Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

К МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

С. А. Амбарцумян, Г. Е. Багдасарян, М. В. Белубекян

(Ереван)

Рассматриваются некоторые вопросы магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластин и оболочек, находящихся в стационарном магнитном поле. На основании решений, получаемых методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений магнитоупругости, формулируются гипотезы относительно характера изменения электромагнитного поля и упругих перемещений по толщине оболочки. Это позволяет свести трехмерные уравнения магнитоупругости к двумерным, что существенно облегчает исследование вопросов магнитоупругости тонких тел.

Задача исследования магнитоупругих колебаний электропроводящей оболочки в магнитном поле сводится к совместному решению уравнений магнитоупругости в области, занимаемой оболочкой, и уравнений электродинамики вне тела оболочки. Уравнения магнитоупругости состоят из уравнений движения упругой среды с учетом сил электромагнитного происхождения (силы Лоренца) и уравнений электродинамики движущейся электропроводной среды [1-3].

1. Пусть изотропная тонкая оболочка постоянной толщины $2h$, изготовленная из материала с конечной электропроводностью, находится в стационарном магнитном поле с заданным вектором магнитной индукции. Принимается, что магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей оболочку, равны единице, т. е. принимается, что оболочка находится в вакууме.

Упругие и электромагнитные свойства материала оболочки характеризуются модулем упругости E, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ, магнитной проницаемостью μ, диэлектрической проницаемостью ε. Считается, что все приведенные выше величины не зависят от координат, времени и электромагнитного поля.

Пусть оболочка отнесена к триортогональной системе координат α, β, γ (α и β совпадают с линиями кривизны срединной поверхности). Геометрия срединной поверхности оболочки такова, что коэффициенты первой квадратичной формы $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$ и главные кривизны $k_1(\alpha, \beta)$, $k_2(\alpha, \beta)$ постоянны или при дифференцировании ведут себя как постоянные с требуемой точностью [4-6].

Принимается также, что упругие перемещения оболочки и электромагнитные возмущения настолько малы, что при рассмотрении поставленной задачи можно пользоваться линейными уравнениями.

Одновременно считается, что задача магнитостатики для невозбужденного состояния решена. Известны векторы магнитной индукции для внешней $\mathbf{B}_0^{(e)}(B_{0\alpha}^{(e)}, B_{0\beta}^{(e)}, B_{0\gamma}^{(e)})$ и внутренней $\mathbf{B}_0^{(i)}(B_{0\alpha}^{(i)}, B_{0\beta}^{(i)}, B_{0\gamma}^{(i)})$ областей, т. е. считается, что $\mathbf{B}_0^{(e)}$ и $\mathbf{B}_0^{(i)}$ удовлетворяют известным уравнениям и условиям на поверхности раздела двух областей [1,2]

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \tag{1.1}$$

$$[\mathbf{B}_0^{(e)} - \mathbf{B}_0^{(i)}] \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad [\mathbf{H}_0^{(e)} - \mathbf{H}_0^{(i)}] \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{H}_0^{(e)} = \mathbf{B}_0^{(e)}$, $\mathbf{H}_0^{(i)} = \mu^{-1} \mathbf{B}_0^{(i)}$ — векторы напряженности магнитного поля соответственно для внешней и внутренней областей, $\mathbf{n}$— вектор нормали к поверхности оболочки (поверхности раздела).

Уравнения электродинамики для движущейся среды принимаются в виде [1,2]:

во внутренней области (внутри тела оболочки)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(i)} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[\mathbf{E}^{(i)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \times \mathbf{B}^{(i)} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(i)}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(i)}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(i)} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{D}^{(i)} = 0 \tag{1.3}$$

во внешней области (остальное пространство, где имеем вакуум)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(e)} = 0, \ \operatorname{div} \mathbf{D}^{(e)} = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ — соответственно векторы напряженности и индукции электрического поля, $\mathbf{U}$ $(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)$ — вектор перемещения частиц оболочки, c — скорость света в вакууме.

Предполагая, что электромагнитное поле во времени изменяется не слишком быстро, связь между векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в системе координат, привязанной к движущейся поверхности раздела двух сред, примем в виде

$$\mathbf{B}_*^{(i)} = \mu \mathbf{H}_*^{(i)}, \quad \mathbf{B}_*^{(e)} = \mathbf{H}_*^{(e)}, \quad \mathbf{D}_*^{(e)} = \mathbf{E}_*^{(e)}, \quad \mathbf{D}_*^{(i)} = \varepsilon \mathbf{E}_*^{(i)} \tag{1.5}$$

Это означает также, что из рассмотрения исключаются, в частности оболочки, изготовленные из сверхпроводников, сегнетоэлектриков и ферромагнетиков.

На поверхности раздела двух сред, очевидно, будут следующие условия:

$$[\mathbf{B}_*^{(e)} - \mathbf{B}_*^{(i)}] \cdot \mathbf{n}_* = 0, \qquad [\mathbf{H}_*^{(e)} - \mathbf{H}_*^{(i)}] \cdot \mathbf{n}_* = 0 \tag{1.6}$$

$$[\mathbf{D}_*^{(e)} - \mathbf{D}_*^{(i)}] \cdot \mathbf{n}_* = 0, \qquad [\mathbf{E}_*^{(e)} - \mathbf{E}_*^{(i)}] \cdot \mathbf{n}_* = 0$$

Здесь $\mathbf{n}_*$ — вектор нормали к поверхности раздела в подвижной системе координат.

Векторы, характеризующие рассматриваемое электромагнитное поле в подвижной системе координат, отмеченные звездочкой, выражаются через соответствующие векторы неподвижной системы координат α, β, γ по формулам [1,2]

$$\mathbf{B}_* = \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{E}, \qquad \mathbf{H}_* = \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{D}$$

$$\mathbf{E}_* = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}, \qquad \mathbf{D}_* = \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{H} \tag{1.7}$$

Здесь $\mathbf{v}_n$ — вектор скорости перемещения поверхности раздела в направлении нормали, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности раздела в неподвижной системе координат (α, β, γ).

2. Как было указано выше, ограничимся исследованием магнитоупругих колебаний при малых возмущениях. Принимая для компонент возмущенного электромагнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \qquad \mathbf{E} = \mathbf{e} \tag{2.1}$$

и учитывая, что компоненты индуцированного электромагнитного поля $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma$ и $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ малы, линеаризуем уравнения (1.3). После некоторых преобразований задача сводится к совместному интегрированию следующих систем линейных дифференциальных уравнений (здесь и в последующем индексы i опускаются, $\mathbf{k}$ — единичный вектор в направлении координатной линии γ).

Во внутренней области:

уравнения электродинамики

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\times \mathbf{B}_0\right] + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c^2}\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial t^2}\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{e} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{div}\left(\mathbf{e} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu c}\frac{\partial u_\gamma}{\partial t}\mathbf{k}\times\mathbf{B}_0\right) = 0 \tag{2.2}$$

уравнения движения элемента упругого тела оболочки

$$H_2\frac{\partial\sigma_\alpha}{\partial\alpha} + H_1\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\beta} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1^2H_2\tau_{\alpha\gamma}) = \rho\frac{\partial^2u_\alpha}{\partial t^2} - R_\alpha H_1H_2 \tag{2.3}$$

$$H_1\frac{\partial\sigma_\beta}{\partial\beta} + H_2\frac{\partial\tau_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2^2\tau_{\beta\gamma}) = \rho\frac{\partial^2u_\beta}{\partial t^2} - R_\beta H_1H_2$$

$$H_2\frac{\partial\tau_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha} + H_1\frac{\partial\tau_{\beta\gamma}}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2\sigma_\gamma) - \sigma_\alpha H_2\frac{\partial H_1}{\partial\gamma} - \sigma_\beta H_1\frac{\partial H_2}{\partial\gamma} =$$

$$= \rho\frac{\partial^2u_\gamma}{\partial t^2} - R_\gamma H_1H_2$$

$$H_1 = A\,(1 + k_1\gamma), \qquad H_2 = B\,(1 + k_2\gamma)$$

Здесь H_1, H_2 — коэффициенты Ламе, $\mathbf{R}\,(R_\alpha, R_\beta, R_\gamma)$ — силы электромагнитного происхождения, которые определяются следующим образом [3]:

$$\mathbf{R} = \frac{\sigma}{c}\left(\mathbf{e} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0\right)\times\mathbf{B}_0 \tag{2.4}$$

Во внешней области:

уравнение электродинамики для вакуума

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(e)} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{h}^{(e)} = 0 \tag{2.5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{e}^{(e)} = 0$$

Таким образом, задача магнитоупругих колебаний тонкой оболочки свелась к совместному интегрированию систем уравнений (2.2), (2.3) и (2.5). К приведенным уравнениям, очевидно, должны быть присоединены условия на поверхностях оболочки для электромагнитного поля, которые получаются из условий (1.7) путем линеаризации

$$h_\gamma = \frac{1}{\mu} h_\gamma^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0\alpha}^{(e)} \frac{1}{A} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0\beta}^{(e)} \frac{1}{B} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \beta}$$

$$h_\alpha = h_\alpha^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0\gamma}^{(e)} \frac{1}{A} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \alpha}, \quad h_\beta = h_\beta^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0\gamma}^{(e)} \frac{1}{B} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \beta} \tag{2.6}$$

$$e_\gamma = \frac{1}{\varepsilon} e_\gamma^{(e)}, \quad e_\alpha = e_\alpha^{(e)} + \frac{\mu - 1}{c} B_{0\beta}^{(e)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}, \quad e_\beta = e_\beta^{(e)} - \frac{\mu - 1}{c} B_{0\alpha}^{(e)} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}$$

Наконец, сюда должны быть присоединены также граничные условия на торцах оболочки и условия затухания электромагнитных возмущений на бесконечности.

3. К системе уравнений (2.2) и (2.3) применим метод асимптотического интегрирования, ограничиваясь построением лишь основного итерационного процесса [7-9].

Как известно, основной итерационный процесс позволяет определить медленно затухающую часть решения, которая, например в случае задачи изгиба оболочки, дает возможность в первом приближении найти то напряженное состояние, которым характеризуется классическая теория оболочки. Таким образом, первое приближение основного итерационного процесса трехмерную задачу теории упругости приводит к двумерной задаче теории оболочек, построенной согласно гипотезе недеформируемых нормалей [7, 8].

Следуя [7-9], принимаем, что напряженности индуцированного в оболочке электромагнитного поля, ввиду тонкостенности оболочки, по переменным α, β (в срединной поверхности) изменяются медленно, а по переменной γ (по толщине оболочки) изменяются быстро.

Растягивая масштаб по переменной γ, согласно формуле

$$\gamma = h\zeta \tag{3.1}$$

и имея в виду (1.5) (электромагнитное поле во времени изменяется не слишком быстро) и (3.1), принимаем, что по всем четырем переменным α, β, ζ, t быстрота изменения напряженности индуцированного в оболочке магнитного и электрического полей не слишком велика.

В дальнейшем выкладки, связанные с асимптотическим интегрированием уравнений (2.3), не приводятся, так как принимается, что результаты работы [8] справедливы и для рассматриваемой задачи.

Учитывая (3.1), линеаризованные уравнения (2.2) перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \beta} - h^{-1} \frac{\partial h_\beta}{\partial \zeta} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_\alpha + \frac{1}{c} \left(B_{0\gamma} \frac{\partial u_\beta}{\partial t} - B_{0\beta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_\alpha}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2\mu} B_{0\beta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial t^2},$$

$$h^{-1} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \zeta} - \frac{1}{A} \frac{\partial h_\gamma}{\partial \alpha} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_\beta + \frac{1}{c} \left(B_{0\alpha} \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} - B_{0\gamma} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_\beta}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2\mu} B_{0\alpha} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\gamma+\frac{1}{c}\left(B_{0\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial t}-B_{0\alpha}\frac{\partial u_\beta}{\partial t}\right)\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\gamma}{\partial t} \qquad (3.2)$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial e_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial e_\beta}{\partial \beta}+h^{-1}\frac{\partial e_\gamma}{\partial \zeta}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu c}\left(\frac{B_{0\alpha}}{B}\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \beta \partial t}-\frac{B_{0\beta}}{A}\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \alpha \partial t}\right)=0$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial e_\beta}{\partial \alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial e_\alpha}{\partial \beta}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\gamma}{\partial t}, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial e_\gamma}{\partial \beta}-h^{-1}\frac{\partial e_\beta}{\partial \zeta}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\alpha}{\partial t}$$

$$(3.3)$$

$$h^{-1}\frac{\partial e_\alpha}{\partial \zeta}-\frac{1}{A}\frac{\partial e_\gamma}{\partial \alpha}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\beta}{\partial t}, \qquad \frac{1}{A}\frac{\partial h_\alpha}{\partial \alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial h_\beta}{\partial \beta}+h^{-1}\frac{\partial h_\gamma}{\partial \zeta}=0$$

Запишем любую из компонент электромагнитного поля и перемещений оболочки в виде

$$Q=h^{-q}\sum_{s=1}^{S}h^{s-1}Q^{(s)} \qquad (3.4)$$

где q — целое число, различное для различных компонент электромагнитного поля и перемещений оболочки. Его надо подобрать так, чтобы после подстановки (3.4) в уравнении (3.2) и (3.3) и приравнивания в каждом уравнении нулю коэффициентов при одинаковых степенях h получалась непротиворечивая последовательность систем уравнений для определения коэффициентов разложений (3.4).

Многочисленные решения классических задач теории оболочек без учета электромагнитных явлений показывают, что в представлениях перемещений по формуле (3.4) показатель q может быть выбран следующим образом [8]:

$$(u_\alpha, u_\beta, u_\gamma)\to q=a \qquad (3.5)$$

Что же касается компонент возбуждаемого электромагнитного поля, то показатель q выбирается так:

$$(h_\alpha, h_\beta, e_\gamma)\to q=b, \qquad (h_\gamma, e_\alpha, e_\beta)\to q=b+1 \qquad (3.6)$$

Рассмотрение иных вариантов показателя q для компонент электромагнитного поля в представлении (3.4) приводит к противоречиям.

Для удобства введем новое обозначение $k=b-a+1$.

Подставив в уравнения (3.3) значения компонент электромагнитного поля оболочки из (3.4) с учетом (3.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h в каждом уравнении в отдельности, получим следующую единую (независимую от k) систему уравнений:

$$\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{1}{B}\frac{\partial e_\gamma^{(s-2)}}{\partial \beta}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\alpha^{(s-2)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial \zeta}=\frac{1}{A}\frac{\partial e_\gamma^{(s-2)}}{\partial \alpha}-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\beta^{(s-2)}}{\partial t}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial \alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial \beta}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial \zeta}=-\frac{1}{A}\frac{\partial h_\alpha^{(s-2)}}{\partial \alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial h_\beta^{(s-2)}}{\partial \beta} \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.2) после аналогичных преобразований с учетом (3.5) и (3.6) приводят к отличающимся друг от друга (для каждого значения k)

системам уравнений

$$\frac{1}{B}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\beta}-\frac{\partial h_\beta^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\alpha^{(s)}+\frac{1}{c}\left(B_{0\gamma}\frac{\partial u_\beta^{(s-k)}}{\partial t}-B_{0\beta}\frac{\partial u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial t}-\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}B_{0\beta}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial h_\alpha^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{1}{A}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\alpha}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\beta^{(s)}+\frac{1}{c}\left(B_{0\alpha}\frac{\partial u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t}-B_{0\gamma}\frac{\partial u_\alpha^{(s-k)}}{\partial t}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}B_{0\alpha}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial h_\beta^{(s)}}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial h_\alpha^{(s)}}{\partial\beta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\gamma^{(s)}+\frac{1}{c}\left(B_{0\beta}\frac{\partial u_\alpha^{(s-k+1)}}{\partial t}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-B_{0\alpha}\frac{\partial u_\beta^{(s-k+1)}}{\partial t}\right)\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\gamma^{(s)}}{\partial t} \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial\beta}+\frac{\partial e_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu c}\left(\frac{B_{0\alpha}}{B}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial\beta\partial t}-\frac{B_{0\beta}}{A}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial\alpha\partial t}\right)=0$$

Уравнения (3.7) совместно с уравнениями (3.8) составляют для каждого значения k в отдельности цепочку систем уравнений основного итерационного процесса, заключающегося в последовательном ($s=1, 2, 3, \ldots$) определении искомых $Q^{(s)}$. При этом надо считать, что величины $Q^{(s)}\equiv$ $\equiv 0$ при $s<1$, а также, что при построении $Q^{(s+1)}$ соответствующие величины $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \ldots, Q^{(s)}$ считаются известными.

Рассмотрим различные значения числа k.

Случай $k<0$, вероятно, не представляет интереса, так как в этом случае, согласно (3.8), либо все компоненты заданного (невозмущенного) магнитного поля должны быть равны нулю, либо приходим к противоречию, заключающемуся в наложении дополнительных ограничений на упругие перемещения.

В случае $k=0$ из уравнений (3.8) в первом приближении асимптотического интегрирования ($s=1$) получается

$$B_{0\beta}\frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial t}-B_{0\alpha}\frac{\partial u_\beta^{(1)}}{\partial t}=0 \tag{3.9}$$

Таким образом, случай $k=0$ возможен при удовлетворении условию (3.9), которое зависит как от скоростей колебаний, так и от величины заданного магнитного поля. Для нестационарной задачи вообще это может быть в том случае, когда $B_{0\alpha}=B_{0\beta}=0$, т. е. когда заданное магнитное поле перпендикулярно к срединной поверхности оболочки, иначе получается дополнительное ограничение на упругие перемещения. При этом, согласно (1.2), замечаем, что заданное магнитное поле должно быть постоянным в системе координат α, β, γ.

Принимая $B_{0\alpha}=B_{0\beta}=0$, из (3.8) для случая $k=0$ получим следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{B}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\beta}-\frac{\partial h_\beta^{(s)}}{\partial\zeta}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\alpha^{(s)}+\frac{1}{c}B_{0\gamma}\frac{\partial u_\beta^{(s)}}{\partial t}\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial t}\\
\frac{\partial h_\alpha^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{1}{A}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\alpha}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\beta^{(s)}-\frac{1}{c}B_{0\gamma}\frac{\partial u_\alpha^{(s)}}{\partial t}\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial t}\\
\frac{1}{A}\frac{\partial h_\beta^{(s)}}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial h_\alpha^{(s)}}{\partial\beta}=\frac{4\pi\sigma}{c}e_\gamma^{(s)}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\gamma^{(s)}}{\partial t}\\
\frac{1}{A}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial\beta}+\frac{\partial e_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta}=0
\end{gathered}
\qquad (3.10)
$$

Отсюда видно, что при $k=0$ в первом приближении уравнения электродинамики не отделяются от уравнений движения упругой оболочки.

В случае $k=1$ уравнения (3.8) показывают, что уже в первом приближении ($s=1$) уравнения электродинамики не отделяются от уравнений движения оболочки независимо от способа задания магнитного поля.

Легко заметить также, что при $k>1$ (показатель интенсивности электромагнитного поля значительно больше показателя интенсивности перемещений оболочки) в первом приближении компоненты электромагнитного поля могут быть определены независимо от упругих колебаний оболочки.

Отметим, что в случае $k<0$ показатель интенсивности электромагнитного поля значительно меньше показателя интенсивности перемещений оболочки, а в случаях $k=0$, $k=1$ они мало отличаются друг от друга.

Решения систем уравнений (3.7) и (3.8) представим в виде двух слагаемых: $Q^{(s)}=Q_i^{(s)}+Q^{*(s)}$. Под первым слагаемым подразумевается интеграл однородной системы, получающийся за счет отбрасывания величин с верхним индексом, меньшим s, а под вторым — какой-либо частный интеграл указанной системы, в которой все величины с верхним индексом, меньшим s, рассматриваются как известные.

Рассмотрим системы однородных уравнений. Для всех $k\geqslant 0$ те уравнения однородных систем, которые получаются из всех уравнений системы (3.7) и последних уравнений систем (3.8) и (3.10), являются общим и имеют вид

$$
\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial\zeta}=0,\qquad \frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta}=0 \qquad (3.11)
$$

$$
\frac{1}{A}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial\beta}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial t},\qquad \frac{1}{A}\frac{\partial e_\alpha^{(s)}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial e_\beta^{(s)}}{\partial\beta}+\frac{\partial e_\gamma^{(s)}}{\partial\zeta}=0
$$

Остальные уравнения однородных систем для различных значений числа k различны и получаются из пока еще не использованных уравнений соответствующих систем (3.8) и (3.10) в виде

$$
\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(s)}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mathbf{e}^{(s)}+\frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\partial\mathbf{U}^{(s)}}{\partial t}\times\mathbf{k}\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(s)}}{\partial t}\qquad (k=0) \qquad (3.12)
$$

$$
\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(s)}=\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\mathbf{e}^{(s)}+\frac{\delta_{is}}{c}\frac{\partial\mathbf{U}^{(s)}}{\partial t}\times\mathbf{B}_0\right]+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(s)}}{\partial t}\qquad (k=1) \qquad (3.13)
$$

$$
\operatorname{rot}\mathbf{h}^{(s)}=\frac{4\pi\sigma}{c}\mathbf{e}^{(s)}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{e}^{(s)}}{\partial t}\qquad (k>1) \qquad (3.14)
$$

Полученные таким образом системы однородных уравнений для каждого значения k интегрируются легко. При этом независимо от k, согласно (3.11), $e_{\alpha i}^{(s)}$, $e_{\beta i}^{(s)}$, $e_{\gamma i}^{(s)}$, $h_{\gamma i}^{(s)}$ имеют следующий вид:

$$e_{\alpha i}^{(s)} = e_{\alpha 0}^{(s)}(\alpha, \beta, t), \quad e_{\beta i}^{(s)} = e_{\beta 0}^{(s)}(\alpha, \beta, t), \quad h_{\gamma i}^{(s)} = h_{\gamma 0}^{(s)}(\alpha, \beta, t) \tag{3.15}$$

$$e_{\gamma i}^{(s)} = -\zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial e_{\alpha 0}^{(s)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial e_{\beta 0}^{(s)}}{\partial \beta}\right]$$

Согласно сказанному в начале п. 3, приведем также соответствующие выражения для перемещений [8]

$$u_{\gamma i}^{(s)} = u_{\gamma 0}^{(s)}(\alpha, \beta, t) = w_0^{(s)}(\alpha, \beta, t) \tag{3.16}$$

$$u_{\alpha i}^{(s)} = u_0^{(s)}(\alpha, \beta, t) - \frac{\zeta}{A}\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial \alpha}, \qquad u_{\beta i}^{(s)} = v_0^{(s)}(\alpha, \beta, t) - \frac{\zeta}{B}\frac{\partial w_0^{(s)}}{\partial \beta}$$

Теперь, используя (3.15) и (3.16), из уравнений (3.12) — (3.14) можно определить $h_{\alpha i}^{(s)}$ и $h_{\beta i}^{(s)}$, различные для различных k

$$h_{\alpha i}^{(s)} = \zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial h_{\gamma 0}^{(s)}}{\partial \alpha} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_{\beta 0}^{(s)} - \frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial t} + \frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\zeta}{2A}\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \alpha \partial t}\right) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_{\beta 0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

$$h_{\beta i}^{(s)} = \zeta\left[\frac{1}{B}\frac{\partial h_{\gamma 0}^{(s)}}{\partial \beta} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left(e_{\alpha 0}^{(s)} + \frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial t} - \frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\zeta}{2B}\frac{\partial^2 w_0^{(s)}}{\partial \beta \partial t}\right) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_{\alpha 0}^{(s)}}{\partial t}\right]$$

$$(k = 0) \qquad\qquad (k = 0)$$

$$h_{\alpha i}^{(s)} = \zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial h_{\gamma 0}^{(s)}}{\partial \alpha} + \frac{4\pi\sigma}{c}e_{\beta 0}^{(s)} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_{\beta 0}^{(s)}}{\partial t}\right] \tag{3.17}$$

$$h_{\beta i}^{(s)} = \zeta\left[\frac{1}{B}\frac{\partial h_{\gamma 0}^{(s)}}{\partial \beta} - \frac{4\pi\sigma}{c}e_{\alpha 0}^{(s)} - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_{\alpha 0}^{(s)}}{\partial t}\right] \quad (k \geqslant 1) \tag{3.18}$$

Найдем частные решения. Выражения $e_\alpha^{*(s)}$, $e_\beta^{*(s)}$, $h_\gamma^{*(s)}$ определяются из (3.7) независимо от k

$$e_\alpha^{*(s)} = \int_0^\zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial e_\gamma^{(s-2)}}{\partial \alpha} - \frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\beta^{(s-2)}}{\partial t}\right]d\zeta, \quad e_\beta^{*(s)} = \int_0^\zeta\left[\frac{1}{B}\frac{\partial e_\gamma^{(s-2)}}{\partial \beta} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial h_\alpha^{(s-2)}}{\partial t}\right]d\zeta$$

$$h_\gamma^{*(s)} = -\int_0^\zeta\left[\frac{1}{A}\frac{\partial h_\alpha^{(s-2)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial h_\beta^{(s-2)}}{\partial \beta}\right]d\zeta \tag{3.19}$$

Остальные величины определяются по формулам

$$\begin{gathered} h_\alpha^{*(s)} = \int_0^\zeta\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial h_\gamma^{*(s)}}{\partial \alpha} + \frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\beta^{*(s)} + \frac{1}{c}\left(B_{0\alpha}\frac{\partial u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t} - B_{0\gamma}\frac{\partial u_\alpha^{(s-k)}}{\partial t}\right)\right] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial e_\beta^{*(s)}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2\mu}B_{0\alpha}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t^2}\right\}d\zeta \end{gathered} \tag{3.20}$$

$$\begin{gathered} h_\beta^{*(s)} = \int_0^\zeta\left\{\frac{1}{B}\frac{\partial h_\gamma^{*(s)}}{\partial \beta} - \frac{4\pi\sigma}{c}\left[e_\alpha{}^* + \frac{1}{c}\left(B_{0\gamma}\frac{\partial u_\beta^{(s-k)}}{\partial t} - B_{0\beta}\frac{\partial u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t}\right)\right] - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial {}^{*(s)}_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2\mu}B_{0\beta}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial t^2}\right\}d\zeta \end{gathered}$$

$$e_\gamma^{*(s)} = -\int_0^\zeta \left[\frac{1}{A}\frac{\partial e_\alpha^{*(s)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial e_\beta^{*(s)}}{\partial \beta} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu c}\left(\frac{B_{0\alpha}}{B}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial\beta\partial t} - \frac{B_{0\beta}}{A}\frac{\partial^2 u_\gamma^{(s-k)}}{\partial\alpha\partial t}\right)\right] d\zeta,$$

где в случае $k = 0$ необходимо подставить $B_{0\alpha} = B_{0\beta} = 0$.

В формулах (3.19), (3.20) величины, отмеченные звездочкой, являются функциями переменных α, β, ζ, t; величины, не отмеченные звездочкой и имеющие индекс меньше s, считаются известными.

Как было указано выше, $Q^{(s)} \equiv 0$ при $s < 1$. Поэтому из (3.19) следует, что $Q^{*(1)}$ и $Q^{*(2)}$ тождественно равны нулю. (Очевидно эта же картина имеет место и в представлениях перемещений u_α, u_β, u_γ [7-9]).

Рассматривая полученные решения (3.15) и (3.19) линеаризованных уравнений магнитоупругости, замечаем, что в случае справедливости гипотезы недеформируемых нормалей (3.16) компоненты возбуждаемого электромагнитного поля e_α, e_β и h_γ до третьего приближения асимптотического интегрирования не зависят от координаты ζ.

Таким образом, аналогично классической теории тонких оболочек [4-6], можно сформулировать следующие основные гипотезы для магнитоупругости тонкой оболочки (предположения а) и б), заимствованные из классической теории оболочек, приводятся здесь ради полноты картины):

а) нормальный к срединной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной срединной поверхности оболочки и сохраняет свою длину;

б) нормальным напряжением σ_γ можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями;

в) тангенциальные компоненты вектора напряженности возбуждаемого электрического поля и нормальная компонента вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля по толщине оболочки остаются неизменными.

Очевидно, все три предположения должны рассматриваться как отдельные части единой гипотезы, на основании которой трехмерная задача магнитоупругости сплошных тел приводится к двумерной задаче магнитоупругости тонких оболочек.

4. Сформулированные выше основные гипотезы для внутренней задачи аналитически запишутся следующим образом:

$$u_\alpha = u - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}, \qquad u_\beta = v - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}, \qquad u_\gamma = w \tag{4.1}$$
$$e_\alpha = \varphi, \qquad e_\beta = \psi, \qquad h_\gamma = f$$

Здесь u v, w—искомые перемещения срединной поверхности оболочки, φ, ψ, f — искомые функции возбуждаемого электромагнитного поля (все величины — функции α, β, t).

Уравнения движения электропроводной оболочки (2.3) в усилиях и моментах запишутся в виде

$$\frac{1}{A}\frac{\partial T_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \beta} = 2\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X_\alpha \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial T_\beta}{\partial \beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}=2\rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-X_\beta$$

$$\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 M_\alpha}{\partial \alpha^2}+\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 M_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 M_\beta}{\partial\beta^2}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-$$

$$-(k_1T_\alpha+k_2T_\beta)=P-X_\gamma-\frac{1}{A}\frac{\partial m_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial m_\beta}{\partial\beta}$$

Здесь T_α, T_β, $T_{\alpha\beta}$, M_α, M_β, $M_{\alpha\beta}$ — внутренние силы и моменты, которые через перемещения срединной поверхности представляются обычными соотношениями упругости [4-6]

$$T_\alpha=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+k_1w\right)+\frac{2\nu Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+k_2w\right)$$

$$T_\beta=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+k_2w\right)+\frac{2\nu Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+k_1w\right)\tag{4.3}$$

$$T_{\alpha\beta}=\frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right),\qquad M_{\alpha\beta}=-\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}$$

$$M_\alpha=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+\frac{\nu}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right),$$

$$M_\beta=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{\nu}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right)$$

где P — нормальная составляющая внешней поверхностной нагрузки, $\mathbf{X}$ $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$, $\mathbf{m}$ $(m_\alpha, m_\beta, m_\gamma)$ — силы и моменты электромагнитного происхождения, которые, согласно (2.4), определяются следующим образом:

$$\mathbf{X}=\int_{-h}^{h}R\,d\gamma,\qquad \mathbf{m}=\int_{-h}^{h}R\gamma\,d\gamma\tag{4.4}$$

Для остальных компонент электромагнитного поля внутри оболочки h_α, h_β, e_γ из уравнений (2.2) путем интегрирования по γ в пределах от нуля до γ с учетом (4.1) и поверхностных условий (2.6) получим

$$h_\alpha=\frac{h_\alpha^{+}+h_\alpha^{-}}{2}+\gamma\left(\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{c}\psi\right)+$$

$$+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{a}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}-a_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}a_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$h_\beta=\frac{h_\beta^{+}+h_\beta^{-}}{2}+\gamma\left(\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{4\pi\sigma}{c}\varphi\right)+\tag{4.5}$$

$$+\frac{4\pi\sigma}{c^2}\left(a_\beta\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{a}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}-a_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}a_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$e_\gamma=\frac{e_\gamma^{+}+e_\gamma^{-}}{2}-\gamma\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu c}\left(a_\beta\frac{1}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}-a_\alpha\frac{1}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)$$

$$a_i=\int_0^\gamma B_{0i}d\gamma-\frac{1}{2}\left(\int_0^h B_{0i}d\gamma+\int_0^{-h}B_{0i}d\gamma\right)\quad(i=\alpha,\beta,\gamma)$$

$$a=\int_0^\gamma \gamma B_{0\gamma}d\gamma-\frac{1}{2}\left(\int_0^h\gamma B_{0\gamma}d\gamma+\int_0^{-h}\gamma B_{0\gamma}d\gamma\right)$$

Индексами плюс и минус отмечены значения соответствующих величин при $\gamma = h$ и $\gamma = -h$.

Таким образом, все компоненты электромагнитного поля оболочки, силы и моменты, входящие в уравнения магнитоупругости оболочки, представляются шестью искомыми функциями (u, v, w, φ, ψ, f) и значениями компонент электромагнитного поля h_α, h_β, e_γ на поверхностях оболочки.

Если ограничиться рассмотрением собственно задачи механики упругой оболочки, то, как будет показано ниже, основные разрешающие уравнения задачи будут содержать лишь искомые функции и значения нормальной компоненты электрического поля на поверхностях оболочки ($\gamma = \pm h$).

Значения e_γ на поверхностях оболочки представляются через искомые функции следующим образом:

$$
\begin{aligned}
e_\gamma^{+} &= -\frac{1}{c}\left[B_{0\beta}^{+}\frac{\partial u}{\partial t} - B_{0\beta}^{+}\frac{h}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t} - B_{0\alpha}^{+}\frac{\partial v}{\partial t} + B_{0\alpha}^{+}\frac{h}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right] \\
e_\gamma^{-} &= -\frac{1}{c}\left[B_{0\beta}^{-}\frac{\partial u}{\partial t} + B_{0\beta}^{-}\frac{h}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t} - B_{0\alpha}^{-}\frac{\partial v}{\partial t} - B_{0\alpha}^{-}\frac{h}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right]
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

Формулы (4.6) получены из условия равенства нулю нормальной составляющей плотности тока на поверхностях $\gamma = \pm h$, т. е. из условия (так как оболочка находится в вакууме)

$$
\left[\mathbf{e} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}\times \mathbf{B}_0\right)\right]\cdot\mathbf{n} = 0 \tag{4.7}
$$

5. Остается записать разрешающие уравнения относительно шести искомых функций задачи. Они могут быть получены из рассмотрения совместных уравнений магнитоупругости.

Подставляя в уравнения движения оболочки (4.2) значения внутренних сил и моментов из (4.3), а также величины сил и моментов электромагнитного происхождения из (4.4) с учетом (4.5) и (4.6), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{1-\nu}{2B^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} + \frac{1+\nu}{2AB}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{k_1+\nu k_2}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\sigma}{c}\Bigl[b_\gamma\psi + \\
&\quad + c_\beta\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{c}\Bigl(F_{\beta\beta}\frac{\partial u}{\partial t} - F_{\alpha\beta}\frac{\partial v}{\partial t} + \\
&\quad + b_{\alpha\gamma}\frac{\partial w}{\partial t} + G_{\beta\beta}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t} - G_{\alpha\beta}\frac{1}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\Bigr)\Bigr] = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{1-\nu}{2A^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + \frac{1+\nu}{2AB}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{k_2+\nu k_1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{1-\nu^2}{2Eh}\frac{\sigma}{c}\Bigl[-b_\gamma\varphi - \\
&\quad - c_\alpha\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{c}\Bigl(F_{\alpha\alpha}\frac{\partial v}{\partial t} - F_{\beta\alpha}\frac{\partial u}{\partial t} + b_{\beta\gamma}\frac{\partial w}{\partial t} + \\
&\quad + G_{\beta\alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t} - G_{\alpha\alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\Bigr)\Bigr] = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D\left\{\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^4} + \frac{2}{A^2B^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{1}{B^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4} + \frac{3}{h_2}\left[\frac{k_1+\nu k_2}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{k_2+\nu k_1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2)\,w\right]\right\} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + \frac{\sigma}{c}\left\{\left(\frac{1}{A}\frac{\partial c_\gamma}{\partial\alpha} - b_\alpha\right)\psi + \right. \\
&\quad + \left(b_\beta - \frac{1}{B}\frac{\partial c_\gamma}{\partial\beta}\right)\varphi + c_\gamma\left(\frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{g_\beta}{A^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} - \frac{g_\alpha}{AB}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} +
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{g_\beta}{AB}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{g_\alpha}{B^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}+\frac{1}{c}\left[\left(b_{\alpha\gamma}+\frac{1}{A}\frac{\partial L_{\beta\beta}}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial L_{\beta\alpha}}{\partial\beta}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+\left(b_{\beta\gamma}-\frac{1}{A}\frac{\partial L_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\right.\right.
$$
$$
\left.+\frac{1}{B}\frac{\partial L_{\alpha\alpha}}{\partial\beta}\right)\frac{\partial v}{\partial t}-\left(b_{\alpha\alpha}+b_{\beta\beta}-\frac{1}{A}\frac{\partial c_{\alpha\gamma}}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial c_{\beta\gamma}}{\partial\beta}\right)\frac{\partial w}{\partial t}-
$$
$$
-\left(\frac{1}{A}\frac{\partial N_{\beta\beta}}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial\beta}\right)\frac{1}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}+\left(\frac{1}{A}\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial N_{\alpha\alpha}}{\partial\beta}\right)\frac{1}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}+
$$
$$
+\frac{L_{\beta\beta}}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial t}-\frac{L_{\beta\alpha}}{B}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta\,\partial t}-\frac{L_{\alpha\beta}}{A}\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial t}+\frac{L_{\alpha\alpha}}{B}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta\,\partial t}-\frac{N_{\beta\beta}}{A^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha^2\partial t}- \qquad (5.1)
$$
$$
\left.\left.-\frac{N_{\alpha\alpha}}{B^2}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^2\partial t}+\frac{1}{AB}(N_{\alpha\beta}+N_{\beta\alpha})\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\partial\beta\partial t}\right]\right\}
$$

Здесь

$$
b_i=\int_{-h}^{h}B_{0i}d\gamma,\qquad c_i=\int_{-h}^{h}\gamma B_{0i}d\gamma,\qquad b_{ij}=\int_{-h}^{h}B_{0i}B_{0j}d\gamma
$$
$$
c_{ij}=\int_{-h}^{h}\gamma B_{0i}B_{0j}d\gamma,\qquad d_{ij}=\int_{-h}^{h}a_iB_{0j}d\gamma,\qquad g_i=\int_{-h}^{h}\gamma^2B_{0i}d\gamma
$$
$$
g_{ij}=\int_{-h}^{h}\gamma^2B_{0i}B_{0j}d\gamma,\qquad a_{ij}=\int_{-h}^{h}\gamma a_iB_{0j}d\gamma
$$
$$
F_{ij}=C_i^+b_j-b_{ij}-\delta_{ij}b_{\gamma\gamma},\qquad G_{ij}=hC_i^-b_j+c_{ij}-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu}d_{ij}+\delta_{ij}c_{\gamma\gamma}
$$
$$
L_{ij}=C_i^+c_j-c_{ij}-\delta_{ij}c_{\gamma\gamma},\qquad N_{ij}=hC_i^-c_j-g_{ij}+\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu}a_{ij}-\delta_{ij}g_{\gamma\gamma}
$$
$$
C_i^+=\frac{B_{0i}^++B_{0i}^-}{2},\qquad C_i^-=\frac{B_{0i}^+-B_{0i}^-}{2}\qquad (i,j=\alpha,\beta,\gamma)
$$

Подставляя в уравнения электродинамики значения компонент перемещений и электромагнитного поля из (4.1) и (4.5) с учетом (4.6) и осредняя по толщине оболочки, как это делается в теории оболочек, получим следующие три основные уравнения:

$$
\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^3}\frac{3}{2h^3}\left(l_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\right.
$$
$$
\left.+\frac{l}{B}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\,\partial t^2}-l_\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu c}\frac{3}{2h^3}\left[\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(l_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)-\right.
$$
$$
\left.-\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(l_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}l_\beta\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\right]
$$
$$
\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{4\pi\sigma\mu}{c^3}\frac{3}{2h^3}\left(l_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\right.
$$
$$
\left.+\frac{l}{A}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\,\partial t^2}-l_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu c}\frac{3}{2h^3}\left[\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)-\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}l_\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}\right] \qquad (5.2)
$$
$$
\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{3}{2h^3}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(l_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\right.
$$
$$
+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(l_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l_\beta\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(l\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)-
$$
$$
\left.-\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)\right]-\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}\frac{3}{2h^3}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(l_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(l_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]
$$
$$
l_i=\int_{-h}^{h}\gamma a_i d\gamma,\qquad l=\int_{-h}^{h}\gamma a\,d\gamma\qquad (i=\alpha,\beta,\gamma)
$$

При этом, кроме уравнений (5.2), получим также следующие условия, которые устанавливают связь между поверхностными значениями компонент напряженностей электромагнитного поля:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}-\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\psi+\frac{1}{2hc}\left(b_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}-b_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{c_\gamma}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}b_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{h_\alpha{}^+-h_\alpha{}^-}{2h}$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{4\pi\sigma}{c}\left[\varphi+\frac{1}{2hc}\left(b_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}-b_\beta\frac{\partial w}{\partial t}-\frac{c_\gamma}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)\right]-$$
$$-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c^2\mu}b_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{h_\beta{}^+-h_\beta{}^-}{2h}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{\varepsilon\mu-1}{2h\varepsilon\mu c}\left(\frac{b_\beta}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}-\frac{b_\alpha}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)=-\frac{e_\gamma{}^+-e_\gamma{}^-}{2h}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_\beta{}^++h_\beta{}^-}{2}\right)-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_\alpha{}^++h_\alpha{}^-}{2}\right)=\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{e_\gamma^++e_\gamma{}^-}{2}+\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e_\gamma{}^++e_\gamma{}^-}{2}\right)+$$
$$+\frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left[b_\beta\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(n_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)-b_\alpha\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n_\alpha\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{B}-\frac{\partial n}{\partial\beta}\frac{n_\beta}{\varepsilon\mu}-c_\beta\right)\frac{1}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}+\left(c_\alpha-\frac{1}{A}\frac{\partial n}{\partial\alpha}+\frac{n_\alpha}{\varepsilon\mu}\right)\frac{1}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right]$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_\alpha{}^++h_\alpha{}^-}{2}\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_\beta{}^++h_\beta{}^-}{2}\right)+\frac{4\pi\sigma}{2hc^2}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n_\alpha\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\right.$$
$$+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(n_\beta\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)+\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(n\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n_\gamma\frac{\partial u}{\partial t}\right)-$$
$$\left.-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(n_\gamma\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right]+\frac{\varepsilon\mu-1}{2hc^2\mu}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial B}\left(n_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{e_\gamma{}^++e_\gamma{}^-}{2}\right)=\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_\beta{}^++h_\beta{}^-}{2}\right)+\frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^3}\left(n_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{n}{B}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta\,\partial t^2}-\right.$$
$$\left.-n_\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)+\frac{\varepsilon\mu-1}{2h\varepsilon\mu c}\left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2}n_\beta\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}-\frac{1}{A^2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(n_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)\right] \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{e_\gamma{}^++e_\gamma{}^-}{2}\right)=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_\alpha{}^++h_\alpha{}^-}{2}\right)-\frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^3}\left(n_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n}{A}\frac{\partial^3 w}{\partial\alpha\,\partial t^4}-n_\gamma\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$
$$-\frac{\varepsilon\mu-1}{2h\varepsilon\mu c}\left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2}n_\alpha\frac{\partial^3 w}{\partial t^3}-\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(n_\beta\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial t}\right)+\frac{1}{B^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(n_\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\,\partial t}\right)\right]$$

$$n_i=\int_{-h}^{h}a_i d\gamma,\qquad n=\int_{-h}^{h}a\,d\gamma\qquad (i=\alpha,\beta,\gamma)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) составляют полную систему шести уравнений относительно шести искомых функций. Примечательно здесь, что система уравнений (5.1), (5.2) явно не содержит элементов решения внешней задачи; это объясняется принятием основной гипотезы.

Связь между внутренней и внешней задачами осуществляется через граничные условия для искомых функций φ, ψ, f на торцах оболочки. Отметим, что в некоторых частных случаях на торцах оболочки могут быть реализованы условия, при которых внутренняя задача полностью отделяется от внешней. Укажем также, что условия (5.3) должны быть использованы как граничные условия при решении исходных уравнений (1.4) внешней задачи.

При решении конкретных краевых задач к разрешающим дифференциальным уравнениям (5.1), (5.2) необходимо присоединить граничные условия на торцах оболочки как для компонент электромагнитного поля, так и обычные условия закрепления краев оболочки.

Условия для компонент электромагнитного поля получаются из (1.6) с учетом (1.5) и (1.7), в которых $\mathbf{n}$ — нормаль к соответствующей торцевой поверхности.

Для торцевой поверхности $\alpha = \text{const}$ имеем

$$\mathbf{n} = \mathbf{i} - \frac{1}{B}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\mathbf{k}, \qquad v_n = \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}$$

Поэтому линеаризованные граничные условия запишутся следующим образом:

$$h_\alpha = \frac{1}{\mu} h_\alpha^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0\beta}^{(e)} \frac{1}{B}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right) - \frac{\mu - 1}{\mu}\frac{B_{0\gamma}^{(e)}}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

$$h_\beta = h_\beta^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu}\frac{B_{0\alpha}^{(e)}}{B}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta}\right), \qquad h_\gamma = h_\gamma^{(e)} - \frac{\mu - 1}{\mu}\frac{B_{0\alpha}^{(e)}}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}$$

$$e_\alpha = \frac{1}{\varepsilon} e_\alpha^{(e)}, \qquad e_\beta = e_\beta^{(e)} + \frac{\mu - 1}{c} B_{0\gamma}^{(e)}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t}\right) \tag{5.4}$$

$$e_\gamma = e_\gamma^{(e)} - \frac{\mu - 1}{c} B_{0\beta}^{(e)}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\gamma}{A}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t}\right)$$

Аналогичным образом могут быть записаны условия на торцевой поверхности $\beta = \text{const}$.

В частном случае, когда торцевые поверхности находятся в вакууме, целесообразно пользоваться условием (4.7), так как это условие не содержит элементов решения внешней задачи. Тогда, например, для торцевой поверхности $\alpha = \text{const}$ имеем

$$e_\alpha = \frac{1}{c}\left[B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t} - B_{0\gamma}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\gamma}{B}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta \partial t}\right)\right] \tag{5.5}$$

В случае, когда оболочка по рассматриваемому краю закрепляется с неподвижным идеальным проводником, внутренняя задача решается независимо от внешней. Это объясняется тем, что в неподвижном идеальном проводнике электрическое поле отсутствует, т. е. внешнее электрическое поле равно нулю ($e_\alpha^{(e)} = e_\beta^{(e)} = e_\gamma^{(e)} = 0$). Тогда граничные условия (5.4) для компонент электрического поля примут вид

$$e_\alpha = 0, \quad e_\beta = \frac{\mu - 1}{c} B_{0\gamma}^{(e)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right)$$

$$e_\gamma = -\frac{\mu - 1}{c} B_{0\beta}^{(e)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial t} \right) \tag{5.6}$$

Таким образом, рассматривая разрешающие уравнения (5.1), (5.2), описывающие колебания оболочки, замечаем, что они не содержат компонент внешнего возмущенного электромагнитного поля. Связь с внешней областью (с внешней задачей) осуществляется только посредством граничных условий на торцах. В частном случае, когда и граничные условия не содержат элементов решения внешней задачи, например условия (5.6), задача колебания оболочки решается независимо от внешней задачи.

Для примера приведем некоторые варианты граничных условий (необходимые для решения системы уравнений (5.1), (5.2)) в случае, когда оболочка по торцам контактирует с идеальным проводником. Условия приводим для края $\alpha = \text{const}$.

Заделанный край

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \ \partial w/\partial\alpha = 0, \ \varphi = 0, \quad \psi = 0$$

Шарнирно закрепленный край

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial^2 w/\partial\alpha^2 = 0, \ \varphi = 0, \ \psi = 0$$

Шарнирно опертый край

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \partial u/\partial\alpha = 0, \quad \partial^2 w/\partial\alpha^2 = 0 \quad \varphi = 0, \quad \psi = \frac{\mu - 1}{c} B_{0\gamma}^{(e)} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Аналогичным образом могут быть записаны граничные условия и для края $\beta = \text{const}$.

6. Разрешающие уравнения (5.1), (5.2) для конкретных типов оболочек и пластин в некоторых частных случаях внешнего магнитного поля существенно упрощаются и становятся вполне обозримыми для решения конкретных задач.

Рассмотрим некоторые из них.

Пластинка во внешнем постоянном магнитном поле

$$D\Delta^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + \frac{2h^3\sigma}{3c}\left(B_{0\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} - B_{0\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta} + B_{0\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\partial\beta} - B_{0\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2}\right) +$$
$$+ \frac{2h^3\sigma}{3c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon\mu}B_{0\beta}^2 + B_{0\gamma}^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon\mu}B_{0\alpha}^2 + B_{0\gamma}^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} - \frac{2}{\varepsilon\mu}B_{0\alpha}B_{0\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right] +$$
$$+ \frac{2h\sigma}{c}\left[B_{0\beta}\left(\varphi - \frac{B_{0\beta}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right) - B_{0\alpha}\left(\psi + \frac{B_{0\alpha}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)\right]$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4\pi\sigma}{c^2}B_{0\beta}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu}\left(B_{0\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - B_{0\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}B_{0\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]$$

$$\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4\pi\sigma}{c^2}B_{0\alpha}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu}\left(B_{0\beta}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} -\right.\right.$$
$$\left.\left. - B_{0\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}B_{0\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)$$

Круговая цилиндрическая оболочка с радиусом кривизны R, находящаяся в постоянном внешнем магнитном поле, вектор напряженности которого параллелен образующим цилиндра. Координаты α и β выбираются так, чтобы коэффициенты первой квадратичной формы имели значения $A = 1$, $B = R$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{1+\nu}{2R}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2\partial \beta^2} + \frac{1}{R^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{3}{Rh^2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{R}\right)\right] +$$
$$+ 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P - \frac{2h^3\sigma}{3c}B_{0\alpha}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha\partial \beta} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2}\right) + \frac{2h^3\sigma}{3c^2\varepsilon\mu R^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \beta^2\partial t} -$$
$$- \frac{2h\sigma}{c}B_{0\alpha}\left(\psi + \frac{B_{0\alpha}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu c}\frac{B_{0\alpha}}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial \alpha\partial \beta\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^3}B_{0\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu c}B_{0\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\times$$
$$\times\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}\right)$$

Пологая оболочка двоякой кривизны, находящаяся в постоянном внешнем магнитном поле, вектор напряженности которой перпендикулярен срединной поверхности оболочки. Координаты α и β выбираются так, что $A = 1$, $B = 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \beta} + (k_1 + \nu k_2)\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma}{c}B_{0\gamma}\left(\psi -\right.$$
$$\left.- \frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta} + (k_2 + \nu k_1)\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{1-\nu^2}{E}\frac{\sigma}{c}B_{0\gamma}\left(\varphi +\right.$$
$$\left.+ \frac{B_{0\gamma}}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \frac{\rho(1-\nu^2)}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$D\left\{\Delta^2 w + \frac{3}{h^2}\left[(k_1 + \nu k_2)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (k_2 + \nu k_1)\frac{\partial v}{\partial \beta} + (k_1^2 + k_2^2 + 2\nu k_1 k_2)w\right]\right\} +$$
$$+ 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P + \frac{2h^3\sigma}{3c^2}B_{0\gamma}^2\frac{\partial \Delta w}{\partial t}$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^3}B_{0\gamma}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\Delta\psi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^3}B_{0\gamma}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Присоединяя к приведенным разрешающим уравнениям необходимые граничные условия, можно найти решение многочисленных задач магнитоупругости пластин и оболочек. Следует также иметь в виду, что в каждой рассмотренной задаче должны быть удовлетворены условия (5.3).

Таким образом, на основании трехмерных уравнений магнитоупругости построена корректная двумерная теория оболочек и пластин конечной проводимости, позволяющая решать задачи магнитоупругости оболочек и пластин, имеющих конечные размеры.

Авторы благодарят А. Л. Гольденвейзера за обсуждение работы и ценные советы.

Поступила 10 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошных сред, т. 1, М., «Наука», 1970.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
3. Калиский С. Распространение нелинейной волны нагрузки и разгрузки в магнитном поле. Проблемы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1961.
4. Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М., Гостехиздат, 1949.
5. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
7. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
8. Гольденвейзер А. Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
9. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.