

**ЛУЧЕВОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
В УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ**

Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко

(Воронеж)

Исследуются поля скоростей и напряжений за фронтом ударной волны лучевым методом в трехмерной упруго-вязко-пластической среде с упрочнением. Получены рекуррентные уравнения для определения членов лучевого ряда. В случае распространения сферической ударной волны нагрузки получено аналитическое решение для скорости с точностью до малых второго порядка относительно расстояния по нормали от фронта волны.

Решение волновых задач лучевым методом в теории упругости изложено в работе [1], в одномерной вязко-упругой среде — в работе [2].

1. Моделью среды является упруго-вязко-пластическое тело с пределом текучести, зависящим от среднего давления, пластических деформаций и скоростей пластических деформаций. Зависимость предела текучести от среднего давления и скорости пластической деформации принимается линейной, а от пластической деформации — произвольной. Поверхность текучести принимается в виде

$$f_1 = (s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p})(s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p}) - 2(k_0 - \alpha \sigma + \beta(e^p) + \eta_2(e^p) | \varepsilon^p |)^2 = 0 \quad (1.1)$$

$$f_2 = -\sigma - \sigma_0 - \mu_1 | e^p | - \eta_2 | \varepsilon^p | = 0$$

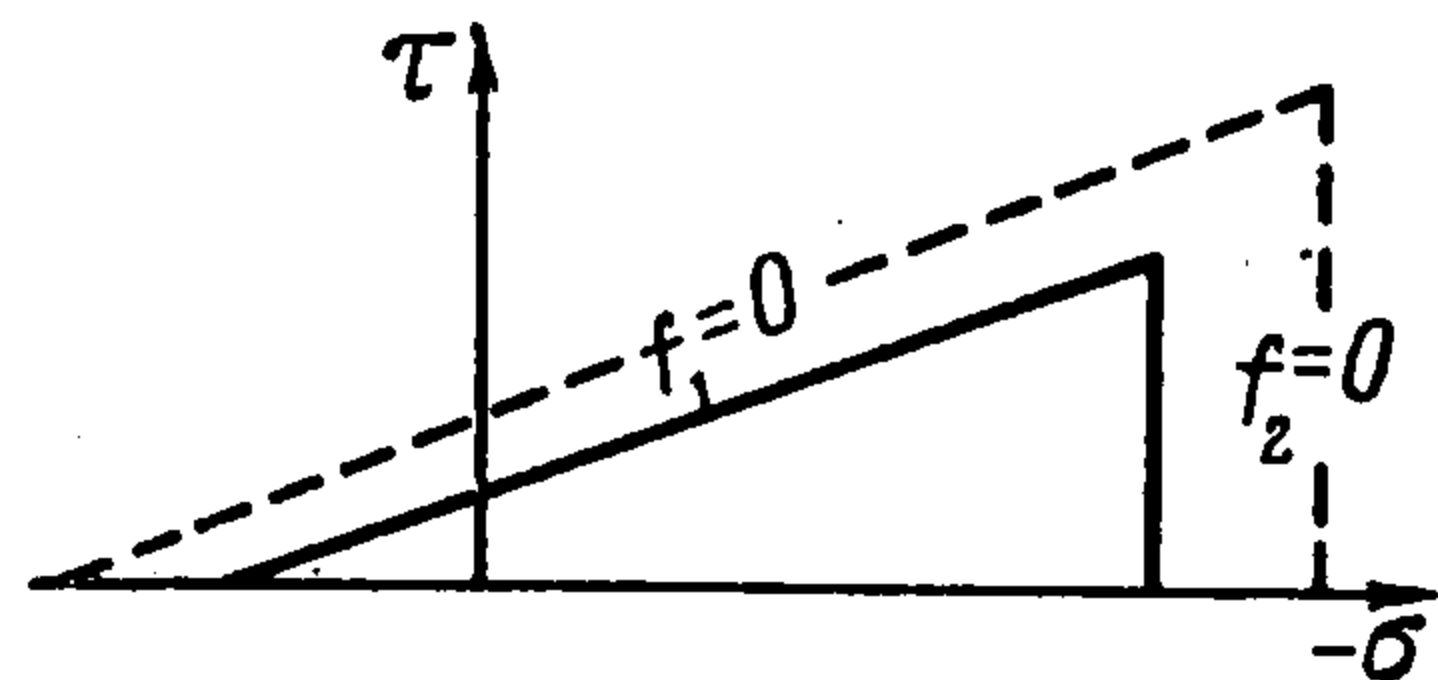
Здесь

$$\sigma = 1/3 \sigma_{kk}, \quad e^p = 1/3 e_{kk}^p, \quad \varepsilon^p = 1/3 \varepsilon_{kk}^p$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{*p} = \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon^p \delta_{ij}$$

где ε_{ij}^p — компоненты тензора скоростей пластических деформаций, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, e_{ij} — компоненты тензора деформаций. Всюду принято суммирование по повторяющимся нижним индексам, причем латинские индексы i, j, \dots принимают значения 1—3, а греческие α, β, \dots — значения 1, 2.

Поверхность текучести в пространстве напряжений представляет собой замкнутый конус (фиг. 1), расширяющийся в зависимости от e_{ij}^p и ε_{ij}^p . Боковая поверхность и дно конуса описываются соответственно первым и вторым уравнениями (1.1). На фиг. 1 сплошной линией отмечено положение поверхности текучести при $\varepsilon_{ij}^p = 0$. Пунктирной линией показано мгновенное состояние поверхности текучести при $\varepsilon_{ij}^p \neq 0$. Соотношения (1.1) представляют собой обобщение модели, предложенной в работе [3] для



Фиг. 1

грунтов, в случае учета влияния вязкости и пластических деформаций на изменение поверхности нагружения.

В дальнейшем принимается, что деформации малы и складываются из двух частей — упругой и пластической: $e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p$. Тензор упругих деформаций связан с напряжениями законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}^e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e$$

где λ, μ — упругие параметры среды.

Пространственные координаты предполагаются декартовыми. Деформации выражаются через перемещения по формуле Коши

$$e_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i})$$

Тензор скоростей пластических деформаций связан с тензором напряжений условием пластичности и ассоциированным законом пластического течения, который в случае напряженного состояния, соответствующего боковой поверхности $f_1 = 0, f_2 < 0$ условия текучести, имеет вид

$$e_{ij}^p = \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{2\psi_1 s_{ij}}{1 + 2\eta_1 \psi_1} + \frac{4/3 \alpha \psi_1}{1 - 4/3 \alpha \eta_2 \psi_1} (k_0 - \alpha \sigma + \beta (e^p)) \quad (1.2)$$

Исключая параметр ψ_1 из условия пластичности, выражаемого первым уравнением (1.1), и ассоциированного закона пластического течения (1.2), найдем зависимость скорости пластических деформаций от напряжения

$$e_{ij}^p = \frac{s_{ij}}{\eta} - \frac{\sqrt{2} (k_0 - \alpha \sigma + \beta) s_{ij}}{\eta \sqrt{s_{kl} s_{kl}}} + \frac{\sqrt{2} \alpha \sqrt{s_{kl} s_{kl}}}{3\eta} \delta_{ij} - \frac{2\alpha (k_0 - \alpha \sigma + \beta)}{3\eta} \delta_{ij},$$

$$\eta = \eta_1 + \frac{2}{3} \alpha \eta_2 \quad (1.3)$$

Если напряженное состояние в теле соответствует дну $f_2 = 0, f_1 < 0$ поверхности текучести, то ассоциированный закон пластического течения имеет вид

$$e_{ij}^p = \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \psi_2 \delta_{ij} \quad (1.4)$$

Исключая параметр из второго уравнения (1.1) и (1.4), найдем

$$e_{ij}^p = \frac{\sigma + \sigma_0 + \mu_1 |e^p|}{\eta_3} \delta_{ij} \quad (1.5)$$

Для угловых точек поверхности текучести тензор скоростей пластических деформаций e_{ij}^p связан с тензором напряжений условием пластичности (1.1) и соотношениями ассоциированного закона пластического течения

$$e_{ij}^p = \psi_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + \psi_2 \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}} \quad (1.6)$$

Исключая параметры ψ_1 и ψ_2 из (1.6) и (1.1), получим

$$e_{ij}^p = \frac{s_{ij}}{\eta_1} - \frac{\sqrt{2} s_{ij} \{ (k_0 - \alpha \sigma + \beta) \eta_3 + (\sigma + \sigma_0 + \mu_1 |e^p|) \eta_2 \}}{\eta_3 \eta_1 \sqrt{s_{kl} s_{kl}}} + \frac{\sigma + \sigma_0 + \mu |e^p|}{\eta_3} \delta_{ij} \quad (1.7)$$

Уравнения, описывающие динамическое поведение среды, имеют вид

$$\sigma_{ij,j} - \rho v_{i,t} = 0 \quad (1.8)$$

$$\sigma_{ij,t} = \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) - 2\mu \varepsilon_{ij}^p - \lambda \varepsilon_{kk}^p \delta_{ij}$$

$$\varepsilon_{ij}^p = 0, \quad \text{если} \quad \begin{cases} (s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p})(s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p}) - 2(k_0 - \alpha\sigma + \beta + \eta_2 |\varepsilon^p|)^2 < 0 \\ -\sigma - \sigma_0 - \mu_1 |e^p| - \eta_3 |\varepsilon^p| < 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \varphi(\sigma_{ij}), \quad \text{если} \quad (s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p})(s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p}) - 2(k_0 - \alpha\sigma + \beta + \eta_2 |\varepsilon^p|)^2 \geq 0$$

$$\text{или} \quad -\sigma - \sigma_0 - \mu_1 |e^p| - \eta_3 |\varepsilon^p| \geq 0$$

Здесь v_i — компоненты вектора скорости перемещений, $\varphi(\sigma_{ij})$ — правая часть (1.3), (1.5) или (1.7).

Можно показать [4], что в средах, описываемых реологическими уравнениями (1.1), существуют два типа волн сильного разрыва — безвихревые и эквиволюминальные, распространяющиеся со скоростями упругих волн $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu / \rho}$.

Для разрывов скоростей и напряжений на этих волнах выполняются следующие соотношения:

$$-c [\sigma_{ij}] = \lambda [v_k] v_k + \mu ([v_i] v_j + [v_j] v_i), \quad [\sigma_{ij}] v_j + \rho c [v_i] = 0 \quad (1.9)$$

Здесь v_i — единичный вектор нормали к волновой поверхности, причем на безвихревых волнах $[v_i] = \omega v_i$, где $\omega = [v_i] v_i$, а на эквиволюминальных $[v_i] v_i = 0$.

2. В области пластического течения среды представим решения для скоростей, напряжений и деформаций в виде ряда по степеням h , где h — расстояние по нормали за фронтом поверхности сильного разрыва

$$f = f^-|_{\Sigma} - h f_{,n}^-|_{\Sigma} + 1/2 f_{,nn}^-|_{\Sigma} - \dots \quad (2.1)$$

Здесь $f^-|_{\Sigma}$, $f_{,n}^-|_{\Sigma}$, ... — значения функций на фронте этой волны. Ряд (2.1) для скорости за фронтом имеет вид

$$v_i = v_i^+|_{\Sigma} - [v_i] + h ([v_{i,n}] - v_{i,n}^+|_{\Sigma}) + \dots \quad (2.2)$$

$$[v_i] = (v_i^+ - v_i^-)|_{\Sigma}$$

Здесь индекс плюс относится к значению функции перед фронтом волны сильного разрыва, индекс минус — к значению функции за фронтом волны. Аналогичные ряды можно выписать для напряжений и пластических деформаций.

Запишем уравнения (1.8) в разрывах. Из кинематических и геометрических условий совместности первого порядка [5] ($x_i = x_i(y^1, y^2, t)$ — уравнение волновой поверхности, $x_{i\beta} = \partial x_i / \partial y^\beta$, $g^{\alpha\beta}$ — компоненты контавариантного метрического тензора волновой поверхности, y^1, y^2 — криволинейные координаты на поверхности)

$$[f_{,i}] = [f_{,n}] v_i + g^{\alpha\beta} [f]_{,\alpha} x_{i\beta}, \quad [f_{,t}] = -c [f_{,n}] + \frac{\delta}{\delta t} [f] \quad (2.3)$$

и соотношений (2.2), следуя работе [4], получим уравнения для определения нулевых членов рядов (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega}{\delta t} &= c_1 \Omega \omega + \frac{1}{2\rho c_1} (\lambda [\varepsilon_{kk}^p] + 2\mu [\varepsilon_{ij}^p] v_i v_j) \\ \frac{\delta [v_i]}{\delta t} &= c_2 \Omega [v_i] + c_2 ([\varepsilon_{ij}^p] v_j - [\varepsilon_{kl}^p] v_k v_l v_i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\Omega = (\Omega_0 - K_0 c t) (1 - 2\Omega_0 c t + K_0 c^2 t^2)^{-1}$$

Ω — средняя кривизна волновой поверхности в любой момент времени, Ω_0 , K_0 — средняя и гауссова кривизна в начальный момент времени. Для вычисления остальных членов лучевого разложения (2.2) определим разрывы производных скоростей любого порядка $[v_{i,n\dots n}^{(k)}]$ на поверхности сильного разрыва. Члены ряда для пластических деформаций и напряжений также зависят от разрывов скорости и производных скорости на этой поверхности.

Для этого продифференцируем соотношения (1.8) m раз по нормали к волновой поверхности ($f_{,n} = f_{,i} v_i$, где v_i — компоненты единичного вектора нормали к фронту волны). Взяв их разность на различных сторонах волновой поверхности, получаем

$$\begin{aligned} [\sigma_{ij,tn\dots n}^{(m+1)}] &= \lambda [v_{k,kn\dots n}^{(m+1)}] + \mu ([v_{i,jn\dots n}^{(m+1)}] + [v_{j,in\dots n}^{(m+1)}]) - \\ &- \lambda [\varepsilon_{kk,n\dots n}^{(m)}] \delta_{ij} - 2\mu [\varepsilon_{ij,n\dots n}^{(m)}] \\ [\sigma_{ij,jn\dots n}^{(m+1)}] - \rho [v_{i,tn\dots n}^{(m+1)}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

На волне сильного разрыва терпят разрыв не только скорости и напряжения, но и их производные любого порядка. Для разрывов производных этих функций на волне должны выполняться условия совместности. Обобщая вывод условий совместности первого и второго порядков [5], получим геометрические и кинематические условия совместности любого порядка для разрывов производных $[f_{,in\dots n}^{(k)}]$, $[f_{,tn\dots n}^{(k)}]$, которые имеют следующий вид:

$$[f_{,in\dots n}^{(k)}] = [f_{,n\dots n}^{(k)}] v_i + g^{\alpha\beta} x_{i\beta} [f_{,n\dots n}^{(k-1)}, \alpha] + (k-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [f_{,tn\dots n}^{(k-1)}] x_{l\tau} x_{i\beta} \quad (2.6)$$

$$[f_{,tn\dots n}^{(k)}] = -c [f_{,n\dots n}^{(k)}] + \frac{\delta}{\delta t} [f_{,n\dots n}^{(k-1)}] \quad (2.7)$$

где $b_{\alpha\sigma}$ — компоненты второй фундаментальной квадратичной формы поверхности.

Подставляя в (2.5) кинематические условия совместности (2.7) для разрывов величин $[v_{i,tn\dots n}^{(m+1)}]$ и $[\sigma_{ij,tn\dots n}^{(m+1)}]$, получаем

$$\begin{aligned} c [\sigma_{ij,n\dots n}^{(m+1)}] &= \frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{ij,n\dots n}^{(m)}] - \lambda [v_{k,kn\dots n}^{(m+1)}] \delta_{ij} - \mu ([v_{i,jn\dots n}^{(m+1)}] + \\ &+ [v_{j,in\dots n}^{(m+1)}]) + \lambda [\varepsilon_{kk,n\dots n}^{(m)}] \delta_{ij} + 2\mu [\varepsilon_{ij,n\dots n}^{(m)}] \\ [\sigma_{ij,jn\dots n}^{(m+1)}] - \rho \left(-c [v_{i,tn\dots n}^{(m+1)}] + \frac{\delta}{\delta t} [v_{i,tn\dots n}^{(m)}] \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Используя геометрические условия совместности (2.6) для разрывов величин $[v_{j, in...n}^{(m+1)}]$ и $[\sigma_{ij, jn...n}^{(m+1)}]$ и исключая из системы (2.8) величины $[\sigma_{ij, n...n}^{(m+1)}]$, $[\sigma_{ij, n...n}^{(m)}]$, получаем

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) [v_{k, n...n}^{(m+1)}] v_i v_k + (\mu - \rho c^2) [v_{i, n...n}^{(m+1)}] = - 2\rho c \frac{\delta}{\delta t} [v_{i, n...n}^{(m)}] - \\ & - \lambda g^{\alpha\beta} x_{k\beta} [v_{k, n...n}^{(m)}]_{, \alpha} v_i - \mu g^{\alpha\beta} x_{i\beta} [v_{k, n...n}^{(m)}]_{, \alpha} v_k - \lambda g^{\alpha\beta} x_{i\beta} [v_{k, kn...n}^{(m)}]_{, \alpha} - \\ & - \mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} [v_{i, jn...n}^{(m)}]_{, \alpha} - \mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} [v_{j, in...n}^{(m)}]_{, \alpha} - \frac{\delta}{\delta t} \{g^{\alpha\beta} x_{j\beta} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}]_{, \alpha} + \\ & + (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{ij, kn...n}^{(m-1)}] x_{k\tau}\} + \rho \frac{\delta^2}{\delta t^2} [v_{i, n...n}^{(m-1)}] - \\ & - \lambda m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{k\beta} [v_{k, ln...n}^{(m)}] x_{l\tau} v_i + g^{\alpha\beta} x_{j\beta} \left(\frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}] \right)_{, \alpha} - \\ & - \mu m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{i\beta} [v_{k, ln...n}^{(m)}] x_{l\tau} v_k + c m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{ij, ln...n}^{(m)}] x_{l\tau} + \\ & + g^{\alpha\beta} x_{j\beta} (\lambda [\varepsilon_{kk, n...n}^{p(m-1)}] \delta_{ij} + 2\mu [\varepsilon_{ij, n...n}^{p(m-1)}])_{, \alpha} + \lambda [\varepsilon_{kk, n...n}^{p(m)}] v_i + 2\mu [\varepsilon_{ij, n...n}^{p(m)}] v_j, \\ & m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Для определения $[\varepsilon_{jj}^p]$, $[\varepsilon_{ij, n}^p]$, ..., $[\varepsilon_{ij, n...n}^{p(m)}]$ нужно воспользоваться соотношениями (1.3), (1.5) или (1.7).

Умножая (2.9) на v_i и суммируя по i , полагая затем $\rho c^2 = \lambda + 2\mu$, получим дифференциальное уравнение для изменения величины $[v_{i, n...n}^{(m)}] v_i = \omega_n^{(m)}$ на безвихревой волне

$$\begin{aligned} & 2\rho c \frac{\delta \omega_n^{(m)}}{\delta t} - 2\rho c^2 \Omega \omega_n^{(m)} + (\lambda + \mu) g^{\alpha\beta} ([v_{k, n...n}^{(m)}] x_{k\alpha})_{, \beta} - \\ & - \rho \frac{\delta^2 \omega_n^{(m-1)}}{\delta t^2} + \mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} v_i \{g^{\sigma\tau} x_{j\tau} [v_{i, n...n}^{(m-1)}]_{, \sigma} + (m-1) g^{pq} g^{\sigma\tau} b_{p\sigma} x_{jq} [v_{i, ln...n}^{(m-1)}] x_{l\tau} + \\ & + g^{\sigma\tau} x_{i\tau} [v_{j, n...n}^{(m-1)}]_{, \sigma} + (m-1) g^{pq} g^{\sigma\tau} b_{p\sigma} x_{iq} [v_{j, ln...n}^{(m-1)}] x_{l\tau}\}_{, \alpha} + \\ & + \frac{\delta}{\delta t} \{g^{\alpha\beta} x_{j\beta} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}] + (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{ij, kn...n}^{(m-1)}] x_{k\tau}\} v_i - \\ & - g^{\alpha\beta} x_{j\beta} v_i \left(\frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}] \right)_{, \alpha} + \lambda m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{k\beta} [v_{k, n...n}^{(m-1)}]_{, \tau} + \\ & + \lambda m (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} g^{pq} b_{\alpha p} b_{q\tau} x_{k\beta} [v_{k, in...n}^{(m-1)}] x_{i\sigma} - c m (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} g^{pq} b_{\tau q} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} v_i \times \\ & \times [\sigma_{ij, ln...n}^{(m-1)}] x_{lp} - c m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}]_{, \tau} v_i - 2\mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} v_i [\varepsilon_{ij, n...n}^{p(m-1)}]_{, \alpha} - \\ & - \lambda [\varepsilon_{kk, n...n}^{p(m)}] - 2\mu [\varepsilon_{ij, n...n}^{p(m)}] v_i v_j = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

В системе (2.9) вместо m положим $m-1$ и $\rho c^2 = \lambda + 2\mu$. Умножив полученные уравнения на x_{ix} и просуммировав по i , найдем соотношения для определения касательных к фронту составляющих вектора $[v_{i, n...n}^{(m)}]$ на безвихревой волне

$$\begin{aligned} & (\mu - \rho c^2) [v_{i, n...n}^{(m)}] x_{ix} = - \mu \omega_{n, x}^{(m-1)} - \mu g^{\alpha\beta} b_{\beta x} [v_{i, n...n}^{(m-1)}] x_{i\alpha} + \\ & + x_{ix} v_j \frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}] + c (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} x_{ix} [\sigma_{ij, ln...n}^{(m-1)}] x_{l\tau} - \\ & - \mu (m-1) g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [v_{j, ln...n}^{(m-1)}] x_{l\tau} v_j - \rho c x_{ix} \frac{\delta}{\delta t} [v_{i, n...n}^{(m-1)}] - c (2\Omega x_{ix} v_j + \\ & + g^{\alpha\beta} b_{\alpha x} x_{j\beta} v_i) [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}] - 2\mu [\varepsilon_{ij, n...n}^{p(m-1)}] v_i x_{ix} + c g^{\alpha\beta} (x_{j\beta} x_{ix} [\sigma_{ij, n...n}^{(m-1)}])_{, \alpha} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Полагая в системе (2.9) $\rho c^2 = \mu$, после умножения на v_i и суммирования по i , имеем

$$\begin{aligned}
 & (\lambda + \mu) [v_{k, n \dots n}^{(m+1)}] v_k = \\
 & = -2\rho c \frac{\delta \omega_n^{(m)}}{\delta t} - \lambda g^{\alpha\beta} x_{k\beta} [v_{k, n \dots n}^{(m)}]_{,\alpha} - \mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} v_i [v_{i, j n \dots n}^{(m)}]_{,\alpha} - \\
 & - \mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} [v_{j, i n \dots n}^{(m)}]_{,\alpha} v_i - \frac{\delta}{\delta t} \{g^{\alpha\beta} x_{j\beta} v_i [\sigma_{ij, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} v_i \times \\
 & \times [\sigma_{ij, k n \dots n}^{(m-1)}] x_{k\tau}\} + \rho \frac{\delta^2}{\delta t^2} [v_{i, n \dots n}^{(m-1)}] v_i - \lambda m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{k\beta} [v_{k, l n \dots n}^{(m)}] x_{l\tau} + \\
 & + c(m-1) m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} g^{pq} b_{\alpha\sigma} b_{\tau q} x_{j\beta} [\sigma_{ij, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{lp} v_i + 2\mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} v_i [\varepsilon_{ij, n \dots n}^{p(m-1)}]_{,\alpha} + \\
 & + \lambda [\varepsilon_{kk, n \dots n}^{p(m)}] + 2\mu [\varepsilon_{ij, n \dots n}^{p(m)}] v_i v_j + g^{\alpha\beta} x_{j\beta} \left(\frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{ij, n \dots n}^{(m-1)}] \right)_{,\alpha} v_i + \quad (2.12) \\
 & + c m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{ij, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\tau} v_i \\
 & \omega^{(m)} = [v_{i, n \dots n}^{(m)}] v_i, \quad \omega_{\alpha}^{(m)} = [v_{i, n \dots n}^{(m)}] x_{i\alpha}
 \end{aligned}$$

Здесь $\omega_n^{(m)}$ — нормальная, а $\omega_{\alpha}^{(m)}$ — касательная составляющие вектора $[v_{i, n \dots n}^{(m)}]$.

Исключая затем величину $[v_{k, n \dots n}^{(m+1)}] v_k$ из системы (2.9) при $\rho c^2 = \mu$, получим систему дифференциальных уравнений для определения касательных составляющих вектора $[v_{i, n \dots n}^{(m)}]$ на эквиволлюминальной волне

$$\begin{aligned}
 & 2\rho c \frac{\delta}{\delta t} (g^{\alpha\beta} \omega_{\alpha}^{(m)} x_{i\beta}) - 2\mu \Omega (g^{\alpha\beta} \omega_{\alpha}^{(m)} x_{i\beta}) + (\lambda + \mu) g^{\alpha\beta} x_{i\beta} \omega_{n, \alpha}^{(m)} + \\
 & + \lambda g^{pq} \{g^{\alpha\beta} x_{k\beta} ([v_{k, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + (m-1) g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [v_{k, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{l\tau})\}_{,p} x_{iq} + \\
 & + 2\mu g^{pq} \{g^{\alpha\beta} x_{j\beta} ([v_{i, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + (m-1) g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [v_{i, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{l\tau})\}_{,p} x_{jq} - \\
 & - 2\mu g^{pq} \{g^{\alpha\beta} x_{j\beta} ([v_{k, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + (m-1) g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [v_{k, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{l\tau})\}_{,p} x_{jq} v_k v_i + \\
 & + 2\mu g^{pq} \{g^{\alpha\beta} x_{i\beta} ([v_{j, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + (m-1) g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [v_{j, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{l\tau})\}_{,p} x_{jq} - \\
 & - 2\mu g^{pq} \{g^{\alpha\beta} x_{k\beta} ([v_{j, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\alpha} + (m-1) g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} [v_{j, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{l\tau})\}_{,p} x_{jq} v_k v_i - \\
 & - \rho \frac{\delta^2}{\delta t^2} (g^{\alpha\beta} \omega_{\alpha}^{(m-1)} x_{i\beta}) + \mu m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{i\beta} v_k ([v_{k, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\tau} + \quad (2.13) \\
 & + (m-1) g^{pq} b_{\tau p} [v_{k, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{lq}) - g^{\alpha\beta} x_{j\beta} \left(\frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{ij, n \dots n}^{(m-1)}] \right)_{,\alpha} + \\
 & + c m (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} g^{pq} b_{\alpha\sigma} b_{\tau q} x_{j\beta} [\sigma_{kj, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{lp} v_k v_i - c m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{ij, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\tau} + \\
 & + c m g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} b_{\alpha\sigma} x_{j\beta} [\sigma_{kj, n \dots n}^{(m-1)}]_{,\tau} v_k v_i - \lambda g^{\alpha\beta} x_{i\beta} [\varepsilon_{kk, n \dots n}^{p(m-1)}]_{,\alpha} - 2\mu g^{\alpha\beta} x_{j\beta} ([\varepsilon_{ij, n \dots n}^{p(m-1)}]_{,\alpha} - \\
 & - [\varepsilon_{kj, n \dots n}^{p(m-1)}]_{,\alpha} v_k v_i) + g^{\alpha\beta} x_{j\beta} \left(\frac{\delta}{\delta t} [\sigma_{kj, n \dots n}^{(m-1)}] \right)_{,\alpha} v_k v_i - 2\mu ([\varepsilon_{ij, n \dots n}^{p(m)}] v_j - \\
 & - [\varepsilon_{kj, n \dots n}^{p(m)}] v_k v_j v_i) - c m (m-1) g^{\alpha\beta} g^{\sigma\tau} g^{pq} b_{\alpha\sigma} b_{\tau q} x_{j\beta} [\sigma_{ij, l n \dots n}^{(m-1)}] x_{lp} = 0
 \end{aligned}$$

Величину нормальной к фронту эквиволлюминальной волны составляющей вектора $[v_{i, n \dots n}^{(m)}]$ дает соотношение (2.12), где вместо m нужно взять $m-1$.

Таким образом, (2.11), (2.12) представляют собой дифференциальные соотношения, из которых по известным $[v_{i, n \dots n}^{(m-1)}]$ и $[\sigma_{ij, n \dots n}^{(m-1)}]$ определяются касательные (в случае безвихревой волны) и нормальные (в

случае эквиволлюминальной) составляющие вектора $[v_{i,n\dots n}^{(m)}]$. В силу (2.11) и (2.12) правые части уравнений (2.10), (2.13) можно считать известными величинами, если только величины $[v_i]$, $[v_{i,n}]$, ..., $[v_{i,n\dots n}^{(m-1)}]$ и $[\sigma_{ij}]$, $[\sigma_{ij,n}^{(1)}]$, ..., $[\sigma_{ij,n\dots n}^{(m-1)}]$ определены. Члены нулевого порядка $[v_i]$ и, согласно (1.10), $[\sigma_{ij}]$ определяются из уравнений (2.4) для безвихревой волны и (2.3) для эквиволлюминальной волны.

Для определения $[\varepsilon_{ij}^p]$, $[\varepsilon_{ij,n}^{p(1)}]$, ..., $[\varepsilon_{ij,n\dots n}^{p(m)}]$ через разрывы напряжений и их производных нужно воспользоваться соотношениями (1.3), (1.5) или (1.7).

Таким образом, из уравнений (2.10) — (2.13), (2.4), (2.8) и (1.10) последовательно определяются члены лучевых разложений для скоростей, напряжений и пластических деформаций и, следовательно, значения этих функций за ударной волной.

3. В качестве примера рассмотрим распространение сферической волны нагрузки в ненапряженном пространстве. Пусть на границе $r = r_0$ задано напряжение $\sigma_{rr} = -P(t)$, $\sigma_{r\varphi} = 0$, $\sigma_{r\theta} = 0$, $P(t) > 0$.

В зависимости от значения параметров, определяющих среду, σ_0 / k_0 , η_1 / η_3 , η_2 / η_3 , ν и давления $P(0) / k_0$ материал за фронтом продольной волны при $t = 0$ может деформироваться упруго или пластически соответственно различным частям поверхности текучести — боковой поверхности, дну или ребру. Для давлений $P(0) < P_0$, где P_0 определяется неравенствами

$$f_1^\circ = s_{ij}s_{ij} - 2(k_0 - \alpha\sigma)^2 < 0, \quad f_2^\circ = -\sigma - \sigma_0 < 0 \quad (3.1)$$

деформированное состояние за фронтом волны будет упругим. На фиг. 2 построены графики $P^* = P_3^*(\alpha, \nu)$, $P^* = P_2^*(\alpha, \nu)$, соответствующие решению уравнений $f_1^\circ = 0$, $f_2^\circ = 0$, $P^* = P(0)/k_0$.

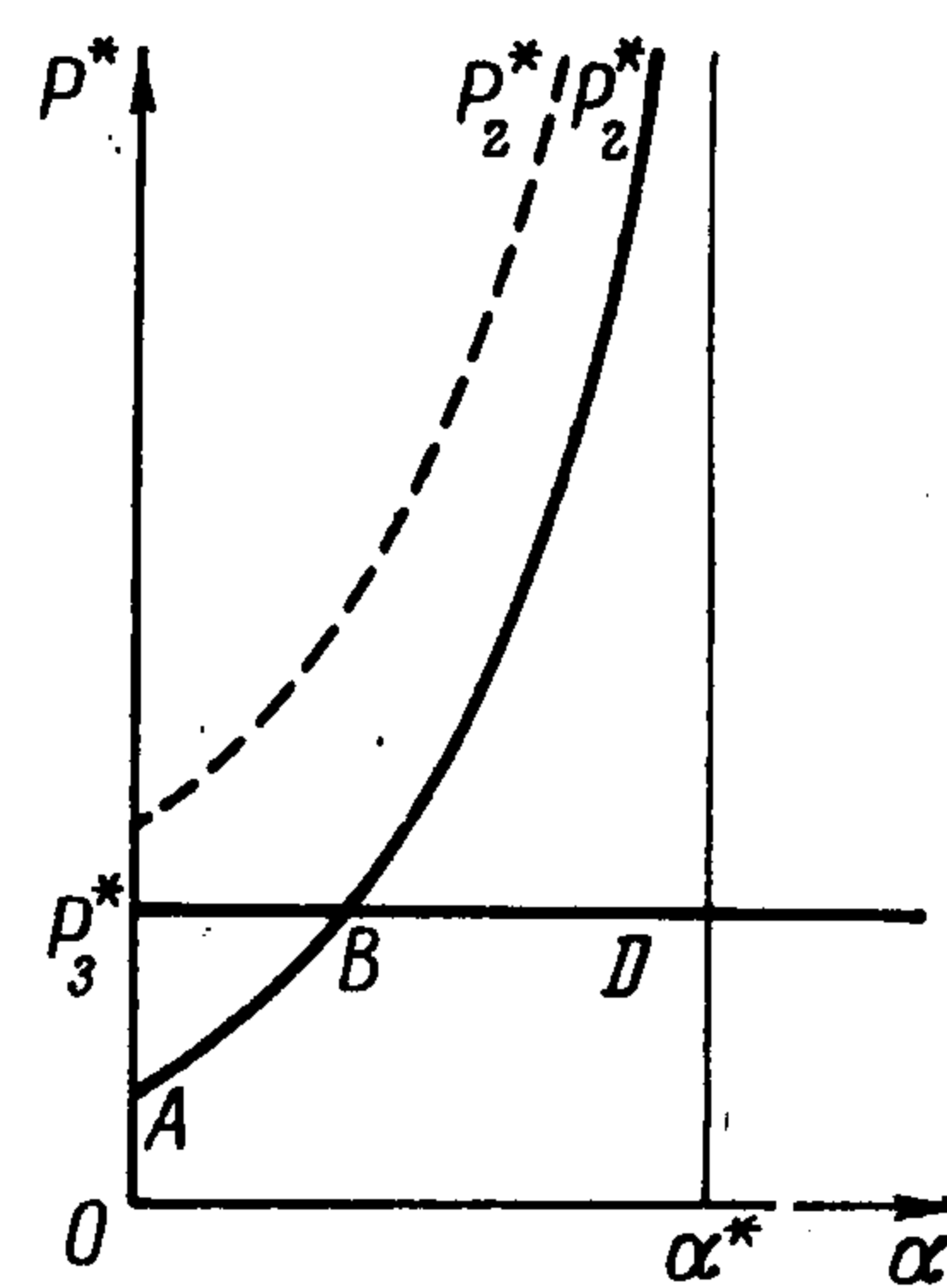
Как показано на фиг. 2, материал будет в упругом состоянии за волной в начальный момент времени, когда давление P^* будет находиться в области, ограниченной кривой ABD , если $k_0 / \sigma_0 < \alpha^*$, или ниже прямой $P^* = P_3^*$, если $k_0 / \sigma_0 \geq \alpha^*$. Здесь

$$P_3^* = 3 \frac{\sigma_0}{k_0} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right), \quad P_2^* = 3 \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \frac{1}{-\alpha + \alpha^*}, \quad \alpha^* = \sqrt{3} \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$

Жирным сплошным линиям соответствуют значения $k_0 / \sigma_0 < \alpha^*$, пунктирным — значения $k_0 / \sigma_0 \geq \alpha^*$.

Напряженное состояние за волной, соответствующее боковой поверхности условия текучести, определяется давлением $P(0)$, удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} f_1 &= (s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p})(s_{ij} - \eta_1 \varepsilon_{ij}^{*p}) - 2(k_0 - \alpha\sigma + \eta_2 |\varepsilon^p|)^2 = 0 \\ f_2 &= -\sigma - \sigma_0 - \eta_3 |\varepsilon^p| < 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 2

Пластическое состояние, соответствующее дну поверхности текучести, определяется давлением $P(0)$ из соотношений

$$f_2 = 0, \quad f_1 < 0 \quad (3.3)$$

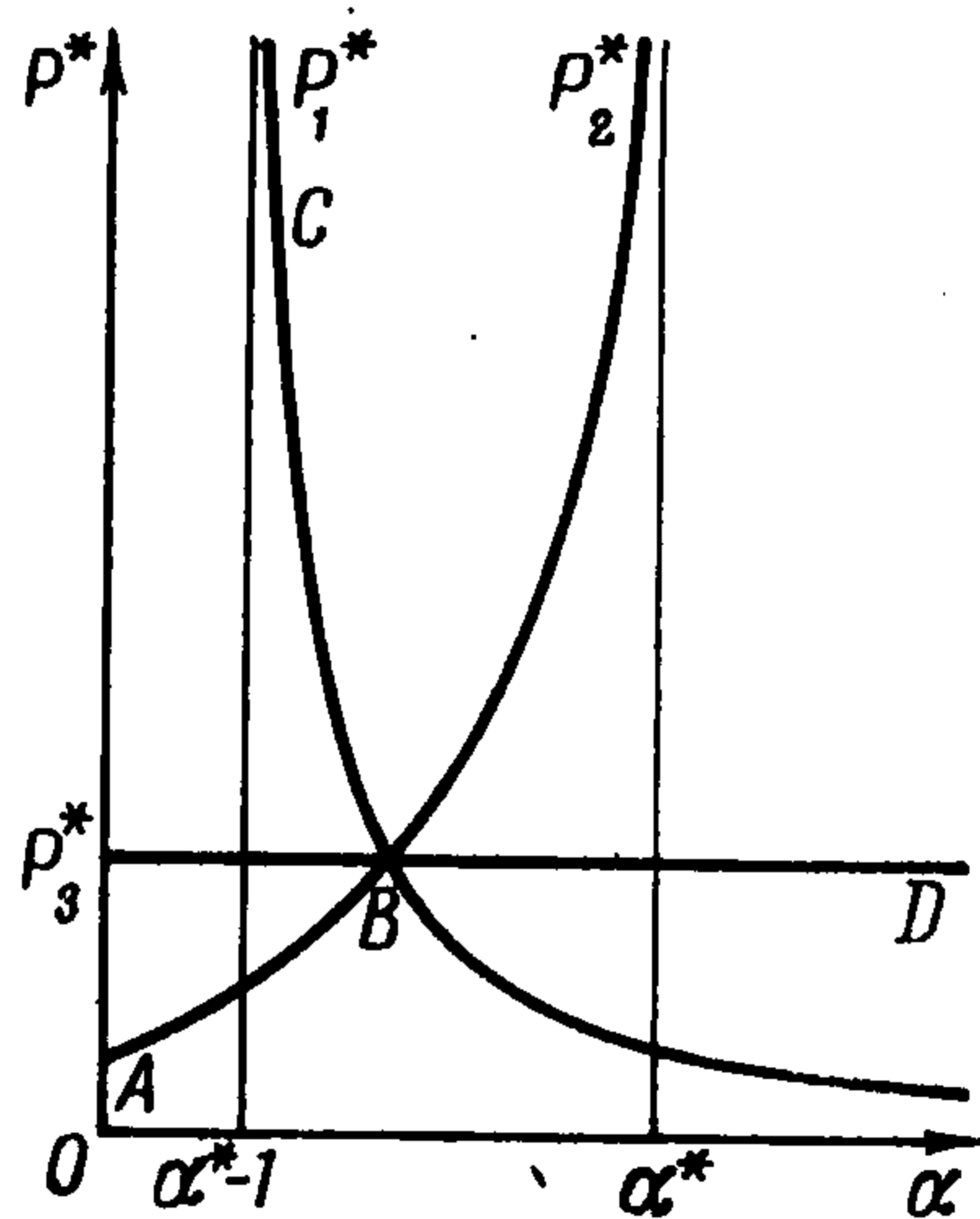
Ребру поверхности текучести соответствует напряженное состояние, определяемое начальным давлением $P(0)$, удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$f_1 = 0, \quad f_2 \geq 0 \quad \text{или} \quad f_2 = 0, \quad f_1 \geq 0$$

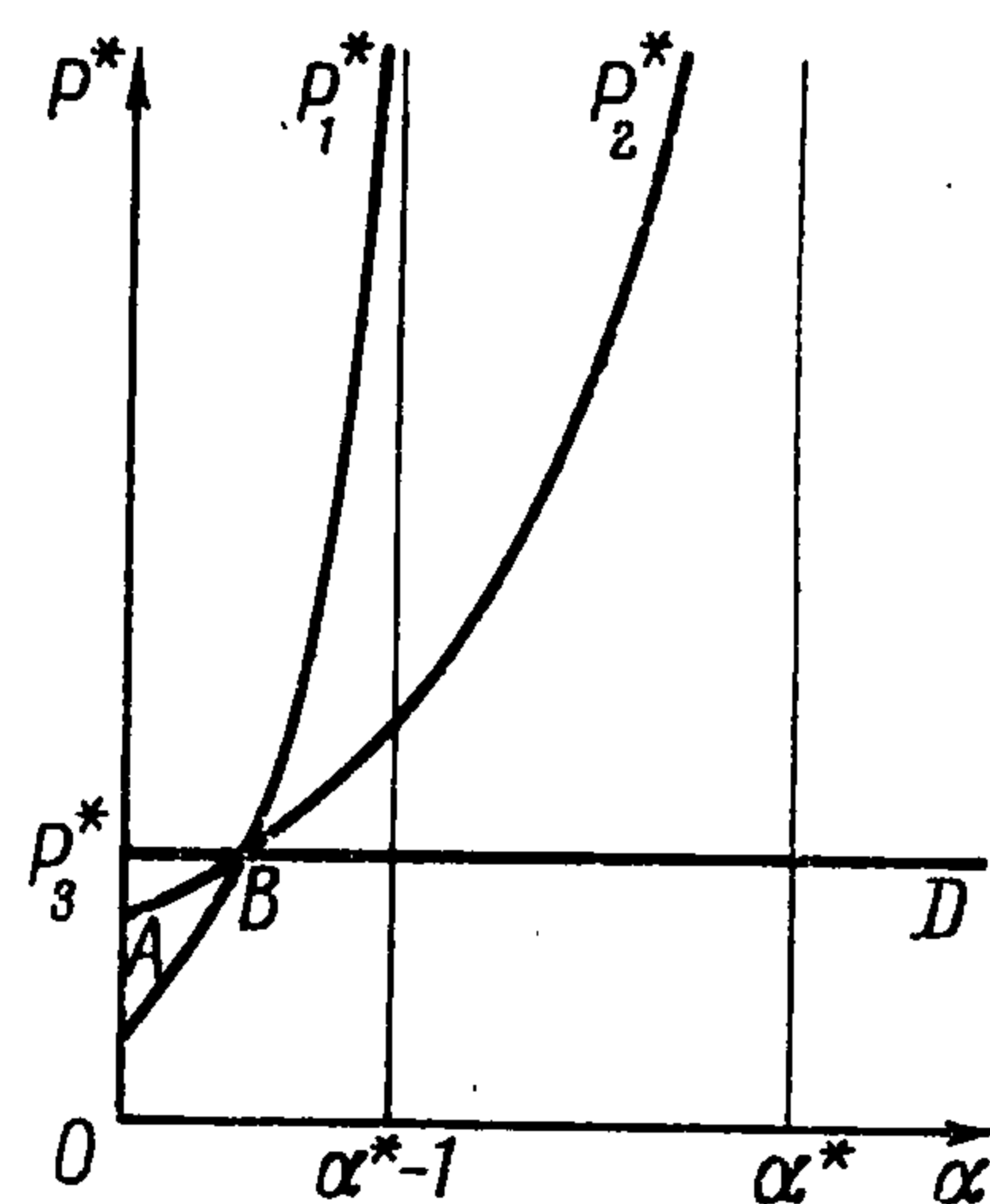
На фиг. 3, 4 приведены кривые

$$P^* = P_3^*(\alpha, \nu), \quad P^* = P_2^*(\alpha, \nu), \quad P_1^* = 3 \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \left(\frac{\sigma_0}{k_0} - 1 \right) \frac{1}{\alpha + 1 - \alpha^*}$$

для $\sigma_0 / k_0 > 1, \sqrt{3}(1-2\nu)/(1+\nu) \geq 1$ и $\sigma_0 / k_0 < 1, \sqrt{3}(1-2\nu)/(1+\nu) > k_0 / \sigma_0$ соответственно, которые отделяют область упру-



Фиг. 3



Фиг. 4

го состояния от пластического, соответствующего различным частям поверхности текучести.

Совместный анализ приведенных неравенств показывает, что пластическое деформированное состояние за волной будет соответствовать боковой поверхности условия текучести, если начальное давление будет находиться в области, ограниченной кривой ABC и осью P^* (фиг. 3, 4). Давлениям, находящимся в области, ограниченной кривой CBD , будет соответствовать пластическое состояние, удовлетворяющее дну поверхности текучести. Начальные давления, лежащие на кривой $P_1^*(\alpha, \nu)$ (участок CB), вызывают пластическое течение, соответствующее ребру поверхности текучести.

Если начальные давления P^* будут находиться ниже кривой ABD , то поведение материала за волной будет упругим.

Определим теперь скорости, напряжения и деформации за распространяющейся поверхностью сильного разрыва, считая начальное давление таким, что за волной реализуется пластическое деформирование, соответствующее боковой поверхности условия текучести $f_1 = 0, f_2 < 0$ для случая $\beta(e^p) = 0, \eta_2(e^p) = \text{const}$. Зависимости между скоростями пластиче-

ских деформаций и напряжениями принимают вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{s_{ij}}{\eta} - \frac{\sqrt{2}s_{ij}}{\eta} \frac{(k_0 - \alpha\sigma)}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{3\eta} \frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \delta_{ij} - \frac{2\alpha(k_0 - \alpha\sigma)}{3\eta} \delta_{ij}$$

Скорость за фронтом волны ищем в виде

$$v_r(r, t) = -\omega + \omega_n^{(1)}(r_0 + c_1t - r) - \frac{1}{2}\omega_n^{(2)}(r_0 + c_1t - r)^2 + \dots \quad (3.4)$$

Аналогично составляются ряды напряжений и деформаций, но их члены зависят от разрывов скорости и ее производных на поверхности сильного разрыва. Поэтому для определения напряжений и деформаций в области пластического течения среды достаточно найти члены лучевого разложения (3.4).

Выписывая скачки скоростей пластических деформаций $[\varepsilon_{ij}^p]$ и подставляя их в уравнение (2.4) для нулевого члена ряда, после преобразований имеем

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} + \left\{ \frac{c_1}{r_0 + c_1t} + \kappa_1 \right\} \omega = -\frac{k_0D}{3\rho c_1\eta} \quad (3.5)$$

$$D = 2\sqrt{3}\mu - \alpha(3\lambda + 2\mu), \quad \kappa_1 = D^2/9\rho c_1\eta, \quad \eta = \eta_1 + \frac{2}{3}\alpha\eta_2$$

Здесь r_0 — радиус волновой поверхности в момент времени $t = 0$, $r = r_0 + c_1t$ — уравнение волновой поверхности в произвольный момент времени.

Интегрируя (3.5), получаем

$$\omega = (r_0 + c_1t)^{-1} \{ A e^{-\kappa_1 t} - k_0D (r_0 + c_1t - c_1/\kappa_1) (3\rho c_1\eta\kappa_1)^{-1} \}$$

$$A = \omega^0 r_0 + k_0D (r_0 - c_1/\kappa_1) (3\rho c_1\eta\kappa_1)^{-1}$$

Здесь ω^0 — значение $[v_i]v_i$ в начальный момент времени.

Вычисляя величины $[\varepsilon_{ij}^p]$ и подставляя их в (2.10), где $m = 1$, после преобразований получим уравнение для определения первого члена ряда (3.4)

$$\frac{\delta\omega_n^{(1)}}{\delta t} + \left\{ \frac{c_1}{r_0 + c_1t} + \kappa_1 \right\} \omega_n^{(1)} = F_1(t)$$

$$F_1(t) = \{ 3\kappa_1^2/2c_1 - 2\kappa_1E/3\rho c_1\eta + 2c_1(r_0 + c_1t)^{-2} \} \omega +$$

$$+ \kappa_1 k_0D/2\rho c_1^2\eta + 2k_0DE/9\rho c_1^2\eta^2 + k_0D \{ 6\rho c_1\eta (r_0 + c_1t)^{-1} - 2\sqrt{3}\mu k_0/\rho c_1\eta (r_0 + ct) \}$$

$$E = 3\mu + \alpha^2(3\lambda + 2\mu)$$

Его решение имеет вид

$$\omega^{(1)} = (r_0 + c_1t)^{-1} e^{-\kappa_1 t} \left\{ \omega_{n0}^{(1)} r_0 + \int_0^t F_1(t) (r_0 + c_1t) e^{\kappa_1 t} dt \right\}$$

Касательные составляющие вектора $[v_{i,n}]$ определяются из системы (2.12) для $m = 1$ и равны нулю. Пусть за волной реализуется пластическое деформирование, соответствующее дну поверхности текучести $f_2 = 0$, $f_1 < 0$. Скорость пластических деформаций в зоне пластического течения среды вычисляются по формулам (1.5). Уравнение затухания для нулевого члена ряда (3.4) в этом случае имеет вид

$$\frac{\delta\omega}{\delta t} + \left\{ \frac{c_1}{r_0 + c_1t} + \kappa_2 \right\} \omega = -\frac{(3\lambda + 2\mu)\sigma_0}{2\rho c_1\eta_2}$$

Его решение запишется в виде

$$\omega = (r_0 + c_1 t)^{-1} \{A_2 e^{-\kappa_2 t} - 3\sigma_0 c_1 (r_0 + c_1 t - c_1 / \kappa_2) (3\lambda + 2\mu)^{-1}\}$$

$$A_2 = \omega^0 r_0 + 3\sigma_0 c_1 (r_0 - c_1 / \kappa_2) (3\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \kappa_2 = (3\lambda + 2\mu)^2 / (6\rho c_1^2 \eta_2)$$

Первый член ряда (3.4) определяется из уравнения

$$\frac{\delta \omega_n^{(1)}}{\delta t} + \left\{ \frac{c_1}{r_0 + c_1 t} + \kappa_2 \right\} \omega_n^{(1)} = F_2(t)$$

$$\omega_n^{(1)} = (r_0 + c_1 t)^{-1} e^{-\kappa_2 t} \left\{ r_0 \omega_{n0}^{(1)} + \int_0^t F_2(t) (r_0 + c_1 t) e^{\kappa_2 t} dt \right\}$$

$$F_2(t) = \left\{ \frac{2c_1}{(r_0 + c_1 t)^2} + \frac{3\kappa_2^2}{2c_1} - \frac{3\lambda + 2\mu}{c_1 \eta_3} \right\} \omega + \frac{3(3\lambda + 2\mu) \sigma_0 \kappa_2}{4\rho c_1^2 \eta_3} + \frac{(3\lambda + 2\mu) \sigma_0}{4\rho c_1 \eta_3 (r_0 + c_1 t)} - \frac{3\delta_0 \kappa_2}{\eta_3}$$

В случае, когда начальное давление $P(0)$ таково, что за волной реализуется пластическое деформирование, соответствующее ребру поверхности текучести $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, уравнение для определения нулевого члена ряда (3.4) имеет вид

$$\frac{\delta \omega}{\delta t} + \left\{ \frac{c_1}{r_0 + c_1 t} + \kappa_3 \right\} \omega = - \frac{(3\lambda + 2\mu) \sigma_0}{2\rho c_1 \eta_3} - \frac{2\mu (k_0 \eta_3 + \sigma_0 \eta_2)}{\sqrt{3} \rho c_1 \eta_3 \eta_1} \quad (3.6)$$

$$\omega = (r_0 + c_1 t)^{-1} \{A e^{-\kappa_3 t} + B (r_0 + c_1 t - c_1 / \kappa_3) \kappa_3^{-1}\}$$

$$A_3 = \omega^0 r_0 + B (r_0 \kappa_3 - c_1)$$

$$\kappa_3 = \frac{1}{2\rho c_1} \left\{ \frac{(3\lambda + 2\mu)^2}{3\rho c_1 \eta_3} + \frac{8\mu^2}{3\rho c_1 \eta_1} - \frac{4\mu (3\lambda + 2\mu) (\alpha \eta_3 - \eta_2)}{3 \sqrt{3} \rho c_1 \eta_3 \eta_1} \right\}$$

Здесь B — правая часть уравнения (3.6).

Первый член ряда в этом случае определяется из следующего уравнения:

$$\frac{\delta \omega_n^{(1)}}{\delta t} + \left\{ \frac{c_1}{r_0 + c_1 t} + \kappa_3 \right\} \omega_n^{(1)} = F_3(t)$$

$$F_3(t) = \omega \left\{ \frac{c_1}{(r_0 + c_1 t)^2} + \frac{3\kappa_3^2}{2c_1} - \frac{8\mu^2}{6\rho c_1^3 \eta_1^2} + \frac{4\mu^2 (3\lambda + 2\mu) (\alpha \eta_3 - \eta_2)}{6 \sqrt{3} c_1^3 \rho \eta_1^2 \eta_3} - \frac{(3\lambda + 2\mu)^3}{6\rho c_1^2 \eta_3^2} + \frac{2\mu (\alpha \eta_3 - \eta_2) (3\lambda + 2\mu)^2}{6 \sqrt{3} \rho c_1^3 \eta_3^2 \eta_1} + \frac{2\mu (3\lambda + 2\mu) (\alpha \eta_3 - \eta_2)}{2 \sqrt{3} \rho c_1^2 \eta_3 \eta_1 (r_0 + c_1 t)} \right\} - \frac{2 \sqrt{3} \mu (k_0 \eta_3 + \sigma_0 \eta_2)}{\rho c_1 \eta_3 \eta_1 (r_0 + c_1 t)} + \frac{3\kappa_3 (3\lambda + 2\mu) \sigma_0}{4\rho c_1^3 \eta_3} - \frac{4\mu^2 (k_0 \eta_3 + \sigma_0 \eta_2)}{4\rho c_1 (r_0 + c_1 t) \eta_3} - \frac{(3\lambda + 2\mu) \sigma_0}{2\rho c_1^2 \eta_3} \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\eta_3} - \frac{4\mu (\alpha \eta_3 - \eta_2)}{\sqrt{3} \eta_3 \eta_1} \right) + \frac{\sqrt{3} \mu \kappa_3 (k_0 \eta_3 + \sigma_0 \eta_2)}{\rho c_1^2 \eta_3 \eta_1}$$

$$\omega_n^{(1)} = (r_0 + c_1 t)^{-1} \exp(-\kappa_3 t) \left\{ r_0 \omega_{n0}^{(1)} + \int_0^t F_3(t) \exp(\kappa_3 t) (r_0 + c_1 t) dt \right\}$$

Касательные, составляющие вектора $[v_i, n]$, отсутствуют и в этом, и в предыдущем случае.

Ограничиваясь двумя членами, можно выписать решение для скорости (и, следовательно, для напряжений и деформаций) в области пластического течения среды с точностью до малых членов порядка $(r_0 + ct - r)^2$.

Определим начальные значения ω° , $\omega_{n0}^{(1)}$, входящие в решения для $\omega(t)$ и $\omega_n^{(1)}(t)$. Нормальная компонента скорости v_r , задаваемая рядом (3.4) на сфере радиуса r_0 , должна равняться $P(t) / \rho c_1$, т. е.

$$P(t) / \rho c_1 = -\omega + \omega_n^{(1)}(c_1 t) - 1/2 \omega_n^{(2)}(ct)^2 + \dots \quad (3.7)$$

Полагая в (3.7) $t = 0$, получаем

$$\omega(0) = \omega^\circ = P(0) / \rho c_1$$

Дифференцируя (3.7) по t и полагая $t = 0$, имеем

$$\omega_n^{(1)}(0) = \omega_{n0}^\circ = P'(0) / \rho c_1^2 + \omega'(0) / c_1$$

Здесь ω' определяется из решения для $\omega(t)$. Продолжая действовать таким образом, найдем все начальные значения, необходимые для определения членов ряда (3.4).

Поступила 15 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд-во ЛГУ, 1961.
2. Achenbach J. D., Reddy D. P. Note of wave propagation in Linear Viscoelastic Media. Z. angew. Math. und Phys., 1967, Bd 18, S. 141—144.
3. Jenike A. W., Shield R. T. On the plastic flow of Coulomb Solids beyond original failure. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, No. 4, p. 559—602.
4. Быковцев Г. И., Вerveйко Н. Д. О распространении волн в упруго-вязко-пластической среде. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
5. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир» 1961.