УДК 62—50

О НЕКОТОРЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ЗАКОНАХ НАБЛЮДЕНИЯ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Рассматривается задача об оптимизации оценки фазовых координат. Получены условия разрешимости задачи и установлен вид оптимальных законов наблюдения. Работа примыкает к статьям [1,2]. С других позиций задача об оптимизации процесса наблюдения изучена в [3,4].

1. Пусть вектор $x(t)$ фазовых координат объекта из евклидова пространства R_n размерности n есть решение системы уравнений

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + b(t), \qquad x(0) = x_0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{1.1}$$

Доступный наблюдению вектор $y(t)$ задается соотношениями

$$dy(t) = h(t)\,H(t)\,x(t)\,dt + \sigma(t)\,d\xi(t), \quad y(0) = 0 \tag{1.2}$$

Элементы матриц $A(t)$, $H(t)$, $\sigma(t)$ и $b(t)$ — непрерывные функции. Случайная величина $x(0)$ имеет гауссово распределение с матрицей ковариации

$$D_0 = M(x_0 - Mx_0)(x_0 - Mx_0)', \; D_0 > 0$$

Здесь штрих — знак транспонирования, M — математическое ожидание, символ $D_0 > 0$ означает положительную определенность матрицы D_0. Винеровский процесс $\xi(t)$ не зависит от $x(0)$, а матрица $\sigma(t)\,\sigma'(t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Без ограничения общности [2], можно считать, что размерность вектора $y(t)$ равна n.

Управление процессом наблюдения осуществляется выбором скалярной функции $h(t)$.

Рассмотрим линейную комбинацию $q'x(T)$ (заданный ненулевой вектор $q \in R_n$). Пусть $D(T)$ — матрица ковариации условного распределения вектора $x(T)$ при условии $y(s)$, $0 \leqslant s \leqslant T$.

Задача 1. Определить функцию $\gamma(t) = h^2(t)$ (оптимальный закон наблюдения), минимизирующую выражение

$$q'D(T)\,q \tag{1.3}$$

такую, что

$$\int_0^T \gamma(t)\,dt \leqslant N \tag{1.4}$$

где известная постоянная $N \geqslant 0$.

Функционал (1.3) равен условной дисперсии величины $q'x(T)$, интересующей наблюдателя.

Качество управления наблюдением задается интегралом (1.4). Этот интеграл имеет простой механический смысл. Именно [5], интеграл (1.4) равен суммарному числу измерений на отрезке $[0, T]$. Поэтому требование (1.4) представляет собой ограничение на суммарное число измерений.

Поскольку плотность наблюдений $\gamma(t)$ в момент t не ограничивается, то априори допускаются наблюдения вида

$$\gamma(t) = \sum_{t_i \leqslant t} \mu_i \delta(t - t_i), \qquad 0 \leqslant t_i \leqslant T$$

где постоянные $\mu_i > 0$, $\delta(t)$ — дельта-функция.

Наблюдаемая величина равна [1]

$$y(t_i) = \sqrt{\mu_i}\,H(t_i)\,x(t_i) + \sigma(t_i)\,\zeta(t_i)$$

где $\zeta(t_i)$ — последовательность взаимно независимых одинаково распределенных гауссовских величин с нулевым математическим ожиданием и единичной матрицей ковариации.

2. Обозначим через $z(t, s)$ фундаментальную матрицу однородной системы (1.1) при $b(t) = 0$ и положим

$$Q = \int_0^T z'(s, T)\, V(s)\, z(s, T)\, ds$$

где

$$V(s) = H'(s)\,\sigma(s)\sigma'(s)^{-1} H(s)$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Предположим, что коэффициенты уравнений (1.1), (1.2) удовлетворяют требованиям п. 1 и матрица $Q > 0$. Тогда оптимальный закон наблюдения $\gamma(t)$, разрешающий задачу 1, имеет вид

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \delta(t - t_i), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_m \leqslant T \tag{2.1}$$

где постоянные $\mu_i \geqslant 0$ и $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_m = N$, а целое число $m \leqslant {}^1/_2\, n(n + 1)$.

Доказательство теоремы состоит из четырех этапов.

1.° Обозначим через $r(t)$ матрицу, удовлетворяющую уравнению

$$dr(t) = [-r(t)A(t) - A'(t)\, r(t)]\, dt + V(t)\, du(t)$$
$$r(0) = D_0^{-1} \quad (0 \leqslant t \leqslant T) \tag{2.2}$$

в котором скалярное управление $u(t)$ выбирается из множества U неубывающих функций с ограниченной вариацией на отрезке $[0, T]$, равных нулю при $t = 0$.

Напомним, что уравнения вида (2.2) понимаются в смысле соответствующего интегрального тождества, а интеграл

$$\int_0^t V(s)\, du(s)$$

есть интеграл Лебега — Стильтьеса. В силу условия $r(0) > 0$, определения множества U и уравнения (2.1) матрица $r(t, u) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ для любой функции $u \in U$.

Иногда решение уравнения (2.2) будет обозначаться символом $r(t, u)$ с целью подчеркнуть его зависимость от управления $u(t)$. Положим

$$\|u\| = \int_0^T |du(t)|$$

Цель первого этапа доказательства состоит в том, чтобы установить существование управления $u(t) \in U$, разрешающего вспомогательную задачу 2: найти функцию $u(t) \in U$, доставляющую минимум функционалу $q'r(T, u)^{-1} q$, такую, что $\|u\| \leqslant N$.

Пусть U_1 — множество функций из U, удовлетворяющих требованию $\|u\| \leqslant N$. Введем последовательность $u_i(t)$, $i=1, 2, \ldots$ функций из U_1 при помощи соотношений

$$\lim_{i\to\infty} q'r(T, u_i)^{-1} q = \inf_{U_1} q'r(T, u)^{-1} q = I$$

Из определения множества U_1 следует, что все функции $u_i(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, а также и их нормы равномерно ограничены числом N. Отсюда и из второй теоремы Хелли вытекает, что некоторая подпоследовательность последовательности $u_i(t)$ сходится в каждой точке отрезка $[0, T]$ к $u_0(t)$.

Для краткости примем, что и сама последовательность $u_i(t)$ сходится к $u_0(t)$. Отсюда и из первой теоремы Хелли заключаем, что $u_i(t)$ сходится к $u_0(t)$ также и слабо.

Для любых точек t_1, t_2, $t_2 \geqslant t_1$ сегмента $[0, T]$ имеем

$$u_0(t_2) - u_0(t_1) \geqslant u_0(t_2) - u_i(t_2) + u_i(t_1) - u_0(t_1)$$

Из этой оценки и поточечной сходимости $u_i(t)$ следует, что функция $u_0(t)$ не убывает. Значит, $\|u_0\| \leqslant N$.

Таким образом, для доказательства оптимальности $u_0(t)$ по отношению к задаче 2 осталось лишь проверить, что I равняется $q'r(T, u_0)^{-1}q$.

Из уравнения (2.2) и свойств $u_i(t)$ следует равномерная при $0 \leqslant t \leqslant T$ и всех $i = 1, 2, \ldots$ ограниченность всех элементов матриц $r(t, u_i)$. Поэтому найдется такая постоянная $c > 0$, что для любых точек $t_2 \geqslant t_1$ сегмента $[0, T]$ и любых $l, j = 1, 2, \ldots, n$

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} (r(t, u_i) A(t))_{l,j} dt\right| \leqslant c(t_2 - t_1) \tag{2.3}$$

Здесь через Q_{lj} обозначен lj элемент матрицы Q. Из оценок (2.3) видно (см. [6], стр. 82), что интегралы

$$\int_0^t r(s, u_i) A(s) ds$$

как функции t имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$ и притом равномерную ввиду равномерной ограниченности элементов матриц $r(t, u_i)$ и условий теоремы.

Аналогичным образом устанавливается, что выражения

$$\int_0^t V(s) du_i(s), \qquad \int_0^t A'(s) r(s, u_i) ds$$

имеют равномерно по i ограниченную вариацию на $[0, T]$. Отсюда и из уравнения (2.1) следует, что элементы матриц $r(t, u_i)$ также имеют на $[0, T]$ ограниченную вариацию равномерно по $i = 1, 2, \ldots$

Значит, используя рассуждения, которые были выше применены к последовательности $u_i(t)$, можно показать (переходя в случае необходимости к подпоследовательности), что $r(t, u_i)$ сходится поточечно к $r_0(t)$. Отсюда, из слабой сходимости $u_i(t)$ к $u_0(t)$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty}\left(\int_0^t [-r(s, u_i) A(s) - A'(s) r(s, u_i)] ds + \int_0^t V(s) du_i(s)\right) =$$
$$= \int_0^t (-r_0(s) A(s) - A'(s) r_0(s)) ds + \int_0^t V(s) du_0(s)$$

Из последнего равенства, сходимости $r(t, u_i)$ к $r_0(t)$ и уравнения (2.2) следует, что $r_0(t) = r(t, u_0)$.

Тем самым установлено равенство

$$I = q'r(T, u_0)^{-1}q \tag{2.4}$$

2°. Докажем теперь, что

$$\|u_0\| = N \tag{2.5}$$

Предположим противное, что $\|u_0\| < N$, и покажем, что в этом случае найдется такая функция $u_1 \in U_1$, для которой

$$q'r(T, u_1)^{-1} q < q'r(T, u_0)^{-1}q \tag{2.6}$$

Ясно, что оценка (2.6) невозможна, так как противоречит установленному в 1° равенству (2.4) и определению числа I. Положим, ε — постоянная

$$u_1(t) = u_0(t) + \varepsilon t, \qquad \varepsilon = T^{-1}(N - \|u_0\|) > 0$$

Легко проверить, что $u_1 \in U_1$.

Далее, используя равенство

$$q'r(T, u_1)^{-1}q = \max_{y\in R_n} [2y'q - y'r(T, u_1)] \tag{2.7}$$

получаем ввиду (2.2) и определения матрицы Q, что

$$q'r(T, u_1)^{-1} q = \max_{y \in R_n} [2y'q - y'r(T, u_0) - y'\varepsilon Qy] <$$
$$< \max_{y \in R_n} [2y'q - y'r(T, u_0)y] = q'r(T, u_0)^{-1} q$$

Равенство (2.5) установлено.

3°. Зафиксируем матрицу $r(T, u_0)$ и рассмотрим вспомогательную задачу 3: найти функцию $\omega(t)$, $\omega(0) = 0$ с минимальной нормой такую, что

$$r(0, \omega) = r(0), \quad r(T, \omega) = r(T, u_0)$$

Подчеркнем, что в задаче 3 оптимальное $\omega(t)$ ищется уже среди всех функций с ограниченной вариацией на $[0, T]$, а не только монотонных, как это имело место в задачах 1, 2.

Цель третьего этапа доказательства состоит в обосновании того, что $u_0(t)$ разрешает задачу 3.

Ясно прежде всего, что функция $u_0(t)$ является допустимой для задачи 3, так как $\|u_0\| = N < \infty$, $r(0, u_0) = r(0)$, и в момент T соответствующее u_0 решение (2.2) равно $r(T, u_0)$.

Из существования допустимой функции аналогично 1° доказательства устанавливается существование оптимальной $\omega_0(t)$ для задачи 3. При этом так как $\|u_0\| = N$, то $\|\omega_0\| \leqslant N$.

Справедливость третьего этапа доказательства будет установлена, если показать, что, во-первых, решение задачи 3 доставляет неубывающая функция и, во-вторых, что $u_0(t)$ оптимальна для задачи 3 в классе U_1.

Предположим, что $\omega_0(t)$ не является возрастающей функцией. Положим тогда

$$\omega_0(t) = \omega_{01}(t) - \omega_{02}(t), \quad \omega_{01}(0) = \omega_{02}(0) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T)$$

$$2\omega_{01}(t) = \int_0^t |d\omega_0(t)| + \omega_0(t) \quad 2\omega_{02}(t) = \int_0^t |d\omega_0(t)| - \omega_0(t)$$

причем в силу нашего предположения функция $\omega_{02}(t)$ имеет точки роста на $[0, T]$, т. е. $\|\omega_{02}\| > 0$; следовательно, $\|\omega_{01}\| < N$. На основании (2.7) имеем

$$q'r(T, u_0)^{-1} q = \max_{y \in R_n} [2y'q - y'r(T, u_0)y]$$

Отсюда и из (2.2) и неубывания $\omega_{02}(t)$ заключаем, что

$$I = q'r(T, u_0)^{-1} q =$$
$$= \max_{y \in R_n} \left[2y'q - y'z'(0, T) r(0) z(0, T) y - y' \int_0^T z'(s, T) V(s) z(s, T) d\omega_0(s) y\right] \geqslant$$
$$\geqslant \max_{y \in R_n} \left[- y' \int_0^T z'(s, T) V(s) z(s, T) d\omega_{01}(s) y + 2y'q - y'z'(0, T) r(0) z(0, T) y\right] =$$
$$= q'r(T, \omega_{01})^{-1} q$$

Значит, неубывающая функция $\omega_{01} \in U_1$ и разрешает задачу 2. Однако $\|\omega_{01}\| < N$. Поэтому, дословно повторяя рассуждения 2° доказательства теоремы (с заменой u_0 на ω_{01}), убеждаемся в существовании функции $u_1 \in U_1$, $\|u_1\| = N$, для которой

$$q'r(T, u_1)^{-1} q < q'r(T, \omega_{01})^{-1} q \leqslant q'r(T, u_0)^{-1} q$$

Последнее, очевидно, невозможно, ибо противоречит оптимальности $u_0(t)$ в задаче 2. Подобным же образом устанавливается оптимальность $u_0(t)$ в классе U_1.

4°. На основании пунктов 1°, 2° доказательства решение задачи 2 доставляет неубывающая функция с нормой, равной N.

С другой стороны, в силу 3° решение задачи 2 эквивалентно решению задачи 3, которая обычным образом сводится к проблеме моментов ввиду линейности уравнения (2.2) (см. [3,7]). Поэтому с учетом [7] и 1° — 3° оптимальная функция, разрешающая задачу 2, есть неубывающая кусочно-постоянная функция с нормой, равной N, и числом скачков, не превосходящим $^1/_2\, n\,(n+1)$.

Выясним, наконец, связь задачи 1 с задачей 2. В силу [1] матрица $D^{-1}(t)$ — решение системы уравнений

$$\dot{D}^{-1}(t) = -D^{-1}(t)\,A(t) - A'(t)\,D^{-1}(t) + V(t)\,\gamma(t) \tag{2.8}$$

Любой неотрицательной функции $\gamma(t)$, удовлетворяющей требованию (1.4), можно поставить в соответствие функцию $u(t)$ с ограниченным изменением на $[0,\ T]$

$$u(t) = \int_0^t \gamma(s)\,ds, \qquad u(0) = 0 \tag{2.9}$$

причем ввиду (1.4) $\|\ u\ \| \leqslant N$.

Расширим множество функций $\gamma(t)$ до $U_2 \subset U_1$ по формуле (2.9). Тогда задача 1 переходит в задачу 2. Обратное соответствие имеет место не для любой функции $u(t)$ с ограниченной вариацией, а лишь для таких, которые не содержат сингулярной компоненты [8]. В частности, такое соответствие имеет место для кусочно-постоянных функций $u(t)$. Отсюда и из установленного вида оптимальной функции в задаче 2 следует, что оптимальная функция $\gamma(t)$ в задаче 1 может быть выбрана в соответствии с (2.1). Теорема доказана.

3. Одно из условий доказанной в п. 2 теоремы заключается в требовании $Q > 0$. Сформулируем некоторые условия в терминах коэффициентов уравнений (1.1), (1.2), при выполнении которых матрица Q будет положительно определенной.

Лемма. Предположим, что матрицы A, H, σ постоянны и удовлетворяют требованиям п. 1. Тогда $Q > 0$ в том и только в том случае, когда ранг матрицы

$$R_1 = (H',\ A'H',\ \ldots,\ (A')^{n-1}H')$$

равен числу n — размерности системы (1.1).

Доказательство. Из результатов работы [2] следует, что необходимым и достаточным условием положительной определенности Q является полнота ранга матрицы

$$R_2 = (H'\,(\sigma')^{-1},\ A'H'\,(\sigma')^{-1},\ \ldots,\ (A')^{n-1}\,H'\,(\sigma')^{-1})$$

Ясно также, что из условия $\sigma\sigma' > 0$ вытекает невырожденность матрицы σ. Значит, достаточно показать, что при любой невырожденной σ ранги матриц R_1 и R_2 равны.

Обозначим через R_3 клеточно диагональную матрицу размером $n^2 \times n^2$ с элементами на главной диагонали $(\sigma')^{-1}$. Ранг матрицы R_3 равен n^2 ввиду невырожденности σ. Кроме того

$$R_2 = R_1 R_3 \tag{3.1}$$

Таким образом, равенство рангов матриц R_1 и R_2 вытекает из формулы (3.1) и неравенства Сильвестра ([9], стр. 57). Лемма доказана.

Используя [3], аналогично доказательству леммы можно получить некоторые условия положительной определенности матрицы Q и для случая переменных коэффициентов A, H, σ.

Пусть, например, функции A, H, σ удовлетворяют требованиям п. 1 и существует такая точка $s \in [0,\ T]$, в некоторой окрестности которой непрерывны производные матриц A, H до порядка $n-1$, а в точке s равен числу n ранг матрицы

$$(K_1(s),\ \ldots,\ K_n(s))$$

где

$$K_1(s) = H'(s), \qquad K_{i+1}(s) = \frac{dK_i(s)}{ds} + A'(s)\,K_i(s)$$

Тогда матрица $Q > 0$.

Доказанная в п. 2 теорема сводит вопрос об оптимальном законе наблюдения к задаче минимизации скалярной функции конечного числа переменных. Для этого следует решить уравнение (2.8) при $\gamma(t)$, равном (2.1). В результате функционал (1.3) оказывается скалярной функцией переменных μ_i и t_i. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

Пример 1. Пусть уравнения (1.1), (1.2) — скалярные с постоянными коэффициентами, причем $H(t) = \sigma(t) = 1$. Тогда оптимальный закон наблюдения в соответствии с теоремой 1 имеет вид $\gamma(t) = N\delta(t - t_1)$. Подставляя это $\gamma(t)$ в (2.8), получаем, что $t_1 = T$ при $a > 0$; $t_1 = 0$, если $a < 0$ и при $a = 0$ значение функционала (1.3) не зависит от конкретного момента проведения наблюдений.

Пример 2. Пусть уравнения (1.1), описывающие свободное движение материальной точки на прямой, имеют вид

$$x_1^{\cdot}(t) = x_2(t), \quad x_2^{\cdot}(t) = 0 \tag{3.2}$$

Матрица $D(0)$ — диагональная с элементами на диагонали d_1, d_2, равными априорной дисперсии соответственно координаты и скорости. Предположим, что наблюдается координата, т. е.

$$dy(t) = h(t)x_1(t)\,dt + d\xi(t) \tag{3.3}$$

и требуется минимизировать дисперсию скорости $x_2(T)$ в конце процесса наблюдения.

В соответствии с теоремой оптимальный закон наблюдения $\gamma(t)$, разрешающий задачу 1 (в которой $q' = (0, 1)$) для системы (3.2), (3.3), имеет вид $\gamma(t) = \mu_3\delta(t - t_3) + \mu_1\delta(t - t_1) + \mu_2\delta(t - t_2)$, где t_i — некоторые точки из отрезка $[0, T]$, а неотрицательные постоянные μ_i подчинены требованию $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Отсюда и из уравнения (2.8) получаем, что

$$D(T) = z(T, 0)\left[(D(0))^{-1} + \int_0^T z'(\tau, 0)\,V_1 z(\tau, 0)\,\gamma(\tau)\,d\tau\right]^{-1} z'(T, 0) \tag{3.4}$$

где элементы v_{ij} матрицы V_1 равны нулю за исключением $v_{11} = 1$. Элементы $z_{ij}(t, 0)$ матрицы $z(t, 0)$ равны

$$z_{11}(t, 0) = z_{22}(t, 0) = 1, \; z_{12}(t, 0) = t, \; z_{21}(t, 0) = 0$$

Производя простые вычисления, получаем из (3.4), что задача 1 сводится к определению чисел μ_i, t_i, доставляющих максимум функции

$$\Delta = (d_1^{-1} + 1)(d_2^{-1} + \mu_1 t_1^2 + \mu_2 t_2^2 + \mu_3 t_3^2) - (\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3)^2$$
$$\mu_i \geqslant 0, \; \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1, \; 0 \leqslant t_i \leqslant T, \; i = 1, 2, 3 \tag{3.5}$$

Здесь Δ — определитель матрицы, стоящей в (3.4) в квадратных скобках.

Однако при любых фиксированных μ_i, удовлетворяющих ограничениям (3.5), функция переменных t_i ($t_i \neq 0$)

$$(d_1^{-1} + 1)(\mu_1 t_1^2 + \mu_2 t_2^2 + \mu_3 t_3^2) - (\mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \mu_3 t_3)^2 \tag{3.6}$$

положительна на основании критерия Сильвестра положительной определенности (см. [9], стр. 151). Иными словами, при любых фиксированных μ_i квадратичная форма (3.6) переменных t_i будет положительно определенной, т. е. ее максимум по t_i, $0 \leqslant t_i \leqslant T$ достигается в одной из вершин трехмерного куба $0 \leqslant t_i \leqslant T$, $i = 1$, 2, 3. Отсюда и из того факта, что функция

$$(d_1^{-1} + 1)d_2^{-1} + d_1^{-1}\mu T^2, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1$$

достигает максимума при $\mu = 1$, следует, что в исходной задаче 1 величины $t_1 = t_2 = t_3 = T$, т. е. все наблюдения производятся в конце процесса наблюдения.

Поступила 15 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
2. Колмановский В. Б. Оптимальное управление некоторыми процессами наблюдения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. Кац И. Я., Куржанский А. Б. О двойственности статистических задач оптимального управления и наблюдения. Автоматика и телемеханика, 1971, № 3.
5. Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л. Оптимизация помех при наблюдении за динамической системой. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1972, № 2.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М., «Наука», 1966.
7. Neustadt L. W. Optimisation, a moment problem and nonlinear programming. J. Soc. Industr. Appl. Math. A., 1964, vol. 2, No 1.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.
9. Мишина А. П., Проскуряков И. В. Высшая алгебра. М., «Наука», 1965.

УДК 533.6

О ВОЗМОЖНОСТИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ ФАЗОВОГО РАВНОВЕСИЯ

В. И. Цурков (Москва)

Указывается на возможность выбросов плотности при одномерных неустановившихся течениях жидкости вблизи критической точки фазового равновесия, как следствие особенности уравнения состояния.

Исследования относятся к вопросу о возможности обращения в бесконечность классических решений задачи с начальными условиями для уравнений одномерной нестационарной газодинамики в неизоэнтропическом случае. Здесь приходится рассматривать систему трех квазилинейных гиперболических уравнений, для которых, как известно [1,2], нормальным случаем является неограниченность решения. С другой стороны, система уравнений газодинамики имеет ряд специфических свойств. Прежде всего, наличие одного инварианта, т. е. функции, которая остается ограниченной [1]. Другое важное свойство заключается в том, что обобщенные инварианты Римана удовлетворяют многомерным интегральным уравнениям вольтерровского типа, где в качестве конуса интегрирования выступает область определенности гиперболических уравнений, и ограниченность решения следует из тонких свойств интегрируемости ядра. В терминах уравнений газодинамики последние приводят к ограничениям на уравнение состояния и сами вытекают из ограниченности вариации энтропии вдоль звуковых характеристик и слаболинейности (контактности) энтропийных характеристик [3].

Условия на уравнения состояния, обеспечивающие ограниченность, выражаются следующими неравенствами [3]:

$$0 < c^\circ \leqslant c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V, \qquad \left|\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho \partial S}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S^{-1}\right| \leqslant K^\circ \tag{1}$$

Здесь ρ — плотность, S — энтропия единицы массы, V — удельный объем, $p = p(\rho, S)$ — давление, T — температура, c_V — теплоемкость единицы массы.

Рассматривается случай, когда не выполнено второе ограничение [3]. Это имеет место в критической точке фазового равновесия, согласно феноменологической теории [4], базирующейся на логарифмической особенности теплоемкости. Указывается на возможность газодинамических эффектов, которые заключаются в локализованных вы-