УДК 531.314.2

ОБ ОБОБЩЕННОМ ВИДЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Г. Дюкич

(Югославия)

Получена новая форма уравнений движения как голономных, так и неголономных систем. В частном случае эти уравнения сводятся к уравнениям Манжерона — Делеану [1–3].

1. Уравнения движения реономно-голономной механической системы с n степенями свободы, обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_n$, кинетической энергией $T = T(t, q_j, \dot{q}_j)$ и обобщенными силами $Q_j = Q_j(t, q_r, \dot{q}_r)$ могут быть написаны в виде [1]

$$\frac{1}{p}\frac{\partial T^{(p)}}{\partial q_j^{(p)}} - \frac{p+1}{p}\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \tag{1.1}$$

$$\left(T^{(p)} = \frac{d^p T}{dt^p}, \quad q_j^{(p)} = \frac{d^p q_j}{dt^p}, \quad p = 1, 2 \ldots\right)$$

Здесь и ниже $r, j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$, $\varkappa, \mu, \nu = 1, \ldots, g$; в дальнейшем подразумевается суммирование по повторяющемуся нижнему индексу.

Пользуясь тождеством [1], которому удовлетворяет кинетическая энергия

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} \equiv \frac{1}{p-s}\left[p\frac{\partial T^{(s)}}{\partial q_j^{(s)}} - s\frac{\partial T^{(p)}}{\partial q_j^{(p)}}\right]$$

$$(p \neq s;\ p = 1, 2, \ldots;\ s = 0, 1, 2, \ldots)$$

уравнения движения (1.1) можно записать в виде

$$Z_j(T) = Q_j, \qquad Z_j(T) \equiv \frac{1}{p-s}\left[(1+s)\frac{\partial T^{(p)}}{\partial q_j^{(p)}} - (1+p)\frac{\partial T^{(s)}}{\partial q_j^{(s)}}\right] \tag{1.2}$$

Из этого обобщенного вида уравнений Лагранжа второго рода получаются: при $s = 0$ — уравнения Манжерона — Делеану (1.1), при $s = 0$ и $p = 1$ — уравнения Нильсена [4], а при $s = 0$ и $p=2$ — уравнения Ценова [5].

Пусть обобщенные силы имеют вид

$$Q_j = -\partial V/dq_j - \partial\Phi/d\dot{q}_j \tag{1.3}$$

где $V(t, q_j)$ — потенциальная энергия, а $\Phi(t, q_j, \dot{q}_j)$ — диссипативная функция. Можно показать, что

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} \equiv \frac{\partial V^{(s)}}{\partial q_j^{(s)}}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j} \equiv \frac{\partial \Phi^{(p-1)}}{\partial q_j^{(p)}} \qquad \begin{pmatrix} p = 1, 2 \ldots \\ s = 0, 1, 2 \ldots \end{pmatrix}$$

При помощи этих тождеств и (1.3) уравнения движения (1.2) приводятся к виду

$$Z_j(T) - Q_j \equiv \frac{1}{p-s}\left[(1+s)\frac{\partial L^{(p)}}{\partial q_j^{(p)}} - (1+p)\frac{\partial L^{(s)}}{\partial q_j^{(s)}}\right] = 0 \tag{1.4}$$

$$(p \neq s;\ p = 1, 2 \ldots;\ s = 1, 2, \ldots)$$

где обобщенная функция Лагранжа

$$L = T - V - \int_0^t \Phi\, dt \tag{1.}$$

2. Предположим, что механическая система неголономна и что ее движение ограничено g неголономными связями вида

$$F_{\mu j}(t, q_r, \ldots, q_r^{(k)})\, q_j^{(k+1)} + F_\mu(t, q_r, \ldots, q_r^{(k)}) = 0 \tag{2.1}$$

где k — целое число ($k \geqslant 1$). Эти неголономные связи линейны относительно старшей производной обобщенных координат по времени. Такая механическая система имеет $m = n - g$ степеней свободы.

Допустим, что q_i — независимые обобщенные координаты, а $q_{m+\nu}$ — зависимые. Из системы (2.1) с g уравнениями можно получить соотношения

$$q_{m+\nu}^{(k+1)} = \alpha_{\nu i}(t, q_j, \ldots, q_j^{(k)})\, q_i^{(k+1)} + \alpha_\nu(t, q_j, \ldots, q_j^{(k)}) \tag{2.2}$$

Пользуясь результатами этой работы, а также работы [6], можно показать, что уравнения движения механической системы с g неголономными связями $k+1$-го порядка (2.2) имеют вид

$$Z_i(T) - Q_i = -\lambda_\nu \alpha_{\nu i}$$

$$Z_{m+\nu}(T) - Q_{m+\nu} = \lambda_\nu \tag{2.3}$$

где λ_ν — неопределенные множители Лагранжа, а $Z_j(T)$ определяется вторым соотношением (1.2).

Из (2.3) и (1.4) при $s = k+1$, $p = k+2$ получим

$$(k+2)\left(\frac{\partial L^{(k+2)}}{\partial q_i^{(k+2)}} + \alpha_{\nu i}\frac{\partial L^{(k+2)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}}\right) - (k+3)\left(\frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_i^{(k+1)}} + \alpha_{\nu i}\frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+1)}}\right) = 0 \tag{2.4}$$

Для $k+1$-й производной по времени обобщенной функции Лагранжа получим

$$L^{(k+1)} = L^{(k+1)}(t, q_j, \ldots, q_i^{(k+1)}, q_{m+\nu}^{(k+1)}, q_i^{(k+2)}, q_{m+\nu}^{(k+2)})$$

Исключая зависимые $k+1$-е производные обобщенных координат $q_{m+\nu}^{(k+1)}$ при помощи уравнений связей (2.2), имеем

$$L_*^{(k+1)}(t, \ldots, q_i^{(k+1)}, q_i^{(k+2)}, q_{m+\nu}^{(k+2)}) = L^{(k+1)}(t, \ldots, q_i^{(k+1)}, q_{m+\nu}^{(k+1)}, q_i^{(k+2)}, q_{m+\nu}^{(k+2)}) \tag{2.5}$$

Полным дифференцированием выражения (2.2) по времени получаем

$$q_{m+\nu}^{(k+2)} = \alpha_{\nu i}(t, q_j, \ldots, q_j^{(k)})\, q_i^{(k+2)} + \alpha_\nu^*(t, q_j, \ldots, q_j^{(k+1)}) \tag{2.6}$$

Из (2.2), (2.5) и (2.6) следует

$$\frac{\partial L_*^{(k+1)}}{\partial q_i^{(k+1)}} + \left[\frac{\partial L_*^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}} - \frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}}\right]\left[\frac{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}}{\partial q_i^{(k+1)}} + \alpha_{\varkappa i}\frac{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}}{\partial q_{m+\varkappa}^{(k+1)}}\right] =$$

$$= \frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_i^{(k+1)}} + \alpha_{\nu i}\frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+1)}} \tag{2.7}$$

Из способа получения функция $L_*^{(k+1)}$ из функции $L^{(k+1)}$ ясно, что

$$\frac{\partial L_*^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}} = \frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}}$$

Тогда с учетом (2.7) получим

$$\frac{\partial L_*^{(k+1)}}{\partial q_i^{(k+1)}} = \frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_i^{(k+1)}} + \alpha_{\nu i}\frac{\partial L^{(k+1)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+1)}} \tag{2.8}$$

Аналогичным способом выводится следующее соотношение:

$$\frac{\partial L_*^{(k+2)}}{\partial q_i^{(k+2)}} = \frac{\partial L^{(k+2)}}{\partial q_i^{(k+2)}} + \alpha_{\nu i} \frac{\partial L^{(k+2)}}{\partial q_{m+\nu}^{(k+2)}} \tag{2.9}$$

где функция $L_*^{(k+2)}$ получается исключением зависимых производных $q_{m+\nu}^{(k+2)}$ в функции $L^{(k+2)}$ посредством связей (2.6).

Из (2.8), (2.9) и (2.4) получается обобщенный вид уравнений Лагранжа второго рода для механических систем с неголономными связями $k+1$-го порядка ($k \geqslant 1$)

$$(k+2)\frac{\partial L_*^{(k+2)}}{\partial q_i^{(k+2)}} - (k+3)\frac{\partial L_*^{(k+1)}}{\partial q_i^{(k+1)}} = 0 \tag{2.10}$$

Эти m уравнений вместе с g уравнениями неголономных связей (2.2) образуют полную систему из n уравнений для определения n обобщенных координат q_j в зависимости от времени.

3. *Пример.* Материальная точка массы m движется в поле силы тяжести (g — ускорение силы тяжести) в присутствии аппелевой [7] нелинейной неголономной связи первого порядка

$$x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} - \frac{z^{\cdot 2}}{a^2} = 0 \qquad (a = \mathrm{const}) \tag{3.1}$$

где x, y, z — декартовы координаты материальной точки.

Дифференцированием нелинейной связи первого порядка (3.1) по времени получается квазилинейная неголономная связь второго порядка

$$x^{\cdot}x^{\cdot\cdot} + y^{\cdot}y^{\cdot\cdot} - \frac{z^{\cdot}}{a^2} z^{\cdot\cdot} = 0 \tag{3.2}$$

Здесь $k = 1$, $\nu = 1$, $n = 3$, число степеней свободы $m = 2$, функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(x^{\cdot 2} + y^{\cdot 2} + z^{\cdot 2}) - mgz \tag{3.3}$$

и уравнения движения (2.10)

$$3\frac{\partial L_*^{(3)}}{\partial q_i^{(3)}} - 4\frac{\partial L_*^{(2)}}{\partial q_i^{(2)}} = 0 \tag{3.4}$$

Пусть x и y — независимые координаты, а z — зависимая от них. Дифференцированием уравнения (3.2) по времени получим

$$z^{(3)} = \frac{a^2}{z^{\cdot}}\left(x^{\cdot}x^{(3)} + y^{\cdot}y^{(3)} + (x^{(2)})^2 + (y^{(2)})^2 - \frac{(z^{(2)})^2}{a^2}\right) \tag{3.5}$$

Дифференцированием функции Лагранжа (3.3) по времени и подстановкой вместо $z^{(2)}$ и $z^{(3)}$ их значений из (3.2) и (3.5) получим

$$L_*^{(2)} = m\left\{(x^{(2)})^2 + (y^{(2)})^2 + \frac{a^2}{z^{\cdot}}(x^{\cdot}x^{(2)} + y^{\cdot}y^{(2)})\left[\frac{a^2}{z^{\cdot}}(x^{\cdot}x^{(2)} + y^{\cdot}y^{(2)}) - g\right]\right\} + \ldots \tag{3.6}$$

$$L_*^{(3)} = m\{3(x^{(2)}x^{(3)} + y^{(2)}y^{(3)}) + a^2/z^{\cdot}(x^{\cdot}x^{(3)} + y^{\cdot}y^{(3)})(3z^{(2)} - g)\} + \ldots \tag{3.7}$$

Здесь опущены члены, не содержащие вторых производных обобщенных координат в выражении (3.6) и третьих производных в выражении (3.7).

Из (3.6), (3.7) и (3.4) получаются уравнения движения в независимых обобщенных координатах x и y

$$x^{(2)} + a^2\frac{x^{\cdot}}{z^{\cdot}}(z^{(2)} + g) = 0, \qquad y^{(2)} + a^2\frac{y^{\cdot}}{z^{\cdot}}(z^{(2)} + g) = 0$$

Они совпадают с уравнениями движения, полученными в работе [8] иным способом

Поступила 31 I 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangeron D., Deleanu S. Sur une classe d'equations de la mécanique analytique au sens de I. Tzénoff. Докл. болгарск. Акад. наук, 1962, t. 15, No. 1.
2. Dolaptschiev Bl. Über die verallgemeinerte Form der Lagrangeschen Gleichungen, welche auch die Behandlung von nicht-holonomen mechanischen Systemen gestattet. Z. angew. Math. und Phys., 1966, Bd 17, No 3, S. 443—449.
3. Добронравов В. В. Основы механики неголономных систем. М., «Высшая школа», 1970.
4. Nielsen J. Vorlesungen über elementare Mechanik. Berlin, 1935, Springer — Verlag, S. 345—354.
5. Ценов И. Об одной новой форме уравнений аналитической динамики. Докл. АН СССР, 1953, т. 89, № 1.
6. Маслов Ю. Н. О наиболее общих уравнениях аналитической динамики. Тр. Ташкентск. ун-та, 1962, вып. 208.
7. Appell P. Sur les liaisons exprimees par les relations non lineaires entre les vitesses. C. R. Acad. Sci. Paris, 1911, t. 152, p. 1197—1199.
8. Dolaptchiev Bl. Nouvel exemple d'application des équations de Nielsen a des systémes mécaniques non holobomes. C. R. Acad. Sci. Paris, 1968, t. 267, No 12, p. 423—424.

УДК 531.36+62—50

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

В. П. Скрипник

(Москва)

Изучаются линейная и возмущенная системы, причем в возмущенной системе аргумент преобразован. В предположении, что тривиальное решение линейной системы устойчиво, выясняются условия, при которых будет устойчивым также тривиальное решение возмущенной системы.

Пусть $f(t, \xi_k) = f(t, \xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_p)$ $(k = 1,2, \ldots, p)$, где $f, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$—$m$-мерные векторы. Рассмотрим следующие две системы m-го порядка: линейную

$$y' = A(t)\, y \tag{1}$$

и возмущенную (см. [1])

$$x'(t) = A(t)\, x(t) + f(t, x(\varphi_k(t, x(t)))) \tag{2}$$

где A — квадратная матрица, а φ_k — преобразования аргумента. Будем изучать устойчивость тривиального решения системы (2), которая в каждом из рассматриваемых случаев понимается по-разному. Предположим, что тривиальное решение системы (1) устойчиво. Выясним, при каких условиях будет устойчивым тривиальное решение системы (2).

Интегралы всюду понимаются в смысле Лебега. Измеримость, если не оговорено, также понимается в смысле Лебега. Символом $\| \|$ обозначается норма вектора или матрицы, которая равна сумме модулей элементов. Через $Y(t)$ обозначена матрица — решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $Y(t_0) = E$, где E — единичная матрица.

Предположим, что для системы (2) выполняются следующие условия, которые назовем условиями ω_1. Матрица $A(t)$ определена, непрерывна и ограничена при $t \in [t, \infty)$, причем $\| A(t) \| \leqslant M$; компоненты векторной функции $f(t, \xi_k)$ определены и