ЛИТЕРАТУРА

1. Mangeron D., Deleanu S. Sur une classe d'equations de la mécanique analytique au sens de I. Tzénoff. Докл. болгарск. Акад. наук, 1962, t. 15, No. 1.
2. Dolaptschiev Bl. Über die verallgemeinerte Form der Lagrangeschen Gleichungen, welche auch die Behandlung von nicht-holonomen mechanischen Systemen gestattet. Z. angew. Math. und Phys., 1966, Bd 17, No 3, S. 443—449.
3. Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1970.
4. Nielsen J. Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin, 1935, Springer — Verlag, S. 345—354.
5. Ценов И. Об одной новой форме уравнений аналитической динамики. Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 1.
6. Маслов Ю. Н. О наиболее общих уравнениях аналитической динамики. Тр. Ташкентск. ун-та, 1962, вып. 208.
7. Appell P. Sur les liaisons exprimees par les relations non lineaires entre les vitesses. C. R. Acad. Sci. Paris, 1911, t. 152, p. 1197—1199.
8. Dolaptchiev Bl. Nouvel exemple d'application des équations de Nielsen a des systémes mécaniques non holobomes. C. R. Acad. Sci. Paris, 1968, t. 267, No 12, p. 423—424.

УДК 531.36+62—50

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

В. П. Скрипник

(Москва)

Изучаются линейная и возмущенная системы, причем в возмущенной системе аргумент преобразован. В предположении, что тривиальное решение линейной системы устойчиво, выясняются условия, при которых будет устойчивым также тривиальное решение возмущенной системы.

Пусть $f(t, \xi_k) = f(t, \xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_p)$ $(k = 1,2, \ldots, p)$, где $f, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — m-мерные векторы. Рассмотрим следующие две системы m-го порядка: линейную

$$y' = A(t)\,y \tag{1}$$

и возмущенную (см. [1])

$$x'(t) = A(t)\,x(t) + f(t, x(\varphi_k(t, x(t)))) \tag{2}$$

где A — квадратная матрица, а φ_k — преобразования аргумента. Будем изучать устойчивость тривиального решения системы (2), которая в каждом из рассматриваемых случаев понимается по-разному. Предположим, что тривиальное решение системы (1) устойчиво. Выясним, при каких условиях будет устойчивым тривиальное решение системы (2).

Интегралы всюду понимаются в смысле Лебега. Измеримость, если не оговорено, также понимается в смысле Лебега. Символом $\| \;\|$ обозначается норма вектора или матрицы, которая равна сумме модулей элементов. Через $Y(t)$ обозначена матрица — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $Y(t_0) = E$, где E — единичная матрица.

Предположим, что для системы (2) выполняются следующие условия, которые назовем условиями ω_1. Матрица $A(t)$ определена, непрерывна и ограничена при $t \in [t, \infty)$, причем $\|A(t)\| \leqslant M$; компоненты векторной функции $f(t, \xi_k)$ определены и непрерывны при $t \in [t_0, \infty)$ и $\| \xi_k \| \leqslant R$, где $R > 0$; имеет место неравенство

$$\| f(t, \xi_k) \| \leqslant \sum_{k=1}^{p} g_k(t) \| \xi_k \| \tag{3}$$

где $g_k(t)$ — непрерывные функции, причем

$$\sum_{k=1}^{p} g_k(t) \leqslant N < \infty$$

функции $\varphi_k(t, \xi)$ определены при $t \in [t_0, \infty)$ и $\| \xi \| \leqslant R$, удовлетворяют неравенствам $\varphi_k(t, \xi) \leqslant t$ и имеют непрерывные частные производные по всем переменным; существуют такие числа α, $c > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_k(t, \xi) \geqslant \alpha, \qquad \left| \frac{\partial}{\partial \xi_i} \varphi_k(t, \xi) \right| \leqslant c$$

Для данного случая в качестве множества начальных векторных функций возьмем множество Z, которое состоит из непрерывных, определенных при $t \leqslant t_0$ m-мерных векторных функций.

Тривиальное решение системы (2) будем называть устойчивым по отношению к Z, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что решение системы (2), соответствующее любой начальной векторной функции $z \in Z$, такой, что $\| z \| < \delta$, при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству $\| x \| < \varepsilon$. Если сверх того $\lim x(t) = 0$ при $t \to \infty$, то тривиальное решение системы (2) называется асимптотически устойчивым по отношению к Z.

Теорема 1. Предположим, что

1) для системы (2) выполняются условия ω_1;

2) матрица $A(t)$ периодическая или такая, что

$$\int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} A(\tau)\, d\tau \geqslant \mu > -\infty$$

3) сходятся интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} g_k(\tau)\, d\tau$$

Тогда из устойчивости тривиального решения системы (1) следует устойчивость по отношению к Z тривиального решения системы (2).

Доказательство. Предположим, что тривиальное решение системы (1) устойчиво. Возьмем число r такое, чтобы выполнялись неравенства $\alpha - c(M + N)r > 0$, $0 < r < R$. Можно указать такое число a (см. [2]), что при $t \in [t, \infty)$, $\tau \in [t_0, t]$ будет $\| Y(t) Y^{-1}(\tau) \| \leqslant a$. Обозначим

$$b = \sum_{k=1}^{p} \int_{t_0}^{\infty} g_k(\tau)\, d\tau$$

В силу устойчивости тривиального решения системы (1) можно указать такие числа $\delta > 0$ и $\delta_1 > 0$, удовлетворяющие неравенству $(\delta + ab\,\delta_1) \exp(ab) < r$, что если решение y системы (1) в начальный момент удовлетворяет неравенству $\| y(t_0) \| < \delta_1$, то при $t \in [t_0, \infty)$ будет $\| y(t) \| < \delta$. Рассмотрим подмножество Z_1 множества Z, состоящее из векторных функций, удовлетворяющих неравенству $\| z \| < \delta_1$. Из работы [3] (теорема 2.15) следует существование решения системы (2) при любой начальной векторной функции $z \in Z_1$. Покажем, что каждое такое решение бесконечно продолжаемо.

Предположим противное. Тогда существует такое решение $x(t)$ и такое число $T > t_0$, что $\| x(T) \| = r$, а при $t \in [t_0, T)$ будет $\| x(t) \| < r$. При $t \in [t, T]$ имеем

$$\frac{d}{dt}\varphi_k(t, x(t)) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_k(t, x(t)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_k(t, x(t))\,x_i'(t) \geqslant \alpha - c\,\|x'(t)\| \geqslant \alpha - c\,(M+N)\,r$$

Поэтому при $t \in [t_0, T]$ функции $\varphi_k(t, x(t))$ имеют обратные функции, которые обозначим соответственно $\Phi_k(t)$. Функции $\Phi_k(t)$ определены и непрерывно дифференцируемы на отрезках $[\varphi_k(t_0, x(t_0)), \varphi_k(T, x(T))]$ соответственно. Доопределим эти функции таким образом, чтобы они были непрерывно дифференцируемы на отрезках $[\varphi_k(t_0, x(t_0)), \ T]$, причем их производные были положительны.

Для данного решения x при $t \in [t_0, T]$ справедливо равенство

$$x(t) = y(t) + \int_{t_0}^{t} Y(t)\,Y^{-1}(\tau)\,f(\tau, x(\varphi_k(\tau, x(\tau))))\,d\tau \tag{4}$$

где y — решение системы (1) с начальным условием $y(t_0) = x(t_0)$. Из него при $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\| x(t) \| \leqslant \delta + ab\delta_1 + a\sum_{k=1}^{p}\int_{t_0}^{t} g_k(\Phi_k(\tau))\,\Phi_k'(\tau)\,\| x(\tau) \|\,d\tau$$

и, следовательно

$$\| x(t) \| \leqslant (\delta + ab\delta_1)\exp\left(a\sum_{k=1}^{p}\int_{\Phi_k(t_0)}^{\Phi_k(t)} g_k(\tau)\,d\tau\right) \leqslant (\delta + ab\delta_1)\exp(ab)$$

Поэтому $\| x(T) \| < r$. Это означает, что решение $x(t)$ продолжаемо на весь несобственный полуинтервал $[t_0, \infty)$ и что при $t \in [t_0, \infty)$ справедливо неравенство $\| x(t) \| \leqslant (\delta + ab\,\delta_1)\exp(ab)$. Поэтому тривиальное решение системы (2) устойчиво. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Предположим, что

1) для системы (2) выполняются условия ω_1;
2) матрица $A(t)$ периодическая;
3) сходятся интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} g_k(\tau)\,d\tau$$

4) функции $t - \varphi_k(t, \xi)$ при $t \in [t_0, \infty)$, $\| \xi \| \leqslant R$ ограничены.

Тогда из асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) следует асимптотическая устойчивость по отношению к Z тривиального решения системы (2).

Справедливость теоремы 2 вытекает из неравенства

$$e^{\nu t}\,\| x(t) \| \leqslant a_1\exp\left(b_1\sum_{k=1}^{p}\int_{t_0}^{\infty} g_k(\tau)\,d\tau\right)$$

где a_1, b_1 и ν — некоторые положительные числа, которое следует из равенства (4), если начальные условия достаточно малы.

Если преобразования аргумента φ_k не зависят от решения, то в качестве множества Z можно взять множество, состоящее из векторных функций, компоненты которых измеримы по Борелю.

Предположим теперь, что для системы (2) выполняются следующие условия, которые назовем условиями ω_2. Матрица $A(t)$ определена и ограничена при $t \in [t_0, \infty)$, причем ее элементы измеримы на любом конечном отрезке $[t_0, T]$; векторная функция $f(t, \xi_k)$ определена при $t \in [t_0, \infty)$ и $\|\xi_k\| \leqslant R$, где $R > 0$, причем ее компоненты при фиксированных ξ_k измеримы по t на любом конечном отрезке $[t_0, T]$, а при фиксированных t непрерывны по ξ_k; имеет место неравенство (3), где $g_k(t)$ — измеримые функции на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ и ограниченные при $t \in [t_0, \infty)$; функции $\varphi_k(t, \xi)$, определены при $t \in [t_0, \infty)$ и $\|\xi\| \leqslant R$, удовлетворяют неравенствам $\varphi_k \leqslant t$, причем при фиксированных ξ измеримы по t на любом конечном отрезке $[t_0, T]$, а при фиксированных t непрерывны по ξ; имеют место неравенства $|\varphi_k(t, \xi) - t| \leqslant \leqslant h_k(t)\|\xi\|$, где $h_k(t)$ — измеримые и интегрируемые на любом конечном отрезке $[t_0, T]$ функции.

Через Z_λ, где λ — неотрицательное число, обозначим множество m-мерных векторных функций, определенных при $t \in (-\infty, t_0]$ и удовлетворяющих следующим условиям: если $z \in Z_\lambda$ и $t', t'' \in (-\infty, t_0]$, то $\|z(t'') - z(t')\| \leqslant \lambda |t'' - t'|$. Для данного случая в качестве множества начальных векторных функций возьмем множество Z_λ.

Тривиальное решение системы (2) будем называть устойчивым по отношению к Z_λ, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что решение системы (2), соответствующее любой начальной векторной функции $z \in Z_\lambda$, такой, что $\|z(t)\| \leqslant R$, $\|z(t_0)\| < < \delta$, при $t \geqslant t_0$ удовлетворяет неравенству $\|x\| < \varepsilon$. Если сверх того $\lim x(t) = 0$ при $t \to \infty$, то тривиальное решение системы (2) называется асимптотически устойчивым по отношению к Z_λ.

Теорема 3. Предположим, что

1) для системы (2) выполняются условия ω_2;

2) матрица $A(t)$ периодическая или такая, что

$$\int_{t_0}^{t} \operatorname{sp} A(\tau)\, d\tau \geqslant \mu > -\infty$$

3) сходятся интегралы

$$\int_{t_0}^{\infty} g_k(\tau)\, d\tau, \qquad \int_{t_0}^{\infty} g_k(\tau)\, h_k(\tau)\, d\tau$$

Тогда из устойчивости тривиального решения системы (1) следует устойчивость по отношению к Z_λ тривиального решения системы (2) при любом $\lambda \geqslant 0$.

При доказательстве теоремы 3 используется равенство (4) и непосредственные оценки.

Аналогичным образом может быть сформулирована теорема об асимптотической устойчивости.

Поступила 10 IX 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
2. Беллман Р. Теория устойчивости дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954.
3. Oğuztoreli M. N., Time-Lag Control Systems, New-York — London, Acad. Press, 1966.