Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ

С. И. Тарлинский

(Свердловск)

Рассматривается задача о сближении конфликтно управляемых объектов с заданным множеством в фиксированный момент времени. Приводится одно условие, при котором такая задача имеет решение. Результаты примыкают к работам [1–7].

1. Рассмотрим динамическую систему из двух управляемых объектов. Один из них, подчиненный первому игроку, описывается линейным дифференциальным уравнением

$$dy/dt = A^{(1)}(t)\,y + B^{(1)}(t)\,u + f^{(1)}(t) \tag{1.1}$$

где y — $n^{(1)}$-мерный вектор. Другой объект, подчиненный второму игроку, описывается уравнением

$$dz/dt = A^{(2)}(t)\,z + B^{(2)}(t)\,v + f^{(2)}(t) \tag{1.2}$$

Здесь z — $n^{(2)}$-мерный фазовый вектор. Игра рассматривается на заданном отрезке времени $[t_0, \vartheta]$. Управляющие воздействия игроков в каждый момент времени стеснены ограничениями

$$u\,[t] \in P, \quad v\,[t] \in Q \tag{1.3}$$

где P, Q — выпуклые компакты в соответствующих векторных пространствах.

Обозначим через $\{p\}_m$ вектор, составленный из первых m координат вектора p, и пусть $\rho\,(q, N)$ означает евклидово расстояние от точки q до множества N. По условиям задачи в фазовом пространстве $\{x\}_m = \{z - y\}_m$ $(m \leqslant n^{(1)},\ m \leqslant n^{(2)})$ задано выпуклое компактное множество M и зафиксирована начальная позиция игры $\{t_0,\ y_0,\ z_0\}$ $y\,[t_0] = y_0$, $z\,[t_0] = z_0$. Первый игрок, распоряжающийся управлением u, стремится в момент времени ϑ минимизировать величину

$$\gamma = \rho\,(\{z - y\}_m,\ M) \tag{1.4}$$

Второй игрок выбором управления v стремится максимизировать значение платы γ (1.4) в тот же момент времени ϑ.

Уточним постановку задачи. Под позиционной стратегией первого игрока будем понимать функцию $U = U\,(t, y, z)$, которая каждой позиции игры $\{t, y, z\}$ ставит в соответствие выпуклое компактное множество U, причем $U \subset P$. Для второго игрока допустима любая интегрируемая реализация $v = v\,[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, стесненная условием $v\,[t] \in Q$, причем эта реализация $v[t]$ может вырабатываться на основе произвольного закона управления, использующего любую мыслимую информацию о ходе процесса. Пусть Δ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, \vartheta]$ на конечное число частей точками τ_i $(i = 0, 1, \ldots)$. Аппроксимационным движением системы (1.1) называется любая абсолютно непрерывная функция $y_\Delta[t] = y_\Delta[t;\ t_0,\ y_0,\ U]$, удовлетворяющая, при почти всех значениях $t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}]$, соотношению

$$dy_\Delta/dt = A^{(1)}(t)\, y_\Delta + B^{(1)}(t)\, u[\tau_i] + f^{(1)}(t) \tag{1.5}$$

Здесь $u[\tau_i] \in U(\tau_i,\ y_\Delta[\tau_i],\ z_\Delta[\tau_i])$, где движение $z[t] = z[t;\ t_0,\ z_0,\ v_\Delta[\cdot]]$ порождено интегрируемой функцией $v_\Delta[\cdot] = v_\Delta[t]$ и почти всюду удовлетворяет уравнению (1.2). Абсолютно непрерывная функция $y[t] = y[t;\ t_0,\ y_0,\ U]$ называется движением системы (1.1), порожденным стратегией U и начальными условиями $y[t_0] = y_0$, если существует последовательность аппроксимационных движений $y_{\Delta_k}[t]$ (1.5), сходящаяся равномерно к $y[t]$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} y_{\Delta_k}[t] = y[t], \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma(\Delta_k) = 0$$

$$\sigma(\Delta) = \max\nolimits_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$$

Порождающие движения $z[t] = z[t;\ t_0,\ z_0,\ v_{\Delta_k}[\cdot]]$ функции $v_{\Delta_k}[t]$ могут произвольно изменяться с изменением Δ_k, лишь бы только последовательность $v_{\Delta_k}[t]$ слабо сходилась к некоторой измеримой функции $v[t]$. Используя результаты работы [5], можно показать, что семейство таких движений будет не пустым компактным в себе множеством.

Сформулируем следующую задачу [5].

Задача 1.1. Пусть задан конечный момент времени ϑ и определено целевое множество M. Требуется найти оптимальную минимаксную стратегию $U_0 = U_0(t,\ y,\ z)$ первого игрока, которая удовлетворяет условию

$$\{\rho(\{z[\vartheta] - y[\vartheta]\}_m,\ M) \mid X[t_0, y_0, z_0, U_0]\} \leqslant$$

$$\leqslant \min_U \max_{v[\cdot],\, z[\cdot]} \{\rho(\{z[\vartheta] - y[\vartheta]\}_m M) \mid X[t_0, y_0, z_0, U]\}$$

Здесь символ $X[t_0,\ y_0,\ z_0,\ U]$ означает семейство всех движений $y[\cdot] = y[t;\ t_0, y_0,\ U]$, $z[\cdot] = z[t;\ t_0,\ z_0,\ v[\cdot]]$, $v[\cdot] \in Q$ систем (1.1), (1.2), отвечающих начальной позиции $y[t_0] = y_0$, $z[t_0] = z_0$.

2. В основе решения задачи 1.1 лежит экстремальная конструкция, введенная в работах [1, 5, 6]. Опишем для полноты изложения основные элементы этой конструкции. Обозначим через $Y[t,\ \tau]$, $Z[t,\ \tau]$ фундаментальные матрицы следующих уравнений:

$$dy/dt = A^{(1)}(t)\, y, \qquad dz/dt = A^{(2)}(t)\, z$$

Для каждого вектора $\{t,\ y,\ z\}$ и m-мерного вектора l определим функцию

$$\varphi(t, y, z, l) = l' x_0(t, y, z) - \int_t^{\vartheta} \rho_P(\xi, l)\, d\xi + \int_t^{\vartheta} \rho_Q(\xi, l)\, d\xi \tag{2.1}$$

Здесь штрих означает транспонирование, а величины $x_0(t, y, z)$, $\rho_P(t, l)$, $\rho_Q(t, l)$, $\rho_M(l)$ задаются следующими соотношениями:

$$\rho_P(t, l) = \max_{u \in P} l' \{Y[\vartheta, t] B^{(1)}(t) u\}_m \tag{2.2}$$

$$\rho_Q(t, l) = \max_{v \in Q} l' \{Z[\vartheta, t] B^{(2)}(t) v\}_m \tag{2.3}$$

$$\rho_M(l) = \max_{m \in M} l'm$$

$$x_0(t, y, z) = \{Z[\vartheta, t] z - Y[\vartheta, t] y\}_m + \\ + \left\{\int_t^\vartheta Z[\vartheta, \xi] f^{(2)}(\xi) d\xi - \int_t^\vartheta Y[\vartheta, \xi] f^{(1)}(\xi) d\xi\right\}_m$$

Теперь положим

$$\varepsilon(t, y, z) = \max_{\|l\|=1} \varphi(t, y, z, l) \tag{2.4}$$

Заметим, что в области $\varepsilon(t, y, z) > 0$ величина $\varepsilon(t, y, z)$ определяет программное максиминное расстояние фазовой точки $\{x(\vartheta)\}_m = \{z(\vartheta) - y(\vartheta)\}_m$ от множества M, если вспомогательная программная игра началась из позиции $y(t) = y$, $z(t) = z$ (см. [5]). Для каждого вектора $\{t, y, z\}$ зададим множество $L_0(t, y, z)$ m-мерных векторов l_0

$$L_0(t, y, z) = \{l_0 : \|l_0\| = 1, \ \varphi(t, y, z, l_0) = \varepsilon(t, y, z)\} \tag{2.5}$$

где величины $\varphi(t, y, z, l_0)$, $\varepsilon(t, y, z)$ определены формулами (2.1), (2.4). Очевидно, каждое из множеств $L_0(t, y, z)$ будет замкнутым и ограниченным.

Предположим, что выполняется следующее условие.

Условие 2.1. В области $\varepsilon(t, y, z) > 0$ для каждого вектора $v^* \in Q$ можно указать такой вектор $u^* \in P$, что одновременно для всех векторов $l_0 \in L_0(t, y, z)$ справедливо неравенство

$$\psi(t, u^*, v^*, l_0) \leqslant 0 \tag{2.6}$$

$$\psi(t, u, v, l) = \rho_P(t, l) - \rho_Q(t, l) + l' \{Z[\vartheta, t] B^{(2)}(t) v\}_m - l' \{Y[\vartheta, t] B^{(1)}(t) u\}_m \tag{2.7}$$

где величины $\rho_P(t, l)$, $\rho_Q(t, l)$ определены условиями (2.2), (2.3).

В m-мерном пространстве $\{h\}_m$ зададим множество $H(t, y, z)$. Скажем, что $h \in H(t, y, z)$ тогда и только тогда, когда для всех векторов $l_0 \in L_0(t, y, z)$ (2.5) справедливо неравенство

$$\rho_Q(t, l_0) - \rho_P(t, l_0) \geqslant l_0' h \tag{2.8}$$

Очевидно, множества $H(t, y, z)$ будут выпуклыми и замкнутыми.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2.1. Для того чтобы выполнялось условие 2.1, необходимо и достаточно, чтобы каждое из множеств $H(t, y, z)$ было не пусто и для любого m-мерного вектора s имело место неравенство

$$\max_{h \in H} s'h \geqslant \rho_Q(t, s) - \rho_P(t, s), \quad H = H(t, y, z) \tag{2.9}$$

Действительно, пусть справедливо условие 2.1. Следовательно, для любого вектора $v^* \in Q$ можно указать вектор $u^* \in P$, удовлетворяющий неравенству (2.6).

Тогда из определения множеств $H(t, y, z)$ (2.8) получим

$$\{Z(\vartheta, t) B^{(2)}(t) v^*\}_m - \{Y(\vartheta, t) B^{(1)}(t) u^*\}_m \in H(t, y, z)$$

Поэтому для любого вектора s будет выполняться неравенство

$$\max_{h\in H} s'h \geqslant s' \{Z(\vartheta, t) B^{(2)}(t) v^*\}_m - s' \{Y(\vartheta, t) B^{(1)}(t) u^*\}_m \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.2) имеем

$$\max_{h\in H} s'h \geqslant s' \{Z(\vartheta, t) B^{(2)}(t) v^*\}_m - \rho_P(t, s) \tag{2.11}$$

Поскольку соотношение (2.11) справедливо для любого вектора $v^* \in Q$, то из (2.11), (2.3) окончательно получим неравенство (2.9).

Обратно, пусть выполняется (2.9). Зададим произвольный вектор $v^* \in Q$. Тогда из (2.9) непосредственно следует соотношение (2.11).

Введем выпуклое компактное множество

$$F(t, v) = \{\{Z(\vartheta, t) B^{(2)}(t) v - Y(\vartheta, t) B^{(1)}(t) u\}_m : u \in P\} \tag{2.12}$$

По теореме об отделимости выпуклых множеств [8] и из (2.11) вытекает, что пересечение множеств $H(t, y, z)$ (2.9) и $F(t, v^*)$ (2.12) не пусто. Поэтому существует такой вектор $u^* \in P$, для которого выполняется неравенство (2.10) и, следовательно, неравенство (2.6), что и завершает доказательство леммы 2.1.

3. Приведем доказательство одного вспомогательного утверждения, при помощи которого решается задача 1.1. В пространстве векторов $\{t, y, z\}$ зададим ограниченное множество N. Для наперед заданного достаточно малого положительного числа $\beta > 0$ определим множество

$$\Gamma_\beta = \{t, y, z : \{t, y, z\} \in N, \ t \in [t_0, \vartheta], \ \varepsilon(t, y, z) \geqslant \beta\} \tag{3.1}$$

Пусть теперь

$$L(t_*, y_*, z_*, \eta) = \bigcup_{\{t, y, z\}} L_0(t, y, z) \tag{3.2}$$

$$(|t - t_*| \leqslant \eta, \|y - y_*\| \leqslant \eta, \|z - z_*\| \leqslant \eta)$$

где множества $L_0(t, y, z)$ определены формулой (2.5). Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть выполняется условие 2.1. Тогда для любого числа $\alpha > 0$ можно указать число $\eta > 0$ такое, что имеет место оценка

$$\max_{v\in Q} \min_{u\in P} \max_{l\in L} \psi(t_*, u, v, l) \leqslant \alpha \tag{3.3}$$

где $L = L(t_*, y_*, z_*, \eta)$ (3.2), а функция $\psi(t, u, v, l)$ определена соотношением (2.7). Причем оценка (3.3) может быть сделана равномерной по всем $\{t_*, y_*, z_*\} \in \Gamma_\beta$.

Доказательство леммы 3.1 следует из условия 2.1, а также из непрерывности функции $\psi(t, u, v, l)$ (2.7) и полунепрерывности по $\{t, y, z\}$ множеств $L_0(t, y, z)$ (2.5).

Обозначим через $y_\Delta[t] = y_\Delta[t; t_*, y_*, u]$, $z_\Delta[t] = z_\Delta[t; t_*, z_*, v]$ движения систем (1.1), (1.2), порожденные на отрезке времени $[t_*, t_* + \Delta]$ постоянными управлениями $u \in P$, $v \in Q$ и начальными условиями $y_\Delta[t_*] = y_*$, $z_\Delta[t_*] = z_*$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2. Пусть выполняется условие 2.1. Тогда для числа $\alpha > 0$ найдется такое число $\eta > 0$, что для каждого вектора $v^* \in Q$ можно указать вектор $u^* = u^*(t_*, y_*, z_*, v^*)$ $(u^* \in P)$, обеспечивающий для движений $y_\Delta[t] = y_\Delta[t;\ t_*, y_*, u^*]$, $z_\Delta[t] = z_\Delta[t;\ t_*, z_*, v^*]$ оценку

$$\varepsilon(t_* + \Delta, y_\Delta[t_* + \Delta], z_\Delta[t_* + \Delta]) \leqslant \varepsilon(t_*, y_*, z_*) + \alpha\Delta \tag{3.4}$$

если только $\Delta \leqslant \eta$. Причем оценка (3.4) может быть сделана равномерной по всем $\{t_*, y_*, z_*\} \in \Gamma_\beta$ (3.1).

Действительно, для числа $\alpha > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что будут справедливы неравенства

$$|\psi(t_1, u, v, l) - \psi(t_2, u, v, l)| \leqslant \alpha / 2 \tag{3.5}$$

$$\max_{v\in Q} \min_{u\in P} \max_{l\in L} \psi(t_*, u, v, l) \leqslant \alpha / 2 \tag{3.6}$$

если только $L = L(t_*, y_*, z_*, \delta)$ (3.2), $|t_2 - t_1| \leqslant \delta$, $\|l\| = 1$, $u \in P$, $v \in Q$, $t_1, t_2 \in [t_0, \vartheta]$.

Заметим, что неравенство (3.6) будет выполняться равномерно по всем позициям $\{t_*, y_*, z_*\} \in \Gamma_\beta$.

По известному числу δ можно подобрать число η $(\eta \leqslant \delta)$ так, чтобы для любых движений $y_\Delta[t] = y_\Delta[t;\ t_*, y_*, u]$, $z_\Delta[t] = z_\Delta[t;\ t_*, z_*, v]$, где $u \in P$, $v \in Q$, были справедливы оценки

$$\|y_\Delta[t] - y_*\| \leqslant \delta, \qquad \|z_\Delta[t] - z_*\| \leqslant \delta \tag{3.7}$$

если только $|t - t_*| \leqslant \eta$, $\{t_*, y_*, z_*\} \in \Gamma_\beta$. Зафиксируем произвольный вектор $v^* \in Q$ и в позиции $\{t_*, y_*, z_*\}$ определим вектор $u^* = u^*(t_*, y_*, z_*, v^*)$ $(u^* \in P)$ из условия минимума

$$\max_{l\in L} \psi(t_*, u^*, v^*, l) = \min_{u\in P} \max_{l\in L} \psi(t_*, u, v^*, l) \tag{3.8}$$

Здесь $L = L(t_*, y_*, z_*, \delta)$ (3.2), (3.5), (3.6). Сопоставляя (3.8) и (3.6), имеем

$$\max\nolimits_{l\in L} \psi(t_*, u^*, v^*, l) \leqslant \alpha/2 \tag{3.9}$$

Вычислим теперь полную производную от функции $\varphi[t, l] = \varphi(t;\ y_\Delta[t], z_\Delta[t], l)\cdot$ $\cdot(\|l\| = 1)$ (2.1) вдоль движений $y_\Delta[t] = y_\Delta[t;\ t_*, y_*, u^*]$, $z_\Delta[t] = z_\Delta[t;\ t_*, z_*, v^*]$ на отрезке времени $[t_*, t_* + \Delta]$ $(\Delta \leqslant \eta$ (3.7)). Используя (2.7), (3.5), получим

$$\frac{d\varphi[t, l]}{dt} = \psi(t, u^*, v^*, l)$$

$$\frac{d\varphi[t, l]}{dt} \leqslant \psi(t_*, u^*, v^*, l) + \frac{\alpha}{2} \tag{3.10}$$

Из (3.10), (3.9) в свою очередь следуют оценки

$$d\varphi[t, l]/dt \leqslant \alpha, \qquad \varphi[t, l] = \varphi(t, y_\Delta[t], z_\Delta[t], l)$$

$$\varphi[t_* + \Delta, l] \leqslant \varphi[t_*, l] + \alpha\Delta \tag{3.11}$$

если только вектор $l \in L(t_*, y_*, z_*, \delta)$ (3.2), (3.5), (3.6).

Поскольку рассматриваются единичные векторы l, то из (3.11), (2.3), (3.2) вытекает неравенство

$$\max_{l\in L} \varphi(t_* + \Delta, y_\Delta[t_* + \Delta], z_\Delta[t_* + \Delta], l) \leqslant \varepsilon(t_*, y_*, z_*) + \alpha\Delta \tag{3.12}$$

В силу выбора числа η ($\eta \leqslant \delta$) для движений $y_\Delta[t] = y_\Delta[t; t_*, y_*, u^*]$, $z_\Delta[t] = z_\Delta[t; t_*, z_*, v^*]$ справедливы оценки (3.7). Поэтому из (3.12), а также из (2.3), (2.1), (3.2) имеем

$$\varepsilon(t_* + \Delta, y_\Delta[t_* + \Delta], z_\Delta[t_* + \Delta]) \leqslant \varepsilon(t_*, y_*, z_*) + \alpha\Delta \tag{3.13}$$

Неравенство (3.13) и доказывает лемму.

В работах [5,7] было дано определение u-стабильной системы множеств. Приведем это определение в удобной для дальнейшего форме.

Определение 3.1. Пусть в фазовом пространстве $\{y, z\}$ задано замкнутое множество G и пусть задана система не пустых замкнутых множеств $W(t, \vartheta)(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, причем $W(\vartheta, \vartheta) = G$. Система множеств $W(t, \vartheta)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ называется u-стабильной относительно G, каковы бы ни были $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $\{y_*, z_*\} \in W(t_*, \vartheta)$, $\eta \in [0, \vartheta - t_*)$, для любого постоянного управления $v^*[t] = v^* \in Q$ найдется такое измеримое управление $u^*[\cdot] = u^*[t] \in P$ $(t_* \leqslant t \leqslant t_* + \eta)$, что для движений $y_*[t] = y_*[t; t_*, y_*, u^*[\cdot]]$, $z_*[t] = z_*[t; t_*, z_*, v^*]$ справедливо включение

$$\{y_*[t_* + \eta], z_*[t_* + \eta]\} \in W(t_* + \eta, \vartheta)$$

Предположим, что в начальной позиции игры $\{t_0, y_0, z_0\}$ выполняется неравенство

$$\varepsilon(t_0, y_0, z_0) > 0 \tag{3.14}$$

В пространстве векторов $\{y, z\}$ зададим множества $W_\varepsilon(t, \vartheta)(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ следующим соотношением:

$$W_\varepsilon(t, \vartheta) = \{y, z : \varepsilon(t, y, z) \leqslant \varepsilon\} \tag{3.15}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(t_0, y_0, z_0)$. Поскольку функция $\varepsilon(t, y, z)$ непрерывна по всем аргументам, то, очевидно, каждое из множеств $W_\varepsilon(t, \vartheta)$ будет замкнутым. Кроме того, учитывая неравенство (3.14), можно показать (см. например [5]), что множества $W_\varepsilon(t, \vartheta)$ ($\varepsilon = \varepsilon(t_0, y_0, z_0)$) не пусты. Из леммы 3.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.3. Если выполняется условие 2.1, то система множеств $W_\varepsilon(t, \vartheta)$ u-стабильна относительно $M_\varepsilon = \{q : \rho(\{q\}_m, M) \leqslant \varepsilon\}$.

Определим теперь стратегию $U_e = U_e(t, y, z)$ первого игрока следующим образом [7]. Если $\{y, z\} \in W_\varepsilon(t, \vartheta)$, то полагаем $U_e(t, y, z) = P$. Если же вектор $\{y, z\}$ не принадлежит множеству $W_\varepsilon(t, \vartheta)$ (3.15), то выделим во множестве $W_\varepsilon(t, \vartheta)$ все векторы w_0, ближайшие к $\{y, z\}$, т. е.

$$\rho(\{y, z\}, w_0) = \rho(\{y, z\}, W_\varepsilon(t, \vartheta))$$

В качестве $U_e(t, y, z)$ выберем все векторы u_e, каждый из которых удовлетворяет условию максимума

$$s' B^{(1)}(t)\, u_e = \max\nolimits_{u \in P} s' B^{(1)}(t)\, u \tag{3.16}$$

хотя бы при одном значении $s = x - w^\circ$.

При помощи леммы 3.3, используя результаты работы [7], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть справедливо условие 2.1. Если начальная позиция игры $\{t_0, y_0, z_0\}$ такова, что выполняется неравенство (3.14), то стратегия U_e (3.16) обеспечивает оценку

$$\varepsilon(\vartheta;\ y[\vartheta],\ z[\vartheta]) \leqslant \varepsilon(t_0,\ y_0,\ z_0)$$

для любых движений систем (1.1), (1.2): $y[t] = y[t;\ t_0,\ y_0,\ U_e]$, $z[t] = z[t;\ t_0,\ z_0,\ v[\cdot]]$.

Условие 2.1 всегда выполняется, если каждое из множеств $L_0 = L_0(t,\ y,\ z)$ (2.5) состоит из единственного вектора, что соответствует регулярному случаю игры, рассмотренному в работе [5].

4. При некоторых естественных предположениях о гладкости систем (1.1), (1.2) докажем, что условие 2.1 является также и необходимым для того, чтобы функция $\varepsilon(t,\ y,\ z)$ в области $\varepsilon(t,\ y,\ z) > 0$ была ценой игры в задаче 1.1.

Предположим, что матрицы $Y[\vartheta,\ t]\,B^{(1)}(t)$, $Z[\vartheta,\ t]\,B^{(2)}(t)$ удовлетворяют по t условию Липшица

$$\|Y[\vartheta, t_1]\,B^{(1)}(t_1) - Y[\vartheta, t_2]\,B^{(1)}(t_2)\| \leqslant R_1\,|t_1 - t_2| \tag{4.1}$$

$$\|Z[\vartheta, t_1]\,B^{(2)}(t_1) - Z[\vartheta, t_2]\,B^{(2)}(t_2)\| \leqslant R_2\,|t_1 - t_2| \tag{4.2}$$

Здесь норма матрицы $C = \{c_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ $(j = 1, \ldots, k)$ задается соотношением

$$\|C\| = \max_j \left[\sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2\right]^{1/2}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Если функция $\varepsilon(t,\ y,\ z)$ в области $\varepsilon(t,\ y,\ z) > 0$ является ценой игры, то выполняется условие 2.1.

Доказательство. Допустим противное, т. е. условие 2.1 нарушается в некоторой точке $\{t_*,\ y_*,\ z_*\}$, где $\varepsilon(t_*,\ y_*,\ z_*) > 0$. Тогда найдется такой вектор $v^* \in Q$, что для всех векторов $u \in P$ будет справедливо неравенство

$$\max_{l_0 \in L_0} \psi(t_*, u, v^*, l_0) \geqslant \alpha_0 > 0 \tag{4.3}$$

где $L_0 = L_0(t_*,\ y_*,\ z_*)$, а функция $\psi(t,\ u,\ v,\ l)$ определена формулой (2.7). Очевидно, в силу неравенств (4.1), (4.2), что функция $\psi(t,\ u,\ v,\ l)$ будет также удовлетворять по t условию Липшица

$$|\psi(t_1,\ u,\ v,\ l) - \psi(t_2,\ u,\ v,\ l)| \leqslant R\,|t_1 - t_2| \tag{4.4}$$

Зададим произвольным образом позиционную стратегию $U = U(t,\ y,\ z)$ первого игрока. Покажем, что для любых движений $y[t] = y[t;\ t_*,\ y_*,\ U]$ и движения $z[t] = z[t;\ t_*,\ z_*,\ v^*]$, порожденных стратегией U и управлением $v[t] = v^*$ (4.3), выполняется неравенство

$$\varepsilon(t_* + \delta_0, y[t_* + \delta_0],\ z[t_* + \delta_0]) \geqslant \varepsilon(t_*, y_*, z_*) + {}^1/_4\,\alpha_0^2/R$$

$$(\delta_0 = {}^1/_2\alpha_0/R)$$

где величина α_0 находится из соотношения (4.3).

С этой целью рассмотрим последовательность аппроксимационных движений $y_{\Delta_k}[t]$ (1.5), равномерно сходящуюся к $y[t]$. Вычисляя полную производную от функции $\varphi[t, l] = \varphi(t, y_{\Delta_k}[t], z_{\Delta_k}[t], l)$ и используя (4.4), имеем

$$d\varphi[t, l]/dt \geqslant \psi(t_*, u[\tau_i^k], v^*, l) - R\delta_0 \quad (i = 0, 1, \ldots, p)$$

$$t \in [\tau_i^k, \tau_{i+1}^k], \quad \tau_{i+1}^k - \tau_i^k = \Delta_i^k, \quad \sum_{i=1}^{p} \Delta_i^k = \delta_0$$

$$\varphi[\tau_{i+1}^k, l] - \varphi[\tau_i^k, l] \geqslant \psi(t_*, u[\tau_i^k], v^*, l)\Delta_i^k - R\delta_0\Delta_i^k \tag{4.5}$$

Из формулы (4.5) очевидным образом следует неравенство

$$\varphi[t_* + \delta_0 l] \geqslant \varphi[t_*, l] + \sum_{i=1}^{p} \psi(t_*, u[\tau_i^k], v^* l)\Delta_i^k - R\delta_0^2 \tag{4.6}$$

Используя тот факт, что множество P — выпуклое, запишем следующее равенство:

$$\psi(t_*, u^*, v^*, l)\delta_0 = \sum_{i=1}^{p} \psi(t_*, u[\tau_i^k], v^*, l)\Delta_i^k \tag{4.7}$$

$$\left(u^* = \frac{1}{\delta_0}\sum_{i=1}^{p} u[\tau_i^k]\Delta_i^k \in P\right)$$

Выберем теперь вектор $l_* \in L_0(t_*, y_*, z_*)$, удовлетворяющий соотношению

$$\psi(t_*, u^*, v^*, l_*) = \max_{l_0 \in L_0} \psi(t_*, u^*, v^*, l_0) \geqslant \alpha_0 \tag{4.8}$$

Из формул (4.6), (4.7), (4.8) следует оценка

$$\varphi[t_* + \delta_0, l_*] \geqslant \varphi[t_*, l_*] + \alpha_0\delta_0 - R\delta_0^2$$

Поскольку вектор $l_* \in L_0(t_*, y_*, z_*)$, то отсюда получим очевидные неравенства

$$\varphi[t_* + \delta_0, l_*] \geqslant \varepsilon(t_*, y_*, z_*) + \alpha_0\delta_0 - R\delta_0^2$$

$$\varepsilon(t_* + \delta_0, y_{\Delta_k}[t_* + \delta_0], z_{\Delta_k}[t_* + \delta_0]) \geqslant \varepsilon(t_*, y_*, z_*) + \alpha_0/2\delta_0$$

что и доказывает теорему 4.1.

Из теорем 3.4, 4.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.2. Для того чтобы функция $\varepsilon(t, y, z)$ (2.4) в области $\varepsilon(t, y, z) > 0$ была ценой игры, решающей задачу 1.1, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие 2.1.

Скажем, что стратегия $U = U(t, y, z)$ обеспечивает сближение систем (1.1), (1.2) с множеством M к моменту времени ϑ, если для любых движений $y[t] = y[t; t_0, y_0, U]$, $z[t] = z[t; t_0, z_0, v[\cdot]]$ справедливо включение

$$\{z[t_*] - y[t_*]\}_m \in M$$

хотя бы при одном значении $t_* = t_*(y[\cdot], z[\cdot])$ $(t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta)$. Обозначим через $\vartheta_M = \vartheta_M (t_0, y_0, z_0)$ первый момент времени, когда выполняется равенство

$$\varepsilon (t_0, y_0, z_0, \vartheta_M) = 0 \qquad (4.9)$$

где величина $\varepsilon (t, y, z, \vartheta)$ определена соотношениями (2.1) — (2.4) для произвольного момента времени ϑ.

Используя результаты леммы 3.1, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.3. Пусть $\vartheta_M = \vartheta_M (t_0, y_0, z_0)$ — конечный момент времени, когда впервые выполняется соотношение (4.9). Если для момента времени ϑ_M справедливо условие 2.1, то существует стратегия U первого игрока, обеспечивающая сближение систем (1.1), (1.2) с множеством M к моменту времени ϑ_M.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 30 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н., Репин Ю. М., Третьяков В. Е. О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем. Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1965, № 4.
2. Понтрягин Л. С. О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
3. Пшеничный Б. Н. Линейные дифференциальные игры. Автоматика и телемеханика, 1968, № 1.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. О структуре дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 3.
5. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
6. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Дифференциальная игра наведения. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 4.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы, т. 1, М., Изд-во иностр. лит., 1962.