Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ [1]

Н. А. Ростовцев, И. Е. Храневская

(Новосибирск)

Рассматривается задача о слоисто-неоднородном теле с экспоненциальной зависимостью упругих постоянных изотропной среды от декартовой координаты. Коэффициент Пуассона положен постоянным. Методами функции напряжений Эри и разложений по степеням малого параметра строится решение первой основной граничной задачи плоской теории упругости для круговой области при задании на окружности радиального напряжения как непрерывной функции ограниченной вариации полярного угла.

Эта задача исследовалась в работе [1] методом последовательных приближений с использованием комплексных представлений Колосова — Мусхелишвили [2–4]. Сходимость процесса последовательных приближений не доказана.

Комплексные представления в задачах с неоднородной упругостью не дают преимуществ при построении решения, поэтому ниже принят метод функции Эри в том варианте, как он представлен в работе [5], в сочетании с разложениями по степеням малого параметра, характеризующего неоднородность. Дается рекуррентный процесс вычисления функций, являющихся коэффициентами степенного ряда, и доказывается сходимость этого ряда. Приводится пример.

1. В плоской задаче для неоднородной изотропной среды, коэффициент Пуассона ν которой постоянен, при неоднородности в виде экспоненциальной функции при отсутствии массовых сил и термических напряжений уравнение функции Эри F в полярных координатах имеет вид

$$\Delta\Delta F + 2qPF + q^2\Delta F = \frac{q^2}{1-\nu} QF \tag{1.1}$$

$$PF = \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Delta F, \qquad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$QF = \left[\sin^2\varphi \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \cos^2\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right) + \sin 2\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\right]$$

где q — малый параметр, характеризующий экспоненциальную зависимость модуля упругости $\mu = \mu_0 e^{qx}$ среды. Здесь x — безразмерная абсцисса, отнесенная к радиусу круга $r = a$.

---

[1] Николай Андреевич Ростовцев один из авторов публикуемой в этом номере статьи, скончался 22 июля 1972 г. Ему принадлежит ряд замечательных работ по вопросам механики сплошной среды, в особенности по контактным задачам теории упругости. Он ввел комплексные функции напряжений, получил ряд важных результатов при изучении статических и динамических задач теории упругости. Полученные им результаты отличались большим математическим изяществом.

Н. А. Ростовцев всегда принимал активное участие в редакционной работе журнала «Прикладная математика и механика».

На границе области функция напряжений $F(r, \varphi)$ удовлетворяет граничному условию

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}\right|_{\substack{r=1\\0\leqslant\varphi<2\pi}}=\sigma(\varphi) \tag{1.2}$$

Кроме того, $F(r, \varphi)$ ограничена при $r = 0$.

Решение ищется в классе аналитических функций в виде ряда по степеням малого параметра q

$$F(r, \varphi) = F_0(r, \varphi) + qF_1(r, \varphi) + q^2F_2(r, \varphi) + \ldots + q^nF_n(r, \varphi) + \ldots \tag{1.3}$$

Начальный член ряда (1.3) соответствует телу, подверженному тем же нагрузкам, но считаемому однородным. Последующие члены вводят поправки на неоднородность.

В результате подстановки (1.3) в уравнение (1.1) и учета граничных условий (1.2) получаем следующую систему граничных задач для коэффициентов ряда (1.3) с соответствующими условиями на границе:

1) $\Delta\Delta F_0 = 0$, где F_0 удовлетворяет граничному условию

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial F_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial \varphi^2}\right|_{\substack{r=1\\0\leqslant\varphi<2\pi}}=\sigma(\varphi) \tag{1.4}$$

причем $F_0(r, \varphi)$ ограничена при $r = 0$;

2) $\Delta\Delta F_1 = -2PF_0$

$$\Delta\Delta F_n = -2PF_{n-1} - \Delta F_{n-2} + \frac{1}{1-\nu}QF_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{1.5}$$

где все $F_n(r, \varphi)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ удовлетворяют нулевым условиям на границе области, т. е.

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial F_n}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_n}{\partial \varphi^2}\right|_{\substack{r=1\\0\leqslant\varphi<2\pi}}=0 \tag{1.6}$$

и, кроме того, $F_n(r, \varphi)$ ограничены при $r = 0$.

Пользуясь решением первой основной граничной задачи для однородной среды, данным Н. И. Мусхелишвили (см. [4], § 54), имеем

$$F_0(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{4}r^2 + \sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{r^{m+2}}{2(m+1)} - \frac{r^m}{2(m-1)}\right](\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m\sin m\varphi) \tag{1.7}$$

где α_0, α_m, β_m — коэффициенты разложения $\sigma(\varphi)$ в ряд Фурье

$$\sigma(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m\sin m\varphi) \tag{1.8}$$

Остальные коэффициенты ряда (1.3) надлежит определить из рекуррентной системы (1.5) с граничными условиями (1.6).

Допустим, что коэффициенты до $(n-1)$-го включительно найдены. Тогда левая часть уравнения (1.5) представляет непрерывную функцию обоих аргументов (в силу свойств операторов P, Q, Δ) и представима тригоно-

метрическим рядом

$$\Phi(r, \varphi) = a_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(r)\cos m\varphi + b_m(r)\sin m\varphi \tag{1.9}$$

Решение уравнения (1.5) при граничных условиях (1.6) ищется в виде

$$F_n(r, \varphi) = f_0^n(r) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m^n(r)\cos m\varphi + g_m^n(r)\sin m\varphi \tag{1.10}$$

Здесь и далее верхний индекс коэффициентов разложения в ряд указывает номер коэффициента ряда (1.3), для которого берется разложение.

Подставив (1.10) и (1.9) в уравнение (1.5), разделяем переменные и получаем систему дифференциальных уравнений для коэффициентов f_m^n и g_m^n $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ ряда (1.10)

$$\begin{gathered}
\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2}\right)^2 f_0^n(r) = a_0(r) \\
\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\right)^2 f_1^n(r) = a_1(r) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2}{r^2}\right)^2 f_m^n(r) = a_m(r) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{1.11}$$

Из граничных условий (1.6) получаем условия для $f_m^n(r)$ на границе области

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\frac{df_0^n}{dr}\bigg|_{r=1} = 0 \\
\frac{1}{r}\frac{df_m^n}{dr} - \frac{m^2}{r^2} f_m^n\big|_{r=1} = 0, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots
\end{gathered} \tag{1.12}$$

Аналогичные уравнения и граничные условия имеем для $g_m^n(r)$. Кроме того, $f_m^n(r)$ и $g_m^n(r)$ должны быть ограничены при $r = 0$.

Построение функции Грина для каждого уравнения системы (1.11) при граничных условиях (1.12) позволяет определить

$$F_n(r, \varphi) = \int_0^1 \Gamma_0(r, \xi)\, a_0(\xi)\, d\xi + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\cos m\varphi \int_0^1 \Gamma_m(r, \xi)\, a_m(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \sin m\varphi \int_0^1 \Gamma_m(r, \xi)\, b_m(\xi)\, d\xi\right] \tag{1.13}$$

где $\Gamma_0(r, \xi)$, $\Gamma_m(r, \xi)$ — функции Грина для граничных задач (1.11) с граничными условиями (1.12)

$$\Gamma_0(r, \xi) = \begin{cases} {}^1/_8\,(2\xi^3 \ln \xi + 2r^2\xi \ln \xi + r^2\xi + \xi - r^2\xi^3 - \xi^3), & 0 \leqslant r \leqslant \xi \leqslant 1 \\ {}^1/_8\,(2\xi^3 \ln r + 2\xi r^2 \ln r - r^2\xi + \xi^3 - r^2\xi^3), & 0 \leqslant \xi \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_1(r, \xi) = \begin{cases} {}^1/_{16}\,(2r^3\xi^2 - r^3\xi^4 - 2r\xi^2 + 2r\xi^4 - r^3 - 4r\xi^2 \ln \xi), & 0 \leqslant r \leqslant \xi \leqslant 1 \\ {}^1/_{16}\,(2r^3\xi^2 - r^3\xi^4 - r^{-1}\xi^4 + 2r\xi^4 - 2r\xi^2 - 4\xi^2 r \ln r), & 0 \leqslant \xi \leqslant r \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Gamma_m(r,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{8}\left[r^m\left(\frac{\xi^{m+1}}{1-m}-\frac{\xi^{m+3}}{m}-\frac{\xi^{3-m}}{m(1-m)}\right)+\right.\\ \left.+r^{m+2}\left(\frac{\xi^{m+1}}{m}-\frac{\xi^{m+3}}{1+m}-\frac{\xi^{1-m}}{m(1+m)}\right)\right], & 0\leqslant r\leqslant\xi\leqslant 1\\ \frac{1}{8}\left[\xi^{m+1}\left(\frac{r^m}{1-m}+\frac{r^{m+2}}{m}-\frac{r^{2-m}}{m(1-m)}+\right.\right.\\ \left.\left.+\xi^{m+3}\left(\frac{r^m}{m}-\frac{r^{m+2}}{m+1}-\frac{r^{-m}}{m(m+1)}\right)\right)\right], & 0\leqslant\xi\leqslant r\leqslant 1,\quad m=2,3,\ldots\end{cases}$$

Так, получаем, что

$$F_1(r,\varphi)=-\frac{1}{2^2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{r^{m+4}}{2(m+2)}-\frac{r^{m+2}}{m+2}+\frac{r^m}{2(m+2)}\right](\alpha_{m+1}\cos m\varphi+\beta_{m+1}\sin m\varphi) \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}F_2(r,\varphi)=\frac{1}{2^4(1-\nu)}\Bigg\{\Bigg[&\frac{3-4\nu}{36}\alpha_2 r^6+\left(\frac{4\nu-1}{12}\alpha_2+\frac{2\nu-1}{8}\alpha_0\right)r^4+\\ &+\left(-\frac{1+4\nu}{12}\alpha_2+\frac{1-2\nu}{4}\alpha_0\right)r^2+\left(-\frac{3-4\nu}{36}\alpha_2-\frac{1-2\nu}{8}\alpha_0\right)\Bigg]+\\ &+\left[\frac{3-4\nu}{48}\alpha_3 r^7-\frac{1-2\nu}{8}\alpha_3 r^5+\frac{1-4\nu}{16}\alpha_3 r^3+\frac{\nu}{12}\alpha_3 r\right]\cos\varphi+[\ldots]\sin\varphi+\\ &+\sum_{m=2}^{\infty}\left[\frac{3-4\nu}{12(m+3)}\alpha_{m+2}r^{m+6}+\left(\frac{-3m-1+4\nu(m+1)}{4(m+1)(m+3)}\alpha_{m+2}+\frac{\alpha_m}{2(m+1)(m+2}\right)\times\right.\\ &\times r^{m+4}+\left(\frac{3m-1-4\nu(m+1)}{4(m+1)(m+2)}\alpha_{m+2}-\frac{\alpha_m}{2(m+1)(m+2)}\right)r^{m+2}+\\ &\left.+\left(\frac{-3m+1+4\nu(m+1)}{12(m+1)(m+3)}\alpha_{m+2}+\frac{\alpha_m}{2(m+1)(m+2)}\right)r^m\right]\cos m\varphi+[\ldots]\sin m\varphi\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.15}$$

Здесь и далее многоточие в скобках при $\sin m\varphi$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) означает, что в скобках стоит тот же полином от r, что и при $\cos m\varphi$ с произведенной заменой α_m на β_m. Как и прежде, α_m, β_m — коэффициенты ряда Фурье (1.8).

Методом математической индукции можно показать, что n-й коэффициент ряда (1.3) имеет вид

$$F_n(r,\varphi)=\frac{(-1)^n}{2^{2n}(1-\nu)^\lambda}\left[a_0{}^n+\sum_{m=1}^{\infty}a_m{}^n\cos m\varphi+b_m{}^n\sin m\varphi\right] \tag{1.16}$$

$$\lambda=n/2 \qquad \text{при } n\equiv 0,\quad n\equiv 2 \pmod 4$$

$$\lambda=(n-1)/2 \quad \text{при } n\equiv 1,\quad n\equiv 3 \pmod 4$$

причем коэффициенты при $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) — полиномы от r вида

$$a_m{}^n=\alpha^n_{m,\,m+2n+2}r^{m+2n+2}+\alpha^n_{m,\,m+2n}r^{m+2n}+\ldots+\alpha^n_{m,\,m+2}r^{m+2}+\alpha^n_{m,\,m}r^m$$

$$b_m{}^n=\beta^n_{m,\,m+2n+2}r^{m+2n+2}+\beta^n_{m,\,m+2n}r^{m+2n}+\ldots+\beta^n_{m,\,m+2}r^{m+2}+\beta^n_{m,\,m}r^m$$

Кроме того, из уравнения (1.5) следует, что $a_m{}^n$ и $b_m{}^n$ выражаются через коэффициенты разложений F_{n-1} и F_{n-2}.

Непосредственными вычислениями на основании (1.16) и (1.13) получаем выражения для $a_m{}^n$

$$a_m{}^n = \left[\frac{2}{n+1}(1-\nu)^\delta \alpha^{n-1}_{m+1,\, m+2n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\alpha^{n+2}_{m+2, m+2n}\right]\times$$

$$\times[r^{m+2n+2} - (n+1)r^{m+2} + nr^m] + \left[\frac{2}{n}(1-\nu)^\delta \alpha^{n-1}_{m+1,\, m+2n-1} +\right.$$

$$\left. + \frac{2(1-\nu)^\delta}{m+n}\alpha^{n-1}_{m-1,\, m+2n-1} - \frac{1}{(n-1)n}\alpha^{n-2}_{m+2,\, m+2n-2} - \frac{2(1-2\nu)}{n(m+n)}\alpha^{n-2}_{m,\, m+2n-2}\right]\times$$

$$\times[r^{m+2n} - nr^{m+2} + (n-1)r^m] + \left[\frac{2}{n-1}(1-\nu)^\delta \alpha^{n-1}_{m+1,\, m+2n-3} +\right.$$

$$+ \frac{2(1-\nu)^\delta}{m+n-1}\alpha^{n-1}_{m-1,\, m+2n-3} - \frac{1}{(n-2)(n-1)}\alpha^{n-2}_{m+2,\, m+2n-4} -$$

$$\left. - \frac{2(1-2\nu)}{n(m+n)}\alpha^{n-2}_{m,\, m+2n-4} - \frac{1}{(m+n-2)(m+n-1)}\alpha^{n-2}_{m-2,\, m+2n-4}\right]\times$$

$$\times[r^{m+2n-2} - (n-1)r^{m+2} + (n-2)r^m] + \ldots$$

$$\ldots + \left[(1-\nu)^\delta \alpha^{n-1}_{m+1,\, m+3} + \frac{2}{m+2}(1-\nu)^\delta \alpha^{n-1}_{m-1,\, m+3} - \frac{1}{2}\alpha^{n-2}_{m+2,\, m+2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1-2\nu}{m+2}\alpha^{n-2}_{m,\, m+2} - \frac{\alpha^{n-2}_{m-2,\, m+2}}{(m+1)(m+2)}\right][r^{m+4} - 2r^{m+2} + r^m] \qquad (1.17)$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } n \equiv 0,\ n \equiv 2 \pmod 4 \\ 0 & \text{при } n \equiv 1,\ n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Коэффициенты $b_m{}^n$ при соответствующих n получаются из (1.17) заменой $\alpha^v_{p,t}$ на $\beta^v_{p,t}$.

2. Определим норму функции $F(r, \varphi)$ как сумму модулей коэффициентов ее разложения в тригонометрический ряд (1.10)

$$F_n(r, \varphi)\| = \sum_{m=0}^{\infty}(|f_m{}^n(r)| + |g_m{}^n(r)|)$$

Согласно этому определению

$$\sigma(\varphi)\| = \frac{|\alpha_0|}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(|\alpha_m| + |\beta_m|) = C$$

Из (1.16) имеем

$$|f_m{}^n(r)| = \frac{1}{2^{2n}(1-\nu)^\lambda}|a_m{}^n|, \qquad |g_m{}^n(r)| = \frac{1}{2^{2n}(1-\nu)^\lambda}|b_m{}^n|$$

Непосредственно из формул (1.14) и (1.15) получаем

$$|\alpha^1_{m,\, m+4}| \leqslant \frac{|\alpha_{m+1}|}{2(m+2)}, \qquad |\alpha^2_{m,\, m+6}| < \frac{|\alpha_{m+2}|}{6(m+3)}$$

$$|\alpha^1_{m,\, m+2}| \leqslant \frac{|\alpha_{m+1}|}{m+2}, \qquad |\alpha^2_{m,\, m+4}| < \frac{|\alpha_m|}{m+3}$$

$$|\alpha^1_{m,\, m}| \leqslant \frac{|\alpha_{m+1}|}{2(m+2)}, \qquad |\alpha^2_{m,\, m+2}| < \frac{3}{m+3}|\alpha_m|$$

$$|\alpha^2_{m,\, m}| < \frac{2}{m+3}|\alpha_m|$$

Формулы (1.17) позволяют оценить $|\alpha^3_{m,\,m+p}|$ и $|\alpha^4_{m,\,m+p}|$ для $p = 0, 2, 4, \ldots 10$. Получаем

$$|\alpha^3_{m,\,m+8}| < \frac{1}{3(m+4)}|\alpha_{m+3}|, \qquad |\alpha^4_{m,\,m+10}| < \frac{1}{6(m+5)}|\alpha_{m+4}|$$

$$|\alpha^3_{m,\,m+6}| < \frac{2}{m+4}|\alpha_{m+1}|, \qquad |\alpha^4_{m,\,m+8}| < \frac{3}{m+5}|\alpha_{m+2}|$$

$$|\alpha^3_{m,\,m+4}| < \frac{3^2}{m+4}|\alpha_{m-1}|, \qquad |\alpha^4_{m,\,m+6}| < \frac{15}{m+5}|\alpha_m|$$

$$|\alpha^3_{m,\,m+2}| < \frac{3^3}{m+4}|\alpha_{m-1}|, \qquad |\alpha^4_{m,\,m+4}| < \frac{3^4}{m+5}|\alpha_{m-2}|$$

$$|\alpha^3_{m,\,m}| < \frac{2^4}{m+4}|\alpha_{m-1}|, \qquad |\alpha^4_{m,\,m+2}| < \frac{3^5}{m+5}|\alpha_{m-2}|$$

$$|\alpha^4_{m,\,m}| < \frac{2^7}{m+5}|\alpha_{m-2}|$$

Методом математической индукции при помощи формулы (1.17) можно доказать, что

$$|\alpha^n_{m,\,m+4}| < \frac{3^{2(n-2)}}{m+n+1}|\alpha_{m-n+2}|$$

и $|\alpha^n_{m,\,m+4}|$ является наибольшим среди $|\alpha^n_{m,\,m+p}|$ для $p=4, 6, \ldots, 2n+2$.

Из (1.17) для $n \equiv 1$, $n \equiv 3 \pmod 4$ имеем

$$|a_m{}^n| \leqslant 2(n+1)|\alpha^n_{m,\,m+2n+2}| + 2n|\alpha^n_{m,\,m+2n}| + 2(n-1)|\alpha^n_{m,\,m+2n-2}| + \ldots$$

$$\ldots + 2\cdot 2|\alpha^n_{m,\,m+4}| < |\alpha^n_{m,\,m+4}|\,n(n+3) < \frac{3^{2(n-2)}n(n+3)}{m+n+1}|\alpha_{m-n+2}| \qquad (2.1)$$

Полученная оценка будет иметь место для $m \geqslant (n-1)$.

Для $0 \leqslant m \leqslant n-2$

$$|a_m{}^n| < \frac{3^{2(n-2)}n(n+3)}{m+n+1}|\alpha_0|$$

Это следует из свойств операторов P и Q, входяших в левую часть уравнения (1.5).

Таким образом

$$|f_m{}^n(r) < \frac{3^{2(n-2)}(n+3)}{2^{2n}(1-\nu)^\lambda}|\alpha_{m-n+2}| \qquad m \geqslant n-1$$

$$|f_m{}^n(r)| < \frac{3^{2(n-2)}(n+3)}{2^{2n}(1-\nu)^\lambda}|\alpha_0|, \qquad 0 \leqslant m \leqslant n-2$$

Аналогичные оценки получаются для $|g^n_m(r)|$. Отсюда получаем следующую оценку $\|F_n\|$:

$$\|F_n(r, \varphi)\| < \frac{3^{2(n-2)}(n+3)(n-2)C_1}{2^{2n}(1-\nu)^\lambda}$$

$$C_1 = |\alpha_0| + |\beta_1| + \|\sigma(\varphi)\| = |\alpha_0| + |\beta_1| + C$$

Итак, ряд (1.3) мажорируется рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2(n-2)}(n+3)(n-2)C_1}{2^{2n}(1-\nu)^{\lambda}} q^n$$

который абсолютно сходится при $|q| < 1/3$.

Следует заметить, что на самом деле граница сходимости ряда (1.3) будет гораздо шире. И, как будет показано ниже, даже при $|q| = 1.6$ ряд сходится довольно быстро.

3. Решение первой основной граничной задачи для неоднородной круговой области, нагруженной по контуру равномерным радиальным напряжением $\sigma(\varphi) = p$, получаем из решения в общем случае.

Так, из (1.7), (1.14), (1.15) и последующих выражений для F_3, F_4, F_5 имеем

$$F_0 = \frac{1}{2} pr^2, \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = -\frac{1-2\nu}{2^6(1-\nu)} p(1-r^2)^2$$

$$F_3 = \frac{1-2\nu}{2^6 \cdot 3(1-\nu)} pr(1-r^2)^2 \cos\varphi$$

$$F_4 = -\frac{1-2\nu}{2^8(1-\nu)^2} p\left[\left(\frac{3-2\nu}{18} r^6 - \frac{5-2\nu}{12} r^4 + \frac{1}{3} r^2 - \frac{3+2\nu}{36}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{3-4\nu}{24} r^2 (1-r^2)^2 \cos 2\varphi\right]$$

$$F_5 = \frac{1-2\nu}{2^{10}(1-\nu)^2} p\left[\left(\frac{3-2\nu}{18} r^7 + \frac{4\nu-17}{36} r^5 + \frac{4+\nu}{9} r^3 - \frac{5+4\nu}{36} r\right)\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{1-2\nu}{30}(1-r^2)^2 r^3 \cos 3\varphi\right]$$

Отсюда получаем выражения составляющих напряжения, соответствующих первым пяти членам ряда (1.3)

$$\sigma_r^{\circ} = \sigma_\varphi^{\circ} = p, \qquad \tau_{r\varphi}^{\circ} = 0$$

$$\sigma_r^1 = \sigma_\varphi^1 = 0, \qquad \tau_{r\varphi}^1 = 0$$

$$\sigma_r^2 = \frac{(1-2\nu)pq^2}{2^4(1-\nu)}(1-r^2), \qquad \sigma_\varphi^2 = \frac{(1-2\nu)pq^2}{2^4(1-\nu)}(1-3r^2), \qquad \tau_{r\varphi} = 0$$

$$\sigma_r^3 = -\frac{(1-2\nu)pq^3}{2^4 3(1-\nu)} r(1-r^2)\cos\varphi, \qquad \sigma_\varphi^3 = -\frac{(1-2\nu)pq^3}{2^4 3(1-\nu)} r(3-5r^2)\cos\varphi$$

$$\tau_{r\varphi}^3 = -\frac{(1-2\nu)pq^3}{2^4 3(1-\nu)} r(1-r^2)\sin\varphi$$

$$\sigma_r^4 = \frac{(1-2\nu)pq^4}{2^{10}3(1-\nu)^2}[4(3-2\nu)r^2 - 8 + (3-4\nu)(1+r^2)\cos 2\varphi](1-r^2)$$

$$\sigma_\varphi^4 = \frac{(1-2\nu)pq^4}{2^{10}3(1-\nu)^2}[-20(3-2\nu)r^4 + 12(5-2\nu)r^2 - 8 - (3-4\nu)(1 -$$

$$- 12r^2 + 15r^4)\cos 2\varphi], \qquad \tau_{r\varphi}^4 = \frac{(1-2\nu)pq^4}{2^{10}3(1-\nu)^2}[(3-4\nu)(-1+6r^2-5r^4)]\sin 2\varphi$$

$$\sigma_r^5 = -\frac{(1-2\nu)pq^5}{2^{10}(1-\nu)^2}\left\{\left[\frac{3-2\nu}{3} r^5 - \frac{17-4\nu}{9} r^3 + \frac{2(4+\nu)}{9} r\right]\cos\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{(1-2\nu)}{30}(2r^5 - 8r^3 + 6r)\cos 3\varphi\right\}, \qquad \sigma_\varphi^5 = \frac{(1-2\nu)pq^5}{2^{10}(1-\nu)^2} \times$$

$$\times\left\{\left[\frac{7(3-2\nu)}{3}r^5+\frac{5(4\nu-17)}{9}r^3+\frac{2(4+\nu)}{3}r\right]\cos\varphi+\frac{1-2\nu}{15}(3r-\right.$$

$$\left.-20r^3+21r^5)\cos 3\varphi\right\},\qquad \tau_{r\varphi}^5=\frac{(1-2\nu)\,pq^5}{2^{10}(1-\nu)^2}\left\{\left[\frac{3-2\nu}{3}r^5+\frac{4\nu-1}{9}r^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2(4-\nu)}{9}r\right]\sin\varphi+\frac{1-2\nu}{5}(3r^5-4r^3+r)\sin 3\varphi\right\}$$

В таблице приведены значения последовательных приближений для составляющих напряжения, взятых в виде

$$\sigma_{rn}=\frac{1}{p}(\sigma_r{}^\circ+\sigma_r{}^1+\ldots+\sigma_r{}^n),\qquad \sigma_{\varphi n}=\frac{1}{p}(\sigma_\varphi{}^\circ+\sigma_\varphi{}^1+\ldots+\sigma_\varphi{}^n)$$

для значений $\varphi=0$, $q=-1.6$, $\nu=0.3$, что соответствует значениям параметров в работе [1]. Это позволяет сравнить результаты.

Напряжения	r					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\sigma_{r_0}=\sigma_{r1}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
σ_{r2}	1.09143	1.08777	1.07680	1.05851	1.03291	1.00000
σ_{r3}	1.09143	1.09713	1.09318	1.07723	1.04695	1.00000
σ_{r4}	1.08064	1.08753	1.08676	1.07490	1.04764	1.00000
σ_{r5}	1.08064	1.08839	1.08769	1.07400	1.04703	1.00000
$\sigma_{\varphi 0}=\sigma_{\varphi 1}$	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
$\sigma_{\varphi 2}$	1.09143	1.08046	1.04754	0.99269	0.91589	0.81714
$\sigma_{\varphi 3}$	1.09143	1.10777	1.09045	1.02780	0.90809	0.71962
$\sigma_{\varphi 4}$	1.07438	1.09569	1.09077	1.04044	0.92044	0.70152
$\sigma_{\varphi 5}$	1.07438	1.09137	1.08537	1.03847	0.92371	0.70323

Таким образом, присутствие неоднородности влечет возникновение, хотя и незначительных по величине, касательных напряжений. Кроме того, наблюдается количественное изменение максимальных значений σ_r на 9%, σ_φ на 30%.

Поступила 24 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишику М., Теодосиу К. Решение при помощи теории функций комплексного переменного статической плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Колосов Г. В. Об одном приложении теории функций комплексной переменной к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, тип. Маттисена, 1909.
3. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. М.—Л., ОНТИ, 1935.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
5. Ростовцев Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.