $\alpha\beta \in (0.5, \alpha\beta^*(\gamma_0))$, время стремится к нулю (неограниченность типа «выброса» [5]).

Если вблизи критической точки рассматривать последовательность температур $\theta^0(q) = \theta^0 q^{\mu} + \theta^i_{\min}$ и $\theta^i_{\min} \to 0$, где θ^0, $\mu = \text{const} > 0$ то, поскольку $S^0(q) \sim q^{\mu\omega}$, условие $0.5 < \alpha\beta < 1$ дает $1 < \mu < 2$. В данном рассмотрении, разумеется, обращения в бесконечность плотности не имеет места из-за наличия, например, в выражении для p_1, второго члена, который с ростом плотности вызовет противодавление. Тем не менее если формально $B \to 0$, то максимум плотности стремится к бесконечности, т. е. при некоторых малых B можно получить сильный локализованный выброс плотности вблизи критической точки фазового равновесия.

Замечание. Как сообщил автору рецензент, при течениях вблизи критической точки фазового равновесия выбросы плотности действительно экспериментально обнаруживаются в энергетических установках.

В заключение автор благодарит Л. А. Галина, С. И. Анисимова и М. Я. Азбеля за обсуждение работы.

Поступила 28 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов А. М. Ограниченность вариации непрерывных решений системы уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР, 1959, т. 129, № 6.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений. М., «Наука», 1968.
3. Цурков В. И. Газодинамические эффекты, связанные с неограниченностью решений квазилинейных систем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 2.
4. Азбель М. Я., Воронель А. В., Гитерман М. Ш. К теории критической точки. ЖЭТФ, 1964, т. 46, № 2.
5. Цурков В. И. Об одном автомодельном решении уравнений газодинамики. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 4.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.