Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3:534.1

О ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СТРОГО ВЫПУКЛЫХ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. С. Срубщик

(Ростов-на-Дону)

Определяются значения верхних критических нагрузок потери устойчивости несимметричных строго выпуклых упругих пологих оболочек, когда параметр относительной тонкостенности достаточно мал. Выводятся простые соотношения, из которых указанные значения могут быть найдены, если характер нагружения, геометрия оболочки и способ закрепления края известны. Попутно для соответствующих краевых задач строятся асимптотические разложения решения, позволяющие проводить расчет напряженно-деформированного состояния оболочки в докритической стадии. Для примера найдены асимптотические значения верхних критических давлений эллипсоидальных оболочек под действием равномерного внешнего давления и при различных основных способах закрепления края.

Ряд задач о потере устойчивости строго выпуклых тонких оболочек рассматривался в [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейный вариант теории «среднего» изгиба упругой пологой оболочки, находящейся под действием поперечной нагрузки [2,3]

$$\varepsilon^2\Delta^2 w - [w - z, F] - q = 0, \qquad \varepsilon^2\Delta^2 F + {}^1/_2\,[w, w] - [z, w] = 0$$

$$\varepsilon^2 F_{xx} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[v_y + z_{yy}w + \frac{1}{2}w_y^2 + \nu\left(u_x + z_{xx}w + \frac{1}{2}w_x^2\right)\right]$$

$$\varepsilon^2 F_{xy} = -\frac{1}{2(1+\nu)}\,[u_y + v_x + 2z_{xy}w + w_x w_y] \tag{1.1}$$

$$\varepsilon^2 F_{yy} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[u_x + z_{xx}w + \frac{1}{2}w_x^2 + \nu\left(v_y + z_{yy}w + \frac{1}{2}w_y^2\right)\right]$$

$$\Delta w = w_{xx} + w_{yy}, \qquad [F, w] = F_{xx}w_{yy} + F_{yy}w_{xx} - 2F_{xy}w_{xy}$$

Все величины, входящие в уравнения (1.1), безразмерные и связаны с размерными соотношениями

$$Z = az, \quad W = aw, \quad U = au, \; V = av, \quad x_1 = ax, \; y_1 = ay$$

$$\varepsilon^2 = h\,(a\gamma)^{-1}, \quad \Phi = Ea^2\varepsilon^2 F, \quad p = E\gamma\varepsilon^4 q, \quad \gamma^2 = 12\,(1-\nu^2)$$

Здесь Z — срединная поверхность оболочки; U, V, W — соответственно перемещения вдоль координатных осей Ox_1, Oy_1, Oz_1; Φ — функция напряжений Эри; p — интенсивность внешней нагрузки (давление); E — модуль Юнга. Предполагается, что оболочка занимает в плане конечную односвязную выпуклую область D с границей Γ, причем край оболочки совпадает с Γ, т. е. $z(s) = 0$, если $s \in \Gamma$. Малый параметр ε^2 характеризует относительную тонкостенность оболочки, h — толщина, ν — коэффициент Пуассона, a — характерный размер области D. Прогиб W отсчитывается от поверхности Z в направлении действия нагрузки.

Уравнения (1.1) исследуются вместе с каждым из краевых условий на контуре Г

$$\begin{aligned} &1)\ F = F_\rho = w = [w_{\rho\rho} + \nu\,(w_{ss} - \varkappa w_\rho)] = 0 \\ &2)\ F = F_\rho = w = w_\rho = 0 \\ &3)\ u = v = w = [w_{\rho\rho} + \nu\,(w_{ss} - \varkappa w_\rho)] = 0 \\ &4)\ u = v = w = w_\rho = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь $\varkappa = \varkappa\,(s)$ — кривизна контура Г, причем $\varkappa > 0$; s — параметр длины дуги, ρ — внутренняя нормаль к Г. Краевые условия (1.2) соответствуют: 1) подвижной шарнирной опоре края; 2) скользящему защемлению края; 3) неподвижной шарнирной опоре; 4) абсолютно глухой заделке края.

Кроме того, поверхность $z\,(x, y)$ предполагается строго выпуклой, а функции $q\,(x, y)$, $z\,(x, y)$ и $F_0\,(x, y)$ из (1.4) (см. ниже) — достаточно гладкими.

В работе определяются асимптотические значения верхних критических нагрузок произвольных строго выпуклых пологих оболочек при указанных способах закрепления края, когда параметр ε^2 стремится к нулю. Попутно строятся асимптотические разложения при $\varepsilon \to 0$ решений задач (1.1), (1.2). Для этого применяются методы асимптотического интегрирования уравнений теории оболочек, развитые в работах [4-8].

Пусть $\varepsilon = 0$. Тогда из (1.1) имеем

$$^1/_2\,[w_0, w_0] - [z, w_0] = 0, \qquad [w_0 - z, F_0] + q = 0 \tag{1.3}$$

Первое уравнение есть уравнение Монжа — Ампера и при краевом условии $w_0\,(s) = 0$ имеет два решения, таких, что

$$1)\ w_0 = 0, \quad [z, F_0] = q; \quad 2)\ w_0 = 2z, \quad [z, F_0] = -q \tag{1.4}$$

Для малых значений параметра ε первое из этих решений отвечает основной упругой форме равновесия, близкой к исходной поверхности z, так как уравнения (1.1) удовлетворяются с точностью до величины порядка ε^2, но при этом не удовлетворяются краевые условия (1.2). Ниже показано, что при $\varepsilon \to 0$ задачи (1.1), (1.2) имеют решения, которые ведут себя подобно 1) в (1.4) всюду внутри области D и вблизи границы Г претерпевают сильные изменения — такие, что краевые условия (1.2) выполняются. Эти изменения описываются уравнениями краевого эффекта, решение которых для произвольно заданных z и q сводится к интегрированию уравнений краевого эффекта для сферической оболочки при равномерном внешнем давлении. Последние численно решены на ЭЦВМ в [8].

Здесь подтверждается гипотеза А. В. Погорелова [1], что деформация достаточно тонкой оболочки в докритической стадии есть в основном изометрическое преобразование, отождествленное с исходной поверхностью, а существенные деформации оболочка испытывает лишь в окрестности границы области выпучивания.

2. *Строго выпуклые оболочки при свободном закреплении края.* Асимптотические разложения решений задач (1.1), 1) и 2) в (1.2) строятся при

$\varepsilon \to 0$ в окрестности первого решения (1.4) в виде

$$F(x, y, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i [F_i(x, y) + \varepsilon h_i(x, y, \varepsilon)] \tag{2.1}$$

$$w(x, y, \varepsilon) \sim \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i [w_i(x, y) + \varepsilon g_i(x, y, \varepsilon)]$$

Функции F_i, w_i получаются при помощи первого итерационного процесса [9]. Именно, обозначая через $\mathbf{V} \equiv (F, w)$ решение, а через $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ — левую часть системы из первых двух уравнений в (1.1), потребуем, чтобы

$$\mathbf{P}(\mathbf{V}_n) = O(\varepsilon^{n+1}), \qquad \mathbf{V}_n \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i F_i, \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i\right) \tag{2.2}$$

Собирая коэффициенты при ε^0, ε^1, ... ε^n и приравнивая полученные выражения нулю, для определения F_0, w_0 имеем

$$w_0 = 0, \qquad [z, F_0] = q, \qquad F_0|_\Gamma = A_0(s) \equiv 0 \tag{2.3}$$

а для определения F_i, w_i — системы линейных уравнений второго порядка в частных производных эллиптического типа

$$[w_i, z] = \frac{1}{2} \sum_{k+j=i} [w_k, w_j] + \Delta^2 F_{i-2}$$

$$[F_i, z] = \sum_{k+j=i} [w_k, F_j] - \Delta^2 w_{i-2} \qquad (k, j \neq 0) \tag{2.4}$$

$$F_i|_\Gamma = A_i(s), \qquad w_i|_\Gamma = B_i(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ F_{-1} = w_{-1} \equiv 0)$$

Правые части (2.4) известны, если F_0, w_0, ..., F_{i-1}, w_{i-1} уже найдены. Функции $A_i(s)$, $B_i(s)$ в граничных условиях будут определены несколько позднее в (2.11).

Вектор $\mathbf{V}_n$ не удовлетворяет краевым условиям 1) или 2) в (1.2) и возникающие невязки компенсируются функциями типа пограничного слоя h_i, g_i, которые определяются при помощи второго итерационного процесса [9]. Для этого разность $\mathbf{V} - \mathbf{V}_n$ разыскивается в виде (2.1). После подстановки (2.1) в (1.1) учитываем (2.2) и переходим в полученных соотношениях к локальным координатам (ρ, φ) границы Γ по формулам

$$\psi_x = \psi_\rho \rho_x + \psi_\varphi \varphi_x, \qquad \psi_y = \psi_\rho \rho_y + \psi_\varphi \varphi_y$$

В результате имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i+3} \Delta^2 h_i + \frac{1}{2} \sum_{k,\, i=0}^{n} \varepsilon^{k+i+2} [g_k, g_i] + \sum_{k,\, i=0}^{n} \varepsilon^{k+i+1} [w_k, g_i] - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i+1} [g_i, z] = O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i+3} \Delta^2 g_i - \sum_{k,\, i=0}^{n} \varepsilon^{k+i+2} [g_k, h_i] + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i+1} [h_i, z] -$$

$$- \sum_{k,\, i=0}^{n} \varepsilon^{k+i+1} [F_k, g_i] - \sum_{k,\, i=0}^{n} \varepsilon^{k+i+1} [w_k, h_i] = O(\varepsilon^{n+1}) \tag{2.5}$$

Здесь

$$[u, \psi] = u_{xx}\psi_{yy} + u_{yy}\psi_{xx} - 2u_{xy}\psi_{xy}$$

$$\psi_{xy} = \psi_{\rho\rho}\rho_x\rho_y + \psi_{\rho\varphi}(\rho_x\varphi_y + \rho_y\varphi_x) + \psi_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y + \psi_\rho\rho_{xy} + \psi_\varphi\varphi_{xy}$$

$$\Delta^2\psi = \sum_{l=1}^{4}\sum_{m+k=l}\alpha_{mk}^{(l)}\frac{\partial^l\psi}{\partial\rho^m\partial\varphi^k}$$

Далее в (2.5) разлагаем F_k, w_k, $\alpha_{mk}^{(l)}$, ρ_x, φ_x, ρ_{xx}, ρ_{xy}, ... в ряды Тейлора в окрестности $\rho = 0$, полагаем $\rho = \varepsilon t$, собираем коэффициенты при одинаковых степенях ε и, приравнивая нулю выражения, полученные при ε^{-2}, ε^{-1}, ..., ε^{n-1}, выводим уравнения для определения h_i, g_i.

Отметим некоторые соотношения, справедливые на контуре Г. При этом предполагается достаточная гладкость $\rho(x, y)$, $\varphi(x, y)$, а также произвольной функции $\psi(x, y)$ относительно своих аргументов

$$\rho_x^2 + \rho_y^2 = 1, \qquad \rho_x = -Y_\varphi\delta^{-1}, \qquad \rho_y = X_\varphi\delta^{-1}$$

$$\varphi_x = X_\varphi\delta^{-2}, \qquad \varphi_y = Y_\varphi\delta^{-2}, \qquad \delta^2 = X_\varphi^2 + Y_\varphi^2$$

$$\rho_x^2\rho_{xx} + \rho_y^2\rho_{yy} + 2\rho_x\rho_y\rho_{xy} = 0, \qquad \rho_x^2\rho_{yy} + \rho_y^2\rho_{xx} - 2\rho_x\rho_y\rho_{xy} = -\varkappa(\varphi),$$

$$\psi_{xx}\rho_y^2 + \psi_{yy}\rho_x^2 - 2\psi_{xy}\rho_x\rho_y = \psi_{\varphi\varphi}\delta^{-2} - \psi_\varphi\delta^{-4}(X_\varphi X_{\varphi\varphi} + Y_\varphi Y_{\varphi\varphi}) - \varkappa(\varphi)\psi_\rho =$$

$$= \psi_{ss} - \varkappa(s)\psi_\rho, \qquad \alpha_{40}^{(4)} = 1, \qquad \alpha_{31}^{(4)} = 0, \qquad \alpha_{30}^{(4)} = -2\varkappa \tag{2.6}$$

Здесь $\varkappa = \varkappa(\varphi)$ — кривизна контура Г в точке, соответствующей значению параметра φ (или параметра длины дуги s); $X = X(\varphi)$, $Y = Y(\varphi)$ — параметрические уравнения кривой Г, ориентированной в положительном направлении.

Теперь, используя (2.6), получаем, что коэффициент при ε^{-2} тождественно равен нулю. Коэффициент при ε^{-1} приводит для определения h_0, g_0 к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^4 h_0}{\partial t^4} - \frac{1}{2}\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g_0}{\partial t}\right)^2 + \varkappa c\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^4 g_0}{\partial t^4} +$$

$$+\varkappa\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g_0}{\partial t}\frac{\partial h_0}{\partial t}\right) + f\varkappa\frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} - \varkappa c\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2} = 0 \tag{2.7}$$

$$f = F_{0\rho}|_\Gamma, \qquad c = z_\rho|_\Gamma > 0$$

При выводе значений для f и c учтено, что $F_0(s) = z(s) = 0$, если $s \in \Gamma$. Для определения h_i, g_i $(i \geqslant 1)$ получаем системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^4 h_i}{\partial t^4} - \varkappa\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g_0}{\partial t}\frac{\partial g_i}{\partial t}\right) + \varkappa c\frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} = R_{i1} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^4 g_i}{\partial t^4} + \varkappa\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0}{\partial t}\frac{\partial g_i}{\partial t}\right) + \varkappa\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g_0}{\partial t}\frac{\partial h_i}{\partial t}\right) + f\varkappa\frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2} - \varkappa c\frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} = R_{i2}$$

Здесь R_{i1}, R_{i2} — известные функции, если F_0, w_0, ... F_{i-1}, w_{i-1}; h_0, g_0, ... h_{i-1}, g_{i-1} уже найдены.

Найдем граничные условия для h_i, g_i $(i \geqslant 0)$. Для этого (2.1) подставляем в те краевые условия (1.2), которые содержат производные. Полагая $\rho = \varepsilon t$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε,

получаем

$$1)\ \frac{\partial h_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = -F_{0\rho}|_\Gamma, \qquad \frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial h_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = -F_{i\rho}|_\Gamma$$

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2}\Big|_{t=0} = \nu\varkappa \frac{\partial g_{i-1}}{\partial t}\Big|_{t=0} - \nu g_{i-2,\,ss}|_{t=0} - [w_{i-1,\,\rho\rho} + \nu w_{i-1,\,ss} - \nu\varkappa w_{i-1,\,\rho}]_\Gamma \tag{2.9}$$

$$2)\ \frac{\partial h_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = -F_{0\rho}|_\Gamma, \qquad \frac{\partial g_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial h_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = -F_{i\rho}|_\Gamma$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}\Big|_{t=0} = -w_{i\rho}|_\Gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ g_{-1} \equiv 0)$$

Кроме того, еще четыре условия вытекают из требования, чтобы функции h_i, g_i исчезали на бесконечности

$$\left\{h_i, g_i, \frac{\partial h_i}{\partial t}, \frac{\partial g_i}{\partial t}\right\}_{t\to\infty} \to 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots n) \tag{2.10}$$

Теперь определим граничные условия для F_i, w_i. Удовлетворяя (1.2) при помощи (2.1), имеем

$$\left[F_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i (F_i + h_{i-1})\right]_\Gamma = O(\varepsilon^{n+1}), \qquad \left[w_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i (w_i + g_{i-1})\right]_\Gamma = O(\varepsilon^{n+1})$$

Отсюда следует, что

$$F_0|_\Gamma = w_0|_\Gamma = 0, \qquad A_i(s) = -h_{i-1}(0), \qquad B_i(s) = -g_{i-1}(0) \tag{2.11}$$

Первое соотношение указывает на правильность выбора краевого условия в (2.3), а второе позволяет доопределить задачи (2.4).

Итак, построение асимптотики решений уравнений (1.1) при краевых условиях 1), 2) в (1.2) сводится к следующему. Сначала из (2.3), (2.11) определяется F_0, w_0, а затем из (2.7), (2.10) — h_0, g_0. Далее из (2.4), (2.11) определяется F_1, w_1, а из (2.8) — (2.10) — h_1, g_1 и т. д.

Произведя замены

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = -\alpha c, \quad \frac{\partial g_0}{\partial t} = -\beta c, \quad \tau = \sqrt{\varkappa} ct, \quad \frac{1}{2} Q = fc^{-1}$$

из (2.7), (2.9), (2.10) получаем

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2}\beta^2 + \beta = 0, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial \tau^2} - \alpha\beta - \alpha + \frac{1}{2} Q\beta = 0, \quad \{\alpha, \beta\}_\infty \to 0 \tag{2.12}$$

с соответствующими краевыми условиями

$$1)\ \alpha(0) = \frac{1}{2} Q, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0; \quad 2)\ \alpha(0) = \frac{1}{2} Q, \qquad \beta(0) = 0 \tag{2.13}$$

Таким образом, для произвольно заданных z и q решение уравнений для основного члена в зоне краевого эффекта сводится к одной и той же системе (2.12). Задачи (2.12), (2.13) численно решены в [8]. Там же найдены наименьшие точки ветвления Q^* для этих задач.

Далее в качестве параметра нагрузки [8] введем величину

$$\sigma = \max_s Q = \max_s [2fc^{-1}] = \max_s \left[\frac{2}{z_\rho(s)} \int_D G_\rho(x, y; \xi, \eta)\, q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right]$$

$$f = F_{0\rho}(s), \qquad c = z_\rho(s), \qquad s \in \Gamma$$

Здесь G — функция Грина задачи (2.3), а точка $(x, y) \in \Gamma$. Тогда, используя результаты п. 3 в [8], получаем соответственно для краевых условий 1) и 2) в (1.2) асимптотические значения верхней критической нагрузки

$$1)\ \sigma_0 = Q^* = 0.793, \qquad 2)\ \sigma_0 = Q^* = 1.766 \tag{2.14}$$

Это значение можно уточнить, если воспользоваться рядами теории возмущений

$$\sigma^* \sim \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i \sigma_i, \qquad q^*(x, y) \sim q(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^i q_i \tag{2.15}$$

Здесь q_i — постоянные, которые определяются вместе с σ_i из условий разрешимости линейных краевых задач второго итерационного процесса при $i \geqslant 1$.

Таким образом, переходя к размерным переменным, приходим к следующему результату.

Пусть z, q и F_0 из (2.3) достаточно гладкие функции в $D + \Gamma$. Тогда для очень тонких оболочек с условиями закрепления края 1), 2) в (1.2) значения верхней критической нагрузки P_j^* определяются формулой

$$P_j^* = \frac{Eh^2}{\gamma a^2}\sigma_j^* = \max_{s\in\Gamma}\left[\frac{2}{z_\rho(s)}\int_D G_\rho(x, y; \xi, \eta)\, p_j^*(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\right] =$$

$$= \frac{\alpha_j E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{h}{a}\right)^2 [1 + a_{1j}\varepsilon + \ldots], \quad j = 1, 2; \quad \alpha_1 = 0.3965, \quad \alpha_2 = 0.883 \tag{2.16}$$

Здесь индексы $j = 1,2$ соответствуют краевым условиям 1), 2) в (1.2), a — характерный размер области D, G — функция Грина задачи (2.3). (Коэффициенты a_{ij} в работе не найдены.)

3. Строго выпуклые оболочки при жестком закреплении края. Построение асимптотики в этом случае несколько сложнее, чем в случае свободного закрепления края. Действительно, при построении первого итерационного процесса уже определение F_0 из (1.4) наталкивается на трудности (неизвестно, какие краевые условия получаются для F_0 при $\varepsilon = 0$). Поэтому в обоих итерационных процессах привлекаются уравнения, связывающие функцию F с перемещениями u, v, w.

Приравнивая смешанные производные третьего порядка для функции F, из (1.1) получим

$$L_1(u, v) \equiv v_{yy} + \frac{1-\nu}{2} v_{xx} + \frac{1+\nu}{2} u_{xy} = f_{11}(w) + f_{12}(w, w)$$

$$L_2(u, v) \equiv u_{xx} + \frac{1-\nu}{2} u_{yy} + \frac{1+\nu}{2} v_{xy} = f_{21}(w) + f_{22}(w, w)$$

$$f_{11}(w) = -[(z_{yy} + \nu z_{xx})\, w]_y - (1-\nu)(z_{xy} w)_x$$

$$f_{21}(w) = -[(z_{xx} + \nu z_{yy})\, w]_x - (1-\nu)(z_{xy} w)_y \tag{3.1}$$

$$f_{12}(w_1, w_2) = -w_{1y} w_{2yy} - \nu w_{1x} w_{2xy} - \frac{1-\nu}{2}(w_{1y} w_{2xx} + w_{1x} w_{2xy})$$

$$f_{22}(w_1, w_2) = -w_{1x} w_{2xx} - \nu w_{1y} w_{2xy} - \frac{1-\nu}{2}(w_{1y} w_{2xy} + w_{1x} w_{2xy})$$

Заметим, что соотношения (3.1) вместе с первым уравнением из (1.1) и краевыми условиями 3) или 4) в (1.2) составляют полную систему уравнений среднего изгиба оболочек, записанную в перемещениях [2,3].

Асимптотические разложения для F и w строятся, как и раньше, в виде (2.1), а для u и v — в виде

$$u \sim \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i u_i + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i+1} \eta_i, \qquad v \sim \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i v_i + \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i+1} \zeta_i \tag{3.2}$$

В результате первого итерационного процесса из (1.1) для определения F_0, w_0 имеем (1.3), а для u_0, v_0 — систему

$$\begin{gathered} v_{0y} + z_{yy} w_0 + {}^1/_2\, w^2{}_{0y} + \nu\,(u_{0x} + z_{xx} w_0 + {}^1/_2\, w_{0x}{}^2) = 0 \\ u_{0x} + z_{xx} w_0 + {}^1/_2\, w_{0x}{}^2 + \nu\,(v_{0y} + z_{yy} w_0 + {}^1/_2\, w_{0y}{}^2) = 0 \\ u_{0y} + v_{0x} + 2 z_{xy} w_0 + w_{0x} w_{0y} = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

Для определения F_i, w_i получаем (2.4), а для u_i, v_i — системы ($i \geqslant 1$)

$$\begin{gathered} F_{i-2,\,xx} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[v_{iy} + z_{yy} w_i + \frac{1}{2} \sum_{k+m=i} (w_{ky} w_{my} + \nu w_{kx} w_{mx}) + \nu u_{ix} + \nu z_{xx} w_i\right] \\ F_{i-2,\,xy} = \frac{-1}{2(1+\nu)}\left[u_{iy} + v_{ix} + 2 z_{xy} w_i + \sum_{k+m=i} w_{kx} w_{my}\right] \quad (F_{-1} \equiv 0) \\ F_{i-2,\,yy} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[u_{ix} + z_{xx} w_i + \frac{1}{2} \sum_{k+m=i} (w_{kx} w_{mx} + \nu w_{ky} w_{my}) + \nu v_{iy} + \nu z_{yy} w_i\right] \end{gathered} \tag{3.4}$$

Аналогично выводу (3.1) для u_0, v_0 из (3.3) имеем

$$L_1(u_0, v_0) = f_{11}(w_0) + f_{12}(w_0, w_0), \qquad L_2(u_0, v_0) = f_{21}(w_0) + f_{22}(w_0, w_0) \tag{3.5}$$

а для u_i, v_i из (3.4) — систему

$$\begin{gathered} L_1(u_i, v_i) = f_{11}(w_i) + \sum_{k+m=i} f_{12}(w_k, w_m) \\ L_2(u_i, v_i) = f_{21}(w_i) + \sum_{k+m=i} f_{22}(w_k, w_m) \end{gathered} \tag{3.6}$$

Требуя, чтобы разложения (2.1) и (3.2) удовлетворяли на границе Г соотношениям 3) или 4) в (1.2), для систем (2.4) и (3.6) получаем краевые условия

$$w_i|_\Gamma = -g_{i-1}|_\Gamma, \quad u_i|_\Gamma = -\eta_{i-1}|_\Gamma, \quad v_i|_\Gamma = -\zeta_{i-1}|_\Gamma \tag{3.7}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots; \quad g_{-1} = \eta_{-1} = \zeta_{-1} \equiv 0)$$

Таким образом, чтобы определить w_i, u_i, v_i на каждом этапе надо знать значения на границе Г погранслойных функций g_{i-1}, η_{i-1}, ζ_{i-1}, которые определяются в результате второго итерационного процесса. Покажем, что

$$w_0 = u_0 = v_0 \equiv 0, \qquad w_1 = u_1 = v_1 \equiv 0 \tag{3.8}$$

Первое соотношение получается непосредственно из (3.7), (1.3) и (3.5). Для доказательства второго соотношения сначала найдем краевые условия

(3.7) при $i = 1$. Ниже (см. (3.17)) будет показано, что $g_0 = \eta_0 = \zeta_0 = 0$ и, следовательно, $w_1(s) = u_1(s) = v_1(s) = 0$ для $s \in \Gamma$. Тогда (3.8) вытекает из (2.4) и (3.6) при $i = 1$.

Далее, для определения u_2, v_2, w_2 имеем два уравнения из (3.6) при $i = 2$ и уравнение из (1.4), которое при помощи (3.4) при $i = 2$ записывается в виде

$$z_{xx}(u_{2x} + z_{xx}w_2 + \nu v_{2y} + \nu z_{yy}w_2) + z_{yy}$$

$$(v_{2y} + z_{yy}w_2 + \nu u_{2x} + \nu z_{xx}w_2) = q(1 - \nu^2) \qquad (3.9)$$

При этом краевые условия определяются из (3.7) при $i = 2$. Теперь, если u_2, v_2, w_2 найдены, вторые производные функции F_0 вычисляются по формулам (3.4) при $i = 2$. Заметим, что нахождение u_2, v_2, w_2, F_0 проводится одновременно с определением погранслойных функций h_1, g_1, ζ_1, η_1. Построение последующих членов первого итерационного процесса проводится аналогичным образом.

Перейдем ко второму итерационному процессу. Чтобы значительно упростить выкладки, будем сначала проводить второй итерационный процесс для функций h_i, g_i, временно предполагая, что функции F_i, w_i известны.

Тогда для определения h_0, g_0, как и в п. 2, получаем систему (2.7). Граничные условия при $t = 0$ для функций g_i получаются такие же, как и в (2.9). Чтобы получить граничные условия для h_i, воспользуемся соотношением для F на контуре Γ, которое легко следует из 3) или 4) в (1.2) (см. [2], стр. 158)

$$[F_{\rho\rho} - \nu F_{ss} + \varkappa\nu F_\rho]_\Gamma = 0 \qquad (3.10)$$

Используя (2.1) и замену $\rho = \varepsilon t$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, из (3.10) получаем

$$\left.\frac{\partial^2 h_0}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -R(F_{i-1}) - \left[\varkappa\nu\frac{\partial h_{i-1}}{\partial t} - \nu\frac{\partial^2 h_{i-2}}{\partial s^2}\right]_{t=0} \qquad (3.11)$$

$$R(F_i) = [F_{i\rho\rho} - \nu F_{iss} + \varkappa\nu F_{i\rho}]_\Gamma \qquad (i = 1, 2, \ldots n;\ h_{-1} \equiv 0)$$

Теперь при любой функции F_0 из (2.7), (2.9), (2.10) и (3.11) следует, что $h_0 = g_0 \equiv 0$. Тогда для h_1, g_1 из (2.5) приходим к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^4 h_1}{\partial t^4} + \varkappa c\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial^4 g_1}{\partial t^4} - \varkappa c\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} + f_1\varkappa\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.12)$$

$$c = c(s) = z_\rho|_\Gamma, \qquad f_1 = f_1(s) = [F_{0xx}\rho_y^2 + F_{0yy}\rho_x^2 - 2F_{0xy}\rho_x\rho_y]_\Gamma$$

с соответствующими 3), 4) в (1.2) краевыми условиями

$$3)\ \left.\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -R(F_0), \qquad \{h_1, g_1\}_\infty \to 0$$

$$4)\ \left.\frac{\partial g_1}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -R(F_0), \qquad \{h_1, g_1\}_\infty \to 0 \qquad (3.13)$$

Решения этих задач выписываются в явном виде

$$3)\ \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{B}{2ab}\left[a\left(1+\frac{1}{2}Q\right)x^{(1)} + b\left(1+\frac{1}{2}Q\right)y^{(1)}\right]$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} = \frac{B}{2ab}\left[ax^{(1)} + by^{(1)}\right] \tag{3.14}$$

$$4)\ \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{B}{b}\left[\frac{1}{4}Qx^{(1)} - 2aby^{(1)}\right], \qquad \frac{\partial g_1}{\partial t} = \frac{B}{b}x^{(1)}$$

Здесь

$$x^{(1)} = e^{-a\tau}\sin b\tau, \qquad y^{(1)} = e^{-a\tau}\cos b\tau, \qquad \tau = (\varkappa c)^{1/2}t$$

$$a = \left(\frac{4-Q}{8}\right)^{1/2}, \qquad b = \left(\frac{4+Q}{8}\right)^{1/2}, \qquad c = z_\rho|_\Gamma, \qquad Q = 2f_1c_1^{-1}$$

$$f_1 = [F_{0ss} - \varkappa F_{0\rho}]_\Gamma, \qquad c_1 = [z_{ss} - \varkappa z_\rho]_\Gamma$$

$$B = -(\varkappa c^3)^{1/2}[F_{0\rho\rho} - \nu F_{0ss} + \varkappa\nu F_{0\rho}]_\Gamma = -(\varkappa c^3)^{1/2}R(F_0)$$

Функции h_i, g_i ($i \geqslant 1$) определяются из уравнений вида (3.12), но неоднородных. Формулы (3.14) справедливы только при $Q < 4$.

Далее перейдем к построению погранслойных функций ζ_i, η_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$). Для этого подставляем (2.1), (3.2) в уравнения (1.1), учитываем (3.3), (3.4) и переходим в полученных выражениях к локальным координатам (ρ, φ). Вместе с (2.4) получаем

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+3}h_{i,xy} = -\frac{1}{2(1+\nu)}\left\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+1}(\eta_{i\rho}\rho_y + \eta_{i\varphi}\varphi_y + \zeta_{i\rho}\rho_y + \zeta_{i\varphi}\varphi_y + z_{xy}g_i) + \right.$$
$$+ \sum_{k+m=0}\varepsilon^{k+m+1}[w_{k,x}(g_{m\rho}\rho_y + g_{m\varphi}\varphi_y) + w_{k,y}(g_{m\rho}\rho_x + g_{m\varphi}\varphi_x) +$$
$$\left. + \varepsilon(g_{k\rho}\rho_x + g_{k\varphi}\varphi_x)(g_{m\rho}\rho_x + g_{m\varphi}\varphi_x)]\right\} + O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+3}h_{i,xx} = \frac{1}{1-\nu^2}[e_1 + \nu e_2] + O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+3}h_{i,yy} = \frac{1}{1-\nu^2}[e_2 + \nu e_1] + O(\varepsilon^{n+1}) \tag{3.15}$$

Здесь

$$e_1 = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+1}(\zeta_{i\rho}\rho_y + \zeta_{i\varphi}\varphi_y + z_{yy}g_i) + \sum_{k+m=0}\varepsilon^{k+m+1}\left(w_{k,y} + \frac{\varepsilon}{2}g_{k\rho}\rho_y + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{2}g_{k\varphi}\varphi_y\right)(g_{m\rho}\rho_y + g_{m\varphi}\varphi_y)$$

$$e_2 = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i+1}(\eta_{i\rho}\rho_x + \eta_{i\varphi}\varphi_x + z_{xx}g_i) + \sum_{k+m=0}\varepsilon^{k+m+1}\left(w_{k,x} + \frac{\varepsilon}{2}g_{k\rho}\rho_x + \right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{2}g_{k\varphi}\varphi_x\right)(g_{m\rho}\rho_x + g_{m\varphi}\varphi_x)$$

$$h_{xy} = h_{\rho\rho}\rho_x\rho_y + h_{\rho\varphi}(\rho_x\varphi_y + \rho_y\varphi_x) + h_{\varphi\varphi}\varphi_x\varphi_y + h_\rho\rho_{xy} + h_\varphi\varphi_{xy}$$

Теперь в (3.15) разлагаем известные функции и их производные в ряды Тейлора в окрестности $\rho = 0$, полагаем $\rho = \varepsilon t$, собираем коэффициенты

при одинаковых степенях ε и полученные выражения при $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n$ приравниваем нулю.

При коэффициенте ε^0 для определения η_0, ζ_0 получаем систему

$$\zeta_{0t}\rho_x + \eta_{0t}\rho_y + g_{0t}(w_{0x}\rho_y + w_{0y}\rho_x) + g_{0t}^2\rho_x\rho_y = 0$$
$$\zeta_{0t}\rho_y + \nu\eta_{0t}\rho_x + g_{0t}(w_{0y}\rho_y + \nu w_{0x}\rho_x) + {}^1/_2\, g_{0t}^2(\rho_y^2 + \nu\rho_x^2) = 0 \tag{3.16}$$
$$\nu\zeta_{0t}\rho_y + \eta_{0t}\rho_x + g_{0t}(w_{0x}\rho_x + \nu w_{0y}\rho_y) + {}^1/_2\, g_{0t}^2(\rho_x^2 + \nu\rho_y^2) = 0$$

Покажем, что

$$g_0 = \eta_0 = \zeta_0 \equiv 0, \qquad \eta_1 = \zeta_1 = 0 \tag{3.17}$$

Первое соотношение следует из уже доказанного факта, что $g_0 = 0$, (3.16) и условий $\{\zeta_0, \eta_0\}_\infty \to 0$. Затем приравнивая нулю коэффициент при ε^1 в (3.15), для доказательства второго соотношения имеем

$$\rho_x^2 h_{0tt} = \frac{1}{1-\nu^2}(\zeta_{1t}\rho_y + \nu\eta_{1t}\rho_x), \qquad \rho_y^2 h_{0tt} = \frac{1}{1-\nu^2}(\eta_{1t}\rho_x + \nu\zeta_{1t}\rho_y),$$
$$-\rho_x\rho_y h_{0tt} = \frac{1}{2(1+\nu)}(\zeta_{1t}\rho_x + \eta_{1t}\rho_y)$$

Отсюда в силу того, что $h_0 = 0$ и условий $\{\zeta_1, \eta_1\}_\infty \to 0$ следует (3.17).

Из второго соотношения в (3.17) при помощи (3.7) определяем граничные условия для системы (3.6) при $i = 2$: $u_2(s) = v_2(s) = 0$ при $s \in \Gamma$. Тогда из (3.6) при $i = 2$ и (3.9) находятся u_2, v_2, w_2, а по формулам (3.4) при $i = 2$ — вторые производные функции F_0. Далее, приравнивая нулю коэффициент при ε^2 в (3.15) и учитывая (3.17) для определения η_2, ζ_2, получаем систему линейных уравнений

$$\rho_x^2 h_{1tt} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[\zeta_{2t}\rho_y + z_{yy}g_1 + \nu\eta_{2t}\rho_x + \nu g_1 z_{xx} + \frac{1}{2}g_{1t}^2(\rho_y^2 + \nu\rho_x^2)\right]$$
$$\rho_y^2 h_{1tt} = \frac{1}{1-\nu^2}\left[\eta_{2t}\rho_x + z_{xx}g_1 + \nu\zeta_{2t}\rho_y + \nu g_1 z_{yy} + \frac{1}{2}g_{1t}^2(\rho_x^2 + \nu\rho_y^2)\right]$$
$$-\rho_x\rho_y h_{1tt} = \frac{1}{2(1+\nu)}[\zeta_{2t}\rho_x + \eta_{2t}\rho_y + 2z_{xy}g_1 + g_{1t}^2\rho_x\rho_y]$$

с краевыми условиями $\{\zeta_2, \eta_2\}_\infty \to 0$. Здесь h_1 и g_1 уже известны из (3.14).

Погранслойные функции ζ_i, η_i $(i > 2)$ определяются аналогичным образом.

Отметим, что из (3.12) и (3.16) можно вывести формулы геометрического метода А. В. Погорелова для строго выпуклых оболочек (см. [1], (гл. V).

Введем параметр нагрузки [8], определяя его формулой

$$\sigma = \max_{s\in\Gamma} Q = \max_{s\in\Gamma}[2f_1c_1^{-1}] = \max_{s\in\Gamma}[2c_1^{-1}Lq] \tag{3.18}$$
$$f_1 = [F_{0xx}\rho_y^2 + F_{0yy}\rho_x^2 - 2F_{0xy}\rho_x\rho_y]_\Gamma, \qquad c_1 = -\varkappa(s)z_\rho(s)$$

Здесь L — линейный оператор, определяемый соотношением $f_1 = Lq$.

Далее заметим, что формулы (3.14) справедливы только при $Q < 4$. При $Q = 4$ задачи (3.12), (3.13) не имеют решений, убывающих на бесконечности. Повторяя те же рассуждения, что и в п. 4 работы [8], получаем в случае краевых условий 3) и 4) в (1.2) асимптотическое значение верхней

критической нагрузки

$$\sigma_0 = Q^* = 4 \tag{3.19}$$

Пользуясь соотношениями (2.15), можно построить последующие члены разложения по степеням ε для значения верхней критической нагрузки.

Таким образом, переходя к размерным переменным, приходим к следующему результату.

Пусть z, q и F_0 — достаточно гладкие функции в $D + \Gamma$. Тогда для очень тонких оболочек с условиями закрепления края 3), 4) в (1.2) значения верхней критической нагрузки определяются формулой

$$P_j^* = \frac{Eh^2}{\gamma a^2}\sigma_j^* = \max_{s\in\Gamma}[2c_1^{-1}Lp^*] =$$
$$= \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\left(\frac{h}{a}\right)^2[1 + a_{1j}\varepsilon + a_{2j}\varepsilon^2 + \ldots], \qquad j = 3, 4$$

Здесь индексы 3, 4 соответствуют краевым условиям 3), 4) в (1.2), a — характерный размер области D, L — линейный оператор, определяемый формулой $f_1 = Lq$ (коэффициенты a_{ij} в работе не найдены).

4. Эллипсоидальная оболочка при равномерном внешнем давлении. Пусть исходная срединная поверхность оболочки и параметрические уравнения контура Г задаются в виде

$$z = 1 - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2), \qquad X = \sqrt{\frac{2}{k_1}}\cos\varphi \tag{4.1}$$
$$Y = \sqrt{\frac{2}{k_2}}\sin\varphi, \quad k_1 = \frac{a}{R_1} > 0, \quad k_2 = \frac{a}{R_2} > 0, \quad z|_\Gamma = 0$$

В случае краевых условий 1), 2) в (1.2) для определения F_0 из (2.3) находим

$$k_2F_{0xx} + k_1F_{0yy} + q = 0, \qquad F_0|_\Gamma = 0$$

Нетрудно угадать решение этой задачи. В результате имеем

$$F_0 = \frac{1}{4}\frac{q}{k_1k_2}(2 - k_1x^2 - k_2y^2)$$

Используя (2.6), выводим

$$f = F_{0\rho}|_\Gamma = {}^1/_2 q(\varkappa k_1k_2)^{-1}[k_1\rho_y^2 + k_2\rho_x^2]_\Gamma, \qquad c = z_\rho|_\Gamma =$$
$$= \varkappa^{-1}[k_1\rho_y^2 + k_2\rho_x^2]_\Gamma, \qquad \sigma = q/k_1k_2$$

Тогда при помощи (2.14) для случаев 1), 2) в (1.2) имеем

$$1)\ \sigma_0 = q_0/k_1k_2 = 0.793, \qquad 2)\ \sigma_0 = q_0/k_1k_2 = 1.766$$

Отсюда, переходя к размерным переменным для асимптотического значения верхнего критического давления, соответственно получаем

$$1)\ p_0 = \frac{0.3965}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{h^2}{R_1R_2}, \qquad 2)\ p_0 = \frac{0.883}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}\frac{h^2}{R_1R_2} \tag{4.2}$$

В случае краевых условий 3) и 4) в (1.2) для определения F_0 воспользуемся формулами п. 3. Применяя (4.1), из (3.9) имеем

$$w_2 = [q(1-\nu^2) + (k_2 + \nu k_1)v_{2y} + (k_1 + \nu k_2)u_{2x}](k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1k_2)^{-1}$$

Подставляя w_2 в (3.6) при $i = 2$ и учитывая граничные условия $v_2(s) = u_2(s) = 0$ $(s \in \Gamma)$, выводим $v_2(x, y) = u_2(x, y) = 0$. Тогда из (3.4) при $i = 2$ следует

$$w_2 = q(1 - \nu^2) K, \qquad F_{0xx} = -q(k_2 + \nu k_1) K$$
$$F_{0yy} = -q(k + \nu k_2) K, \qquad F_{0xy} = 0, \qquad K = (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2)^{-1} \tag{4.3}$$

Используя (4.3), а также соотношение

$$[\psi_{\rho\rho} - \nu\psi_{ss} + \varkappa\nu\psi_\rho]_\Gamma = [(\psi_{xx} - \nu\psi_{yy})\rho_x^2 + (\psi_{yy} - \nu\psi_{xx})\rho_y^2 + 2(1+\nu)\psi_{xy}\rho_x\rho_y]_\Gamma$$

получаем

$$R(F_0) = -q(1 - \nu^2) K [k_2\rho_x^2 + k_1\rho_y^2]_\Gamma, \qquad c_1 = -[k_1\rho_y^2 + k_2\rho_x^2]_\Gamma \tag{4.4}$$
$$f_1 = -qK [\rho_y^2 (k_2 + \nu k_1) + \rho_x^2 (k_1 + \nu k_2)]_\Gamma$$

Теперь h_1, g_1 полностью определяются формулами (3.14). В частности в обоих случаях 3) и 4) имеем

$$g_1(0) = -q(1 - \nu^2) K = w_2(s) \qquad (s \in \Gamma)$$

т. е. первое условие в (3.7) при $i = 2$ выполняется.

Далее, учитывая (2.6) и (4.4), согласно (3.18), определяем параметр нагрузки

$$\sigma = \max_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \left[\frac{2qK}{k_1 k_2} (k_2^2 \sin^2\varphi + k_1^2 \cos^2\varphi + \nu k_1 k_2)\right] = \frac{2q(1 + \nu\alpha)}{k_1 k_2 (1 + 2\nu\alpha + \alpha^2)}$$

$$\alpha = k_1 / k_2, \quad \text{если } k_2 > k_1 \text{ и } \alpha = k_2 / k_1, \text{ если } k_1 > k_2$$

Тогда при помощи (3.19) имеем

$$\sigma_0 = \frac{2q_0(1 + \nu\alpha)}{k_1 k_2 (1 + 2\nu\alpha + \alpha^2)} = 4, \qquad \alpha = \frac{\min(R_1, R_2)}{\max(R_1, R_2)} \leqslant 1$$

Отсюда, переходя к безразмерным переменным, для асимптотического значения верхнего критического давления в случае краевых условий 3) и 4) в (1.2) получаем

$$p_0 = \frac{AE}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{h^2}{R_1 R_2}, \qquad A = \frac{1 + 2\nu\alpha + \alpha^2}{1 + \nu\alpha} \tag{4.5}$$

Итак, для достаточно тонких упругих эллипсоидальных оболочек при равномерном внешнем давлении и краевых условиях (1.2) значения верхнего критического давления определяются формулой

$$p_j^* = \frac{\alpha_j E}{\sqrt{3(1 - \nu^2)}} \frac{h^2}{R_1 R_2} [1 + a_{1j}\varepsilon + a_{2j}\varepsilon^2 + \ldots] \tag{4.6}$$
$$j = 1, 2, 3, 4, \qquad \alpha_1 = 0.3965, \qquad \alpha_2 = 0.883$$
$$\alpha_3 = \alpha_4 = (1 + 2\nu\alpha + \alpha^2)(1 + \nu\alpha)^{-1}, \qquad \alpha = \frac{\min(R_1, R_2)}{\max(R_1, R_2)}$$

Здесь индексы $j = 1 - 4$ соответствуют краевым условиям 1)—4) в (1.2). (Коэффициенты a_{1j}, a_{2j}, ... в работе не найдены.)

Если в 3), 4) из (1.2) вместо условий $u(s) = v(s) = 0$ взять условия $F|_\Gamma = 0$, $e_n|_\Gamma = 0$ (e_n — перемещение в направлении нормали к контуру Г), то для p_0 получается формула (4.5), где $A = 2$. В этом случае значение p_0 было раньше выведено А. В. Погореловым геометрическими методами (см. [1], стр. 145), а в [10] проведено исследование влияния на p_0 несовершенства закрепления края.

Соответствующие разложения (2.1) и (3.2) описывают асимптотическое поведение эллипсоидальной оболочки в докритической стадии. В основном оболочка деформируется как жесткое тело и только вблизи края наблюдается сильное изменение напряжений, моментов и т. д. Процесс прощелкивания оболочки начинается в зоне краевого эффекта, причем в случае краевых условий 1), 2) в (1.2) это происходит сразу вдоль всего опорного контура, а в случае 3), 4) в (1.2) начинается с образования серповидных вмятин в окрестности вершин малой оси эллипса D.

Полагая $R_1 = R_2 = R$, из (4.6) получаем асимптотическое значение верхнего критического давления сферической оболочки

$$p_j^* = \frac{\alpha_j E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R}\right)^2 [1 + a_{1j}\varepsilon + a_{2j}\varepsilon^2 + \ldots] \tag{4.7}$$

$$\alpha_1 = 0.3965, \qquad \alpha_2 = 0.883, \qquad \alpha_3 = \alpha_4 = 2$$

т. е. совпадает со значениями, найденными по осесимметричной теории [8].

В работах [11–14] показано, что потеря устойчивости тонкой сферической оболочки при равномерном внешнем давлении может происходить по несимметричной форме, причем с уменьшением значения параметра ε увеличивается номер n гармоники, соответствующей минимальной критической нагрузке. Формула (4.7) приводит к выводу, что достаточно тонкие сферические оболочки ($\varepsilon \to 0$) при равномерном внешнем давлении теряют устойчивость по осесимметричной форме[1].

Однако формула (4.7) при $j = 4$ находится в противоречии с асимптотическим значением p_H^* — верхнего критического давления потери устойчивости по несимметричной форме, найденным в [11]

$$p_H^* = 0.864 p_4^*, \qquad \text{если } \frac{n^2 R h}{a^2 \sqrt{12(1-\nu^2)}} \to (0.817)^2 \tag{4.8}$$

Здесь необходимо отметить следующее. Все выводы данной работы (в том числе и формула (4.7)) получены в предположении, что при $\varepsilon \to 0$ изменения решений в направлении нормали к контуру Г (в пограничном слое) имеют более высокий порядок относительно ε^{-1}, чем вдоль Г. Более того, нетрудно показать, что формула (4.7) для случаев $j = 3,4$ имеет место при условии $\varepsilon^{2-\alpha} n^2 = O(1)$, $0 < \alpha \leqslant 2$ ($\varepsilon \to 0$, $n \to \infty$). Что касается результата (4.8), то он кажется очень сомнительным. Метод его получения содержит много необоснованных допущений (например отбрасываются функции пограничного слоя для радиального усилия в осесимметричном решении).

Автор благодарит И. И. Воровича, В. И. Юдовича и Л. Б. Царюка за внимание к работе.

---

[1] А. В. Погорелов. Доклад на Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Ростов-на-Дону, 1971.

Поступила 28 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Погорелов А. В. Геометрические методы в нелинейной теории упругих оболочек. М., «Наука», 1967.
2. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем, изд. 2. М., «Наука», 1967.
4. Срубщик Л. С., Юдович В. И. Асимптотическое интегрирование системы уравнений большого прогиба симметрично загруженных оболочек вращения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
5. Срубщик Л. С. Об асимптотическом интегрировании системы нелинейных уравнений теории пластин. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
6. Ворович И. И., Срубщик Л. С. Асимптотический анализ общих уравнений нелинейной теории пологих оболочек. Тр. 7 Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. (Днепропетровск, 1969.) М., «Наука», 1970.
7. Срубщик Л. С. К вопросу о нежесткости в нелинейной теории пологих оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1972, № 4.
8. Срубщик Л. С. Асимптотический метод определения критических нагрузок потери устойчивости пологих строго выпуклых оболочек вращения. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, № 5 (77).
10. Погорелов А. В. О влиянии несовершенства закрепления края оболочки на потерю устойчивости. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 2.
11. Хаун Най-Чэн. Несимметричная потеря устойчивости тонких пологих сферических оболочек. Прикл. механ. Тр. Армерик о-ва инж.-механ., 1964, № 3.
12. Арчер, Фемили. О колебаниях и устойчивости пологих сферических оболочек при конечных перемещениях. Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1965, № 1.
13. Герлаку И. Д., Шилькрут Д. И. Определение бифуркационных значений нагрузки для осесимметрично нагруженных оболочек вращения с учетом несимметричных деформаций. Изв. АН СССР, МТТ, 1970, № 2.
14. Валишвили И. В. Неосесимметричное деформирование и устойчивость пологих оболочек вращения. В сб.: Теория пластин и оболочек. М. «Наука», 1971.