Прикладная математика и механика. Том 36, 1972

УДК 62-50

ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача о встрече конфликтно управляемой фазовой точки с заданным множеством. Доказываются достаточные условия для успешного завершения нелинейной игры сближения. Эти условия базируются на идее минимаксного экстремального прицеливания [1]. Данное прицеливание осуществляется здесь на основе множеств поглощения [2]. Эти множества конструируются при помощи вспомогательных движений, порождаемых программными управлениями, которые изображаются подходящими борелевскими мерами в соответствии с известным аппаратом [3] обобщенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f\,(t,\ x,\ u,\ v) \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый n-мерный вектор системы; u и v — r-мерные векторные управляющие воздействия, подчиненные первому и второму игрокам соответственно и стесненные условиями $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — ограниченные замкнутые множества. Функция $f\,(t,\ x,\ u,\ v)$ предполагается непрерывной при всех рассматриваемых значениях аргументов и удовлетворяющей условиям Липшица по x в каждой ограниченной области пространства $\{x\}$.

Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия продолжимости решений $x\,[t]$ для уравнения (1.1). Пусть $F\,(t,\ x) = \mathrm{co}^*\ \{f\,(t,\ x,\ u,\ v)\colon u \in P,\ v \in Q\}$, где $\mathrm{co}^*\ \{f\}$ означает выпуклую замкнутую оболочку некоторого множества $\{f\}$ векторов f. Тогда примем, что при данных $t = t_0$ и ограниченной области G в пространстве $\{x\}$ для всякого $\vartheta > t_0$ найдется число $\beta\,(t_0,\ G,\ \vartheta)$, такое, что всякое решение $x\,(t)$ уравнения в контингенциях [4]

$$\dot{x}\,(t) \in F\,(t,\ x\,(t)) \tag{1.2}$$

при условиях $x\,(t_*) \in G$, $(t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta)$ будет удовлетворять неравенству

$$\|\,x\,(t)\,\| \leqslant \beta\,(t_0,\ G,\ \vartheta) \tag{1.3}$$

при всех $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$. Здесь и ниже $\|\,x\,\|$ означает евклидову норму вектора x.

По условиям задачи в пространстве $\{x\}$ задано замкнутое множество M, которое составляет цель первого игрока.

Стратегии $U \div u(t, x)$ определим при помощи функций $u(t, x)$, которые ставят в соответствие каждой возможной позиции $\{t, x\}$ некоторый вектор u. Будем полагать допустимыми любые стратегии $U \div u(t, x)$, стесненные только условием $u(t, x) \in P$ при всех рассматриваемых значениях аргументов t и x. Пусть $[\tau_i, \tau_{i+1})$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — некоторая система Δ полуинтервалов, покрывающая полуось $[t_*, \infty)$ $(\tau_0 = t_*)$. Выберем какую-нибудь измеримую реализацию $v[t]$ $(t_* \leqslant t < \infty)$ управления v второго игрока, стесненную условием $v[t] \in Q$. Ломаной Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, x_*, U, v[\cdot]]$ назовем абсолютно непрерывную функцию $x_\Delta[t]$, удовлетворяющую начальному условию $x_\Delta[t_*] = x_*$ и уравнению

$$x_\Delta^{\cdot}[t] = f(t, x_\Delta[t], u(\tau_i, x_\Delta[\tau_i]), v[\cdot]) \tag{1.4}$$

при почти всех $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Здесь $u(t, x)$ — именно та функция, которая отвечает зафиксированной в обозначении $x_\Delta[t, t_*, x_*, U, v[\cdot]]$ стратегии U. Движением $x[t] = x[t, t_*, x_*, U]$ системы (1.1) при выбранной первым игроком стратегии $U \div u(t, x)$ будем называть всякую функцию $x[t]$ $(t \geqslant t_0)$, которая на всяком конечном отрезке $[t_0, \vartheta]$ является равномерным пределом для некоторой подходящей последовательности ломаных Эйлера $x_{\Delta(k)}[t] = x_{\Delta(k)}[t, t_*, x_*^{(k)}, U, v^{(k)}[\cdot]]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ при условии, что $\lim\, [\sup_i (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)})] = 0$ при $k \to \infty$.

В этих терминах задача первого игрока о приведении фазовой точки $x[t]$ на множество M формализуется следующим образом.

Задача 1.1. При заданной начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ требуется найти стратегию $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, которая гарантировала бы встречу всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U^\circ]$ с множеством M, т. е. обеспечивала бы для всякого такого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U^\circ]$ выполнение условия

$$x[t^*] \in M \tag{1.5}$$

в какой-то момент $t = t^* < \infty$, может быть, в свой момент t^* $(x[\cdot])$ для каждого движения $x[t]$ $(t \geqslant t_0)$.

2. **Программные управления**. Определим класс рассматриваемых вспомогательных управлений η и порождаемых ими вспомогательных движений $x(t)$. Программные управления $\eta = \eta(dt, du, dv)$ на полуинтервале времени $T = [t_0, \vartheta)$ отождествим с регулярными борелевскими мерами $\eta(dt, du, dv)$, определенными в пространстве $\{t\} \times \{u\} \times \{v\}$, сосредоточенными на множестве $T \times P \times Q$ и нормированными таким образом, что для любого полуинтервала $[t_*, t^*) = T^* \subset T$ выполняется равенство

$$\eta(T^* \times P \times Q) = t^* - t_* \tag{2.1}$$

т. е. мера множества $T^* \times P \times Q$ равна длине полуинтервала T^*.

Меры $\eta(dt, du, dv)$ будем рассматривать как элементы пространства линейных функционалов $\varkappa_\eta[\varphi]$, определенных на непрерывных функциях $\varphi(t, u, v)$ так, что в соответствии с (см. [5], стр. 284)

$$\varkappa_\eta[\varphi] = \iiint \varphi(t, u, v)\, \eta(dt, du, dv) \tag{2.2}$$

Всюду в дальнейшем слабая топология в пространстве мер η (dt, du, dv) понимается в смысле слабой топологии в пространстве функционалов $\varkappa_\eta$ [φ] (2.2) по отношению к исходному пространству $\{\varphi\}$ непрерывных функций φ (t, u, v).

Программное движение $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)$ ($t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$), порождаемое программным управлением $\eta = \eta$ (dt, du, dv) из позиции $\{t_*, x_*\}$, определим как решение следующего интегрального уравнения:

$$x(t) = x_* + \int\limits_{t_*}^{t} \int\limits_P \int\limits_Q f(\tau, x(\tau), u, v)\, \eta(d\tau, du, dv) \tag{2.3}$$

Стандартными методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений устанавливается, что при сделанных предположениях о правой части f (t, x, u, v) уравнения (1.1) при всяком выборе позиции $\{t_*, x_*\}$ и допустимого управления $\eta = \eta$ (dt, du, dv) интегральное уравнение (2.3) имеет единственное абсолютно непрерывное решение x (t), продолжимое для всех значений $t \in [t_*, \vartheta]$. При всяком выборе ограниченной области G в пространстве $\{x\}$ все программные движения $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)$ ($t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$) при всех возможных $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $x_* \in G$ и $\eta = \eta$ (dt, du, dv) оказываются равномерно ограниченными и равностепенно непрерывными. Если некоторая последовательность управлений $\{\eta^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) при $k \to \infty$ слабо сходится к управлению η^*, то соответствующая последовательность движений $x^{(k)}(t) = x(t, t_*, x_*, \eta^{(k)})$ сходится равномерно к движению $x^*(t) = x(t, t_*, x_*, \eta^*)$. Наконец, движения $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)$ равномерно непрерывны по начальным условиям для $\{t_*, x_*\}$ из всякой ограниченной области $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $x_* \in G$ и эта непрерывность равностепенна по t и η.

Регулярные борелевские меры μ (dt, du), определенные в пространстве $\{t\} \times \{u\}$, сосредоточенные на множестве $T \times P$ и нормированные так, что для любого полуинтервала $[t_*, t^*) = T^* \subset T$ выполняется равенство

$$\mu(T^* \times P) = t^* - t_* \tag{2.4}$$

т. е. мера множества $T^* \times P$ равна длине полуинтервала T^*, назовем программными управлениями $\mu = \mu$ (dt, du) первого игрока на полуинтервале времени $[t_0, \vartheta)$. В дальнейшем будем полагать зафиксированным некоторое множество $\{\mu$ (dt, du)$\}$ управлений $\mu = \mu$ (dt, du). Эти управления $\mu = \mu(dt, du) \in \{\mu(dt, du)\}$ будем называть допустимыми программными управлениями первого игрока на полуинтервале времени $[t_0, \vartheta)$. В частности, в качестве множества $\{\mu$ (dt, du)$\}$ допустимых программных управлений первого игрока $\mu = \mu$ (dt, du) может быть выбрано множество всех регулярных борелевских мер μ (dt, du), удовлетворяющих условию (2.4).

В дальнейшем программные управления η, μ и порождаемые ими программные движения x (t) часто будут рассматриваться на временных подмножествах из полуинтервала $[t_0, \vartheta)$ или отрезка $[t_0, \vartheta]$ соответственно. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, иногда после обозначения соответствующего управления или движения будем писать обозначение выбранного временного подмножества. Например, запись η, $(t_* \leqslant t < t^*)$ или η, $[t_*, t^*)$ будет означать, что мера $\eta\,(dt, du, dv)$, изображающая данное программное управление, рассматривается на подмножестве $T^* \times P \times Q$, где $T^* = [t_*, t^*)$. Часть управления η, $(t_0 \leqslant t < \vartheta)$, заданного мерой $\eta\,(dt, du, dv)$ на всем множестве $T \times P \times Q$, рассматриваемая как управление $\eta = \eta\,(dt, du, dv)$ $(t_* \leqslant t < t^*)$ на полуинтервале $T^* = [t_*, t^*) \subset \subset [t_0, \vartheta) = T$, будет именоваться отрезком управления η, $[t_0, \vartheta)$, отвечающим этому полуинтервалу $[t_*, t^*)$.

Далее будем полагать зафиксированным некоторое множество $\{\eta\,(dt, du, dv)\}$ допустимых программных управлений $\eta\,(dt, du, dv)$. Это множество будем полагать выпуклым слабо замкнутым множеством. Так как множество всех возможных регулярных борелевских мер $\eta\,(dt, du, dv)$, удовлетворяющих условию (2.1), слабо компактным в себе, то и слабо замкнутое множество $\{\eta\,(dt, du, dv)\}$ всех допустимых программных управлений $\eta\,(dt, du, dv)$ будет слабо компактным в себе.

Программой второго игрока на некотором полуинтервале $[t_*, t^*) = T^*$ будем называть всякую слабо замкнутую совокупность $\{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, t^*)\}_{\text{П}}$, составленную из допустимых программных управлений $\eta = \eta\,(dt, du, dv)$, рассматриваемых на множестве $T^* \times P \times Q$, и удовлетворяющую следующему условию: каково бы ни было допустимое программное управление первого игрока $\mu = \mu\,(dt, du) \in \{\mu\,(dt, du)\}$, в программе $\{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, t^*)\}_{\text{П}}$ найдется по крайней мере одно управление $\eta\,(dt, du, dv)$, согласованное с мерой $\mu\,(dt, du)$ условием

$$\eta\,(A \times B \times Q) = \mu\,(A \times B) \tag{2.5}$$

которое должно выполняться, каковы бы ни были измеримые множества $A \subset T^*$ и $B \subset P$.

Зафиксируем некоторое значение $x = x_*$ и некоторый n-мерный вектор s. Программу $\{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, t^*), x_*, s\}_{\text{П}}$ назовем экстремальной к $\{x_*, s\}$ на полуинтервале $[t_*, t^*)$, если она образует выпуклое и, как всякая программа второго игрока, слабо замкнутое множество программных управлений $\eta\,(dt, du, dv)$ и удовлетворяет условию

$$\int_{t_*}^{t^*} [\min_{u \in P} \max_{v \in Q} s' f\,(t, x_*, u, v)]\, dt \leqslant \tag{2.6}$$

$$\leqslant \min_{\eta \in \{\eta\}_{\text{П}}} \left[\int_{t_*}^{t^*} \int_P \int_Q s' f\,(t, x_*, u, v)\, \eta\,(dt, du, dv) + \|s\|\, o_G\,(t^* - t_*)\right)$$

где $\{\eta\}_{\text{П}} = \{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_{\text{П}}$.

Здесь и ниже штрих означает транспонирование и, стало быть, символ $s'f$ означает скалярное произведение векторов s и f. Символ $o_G\,(\delta)$ означает малую высшего порядка, чем δ, причем оценка $o_G\,(\delta)$ предполагается равномерной по $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и $\{x_*\} \in G$, где G — любая наперед выбранная ограниченная область в пространстве $\{x\}$.

Множество $\{\eta\,(dt, du, dv\}$ допустимых программных управлений $\eta\,(dt, du, dv)$ будем полагать настолько полным, что при всяком выборе $[t_*, t^*) \subset [t_0, \vartheta)$, x_* и s можно составить по крайней мере одну экстремальную программу $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, t^*), x_*, s\}_{\Pi}$. Кроме того, будем предполагать, что управление $\eta(dt, du, dv)\ [t_*, \vartheta)$, составленное из отрезков двух допустимых управлений $\eta(dt, du, dv)$, $[t_*, t^*)$, $\eta(dt, du, dv)$, $[t^*, \vartheta)$, снова является допустимым управлением.

Высказанное условие полноты будет во всяком случае выполнено, если в качестве множества допустимых программных управлений выбрать все возможные регулярные борелевские меры, удовлетворяющие условию (2.1), ибо тогда при любом выборе x_* и s и полуинтервала $[t_*, t^*)$ будет существовать по крайней мере одна экстремальная программа $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, t^*), x_*, s\}_{\Pi}$.

Эту программу можно получить, например, следующим образом. Выберем какое-нибудь допустимое управление $\mu = \mu(dt, du)$ и рассмотрим его часть, отвечающую полуинтервалу $[t_*, t^*)$. Можно построить борелевскую меру $\eta(dt, du, dv)$, согласованную с выбранным управлением $\mu(dt, du)$ условием (2.5) и в то же время удовлетворяющую условию

$$\int_{t_*}^{t^*}\int_P\int_Q s'f(t, x_*, u, v)\,\eta(dt, du, dv) = \int_{t_*}^{t^*}\int_P [\max_{v\in Q} s'f(t, x_*, u, v)]\,\mu(dt, du) \qquad (2.7)$$

Если теперь сопоставить каждому допустимому управлению $\mu = \mu(dt, du)$ $(t_* \leqslant t < t^*)$ всевозможные согласованные с ним условием (2.5) регулярные борелевские меры $\eta(dt, du, dv)$ $(t_* \leqslant t < t^*)$, удовлетворяющие условию (2.7), и взять выпуклую слабо замкнутую оболочку всех таких мер $\eta(dt, du, dv)$, отвечающих всем возможным допустимым управлениям $\mu = \mu(dt, du) \in \{\mu(dt, du)\}$, то получим нужную экстремальную программу $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, t^*), x_*, s\}_{\Pi}$, удовлетворяющую условию (2.6).

Приведенные формальные определения содержательно можно пояснить следующим образом. Пусть реализовалась некоторая позиция $\{t_*, x_*\}$. Тогда второму игроку предоставляется право мысленно заморозить эту позицию и выбрать мысленно некоторую свою программу $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}$ на будущее $t_* \leqslant t < \vartheta$. О своем выборе второй игрок сообщает первому игроку. После этого первый игрок может выбрать мысленно произвольное допустимое программное управление $\eta = \eta(dt, du, dv)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, содержащееся в той программе $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}$, которую наметил второй игрок. Выбранное так управление $\eta = \eta(dt, du, dv)$ определит некоторое воображаемое программное движение $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)$ (2.3). При этом выбор первого игрока оказывается во всяком случае настолько широким, что он имеет возможность по меньшей мере выбрать из программы $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}$ допустимое программное управление $\eta = \eta(dt, du, dv)$, согласованное условием (2.5) с любым допустимым программным управлением $\mu = \mu(dt, du) \in \{\mu(dt, du)\}$, на котором только пожелает остановить свой выбор первый игрок. В то же время и второй игрок имеет достаточно богатый выбор программ $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}$, ибо во всяком случае он имеет возможность остановиться на любой программе $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}$, сконструированной на базе одной или некоторого множества экстремальных программ $\{\eta(dt, du, dv), [\tau_*,$

τ^*), x_*, $s\}_\Pi$, выбор которых по поставленным условиям довольно широк. Разумеется, в предлагаемой конструкции эти содержательные понятия зашифрованы в форме управлений-мер, смешивающих обычные управления u и v. Таким образом, предлагаемые программы $\{\eta\,(dt,\,du,\,dv),\,[t_*, \vartheta)\}_\Pi$ и управления $\eta = \eta\,(dt,\,du,\,dv) \in \{\eta,\,[t_*, \vartheta)\}_\Pi$, связанные с управлениями $\mu = \mu\,(dt,\,du)$ условиями (2.5), действительно, носят характер формализаций, отвечающих содержательным понятиям программного управления и соответствующих понятиям минимаксного программного поглощения из работы [1].

Следует подчеркнуть, что описанная процедура выбора программы $\{\eta\,(dt,\,du,\,dv),\,[t_*, \vartheta)\}_\Pi$ и управления $\eta\,(dt,\,du,\,dv) \in \{\eta\,(dt,\,du,\,dv),\,[t_*, \vartheta)\}_\Pi$ в условиях исходной задачи 1.1, разумеется, никак не предусматривалась, и процедура эта носит вспомогательный характер. Нарисованная картина вспомогательных программных движений $x\,(t)$ позволит, однако, развить некоторую вспомогательную экстремальную конструкцию, которая послужит основой для формирования управления u в каждой реализующейся позиции $\{t_*,\,x_*\}$ уже в ходе действительной игры для решения задачи 1.1. При этом в действительном ходе игры движения $x\,[t] = x\,[t,\,t_0,\,x_0,\,U]$ будут уже формироваться по принципу обратной связи по схеме, описанной в п. 1 и опирающейся на конструкцию, построенную на ломаных Эйлера (1.4).

3. Вспомогательные программные задачи. Рассмотрим две вспомогательные задачи об оптимальном программном управлении. На их основе будут сформулированы условия регулярности исходной игры, достаточные для успешного разрешения задачи 1.1 первым игроком. Решения данных вспомогательных задач доставят понятие множеств поглощения [2]. Эти множества составляют базу экстремальной конструкции, которая определяет стратегию U°, разрешающую задачу 1.1 в регулярном случае.

Обозначим символом $\rho\,(x,\,M)$ евклидово расстояние от точки x до множества M. Первая вспомогательная задача является задачей об оптимальном программном управлении η, минимизирующем величину $\rho\,(x\,(\vartheta),\,M)$,

Задача 3.1. Заданы позиция $\{t_*,\,x_*\}$, число $\vartheta > t_*$ и программа $\{\eta\,(dt,\,du,\,dv),\,[t_*, \vartheta)\}_\Pi$. Требуется найти оптимальное допустимое программное управление

$$\eta^\circ\,(dt, du, dv\,|\,[t_*, \vartheta), x_*, \{\eta\}_\Pi) \in \{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_\Pi$$

которое удовлетворяет условию

$$\rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta^\circ), M) = \min_{\eta\in\{\eta\}_\Pi} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M) \tag{3.1}$$

Программное движение $x\,(t) = x\,(t,\,t_*,\,x_*,\,\eta^\circ)$, порожденное оптимальным управлением $\eta^\circ = \eta^\circ\,(dt,\,du,\,dv\,\,|\,[t_*, \vartheta),\,x_*,\,\{\eta\}_\Pi)$, будем называть оптимальным программным движением, разрешающим задачу 3.1, и будем обозначать его символом $x^\circ\,(t) = x^\circ\,(t,\,t_*,\,x_*,\,\eta^\circ\,|\vartheta,\,\{\eta\}_\Pi)$.

Из того условия, что совокупность допустимых управлений η, составляющих программу $\{\eta\,(dt,\,du,\,dv),\,[t_*, \vartheta)\}_\Pi$, образует множество, слабо компактное в себе, выводится, что при всяком выборе позиции $\{t_*,\,x_*\}$, числа $\vartheta > t_*$ и программы $\{\eta(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ задача 3.1 имеет решение $\eta^\circ (dt, du, dv)$.

В самом деле, рассмотрим какую-либо минимизирующую последовательность управлений $\eta^{(k)} \in \{\eta, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta^{(k)}), M) = \inf_{\eta\in\{\eta\}_\Pi} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M) \tag{3.2}$$

Из этой последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\eta^{(k_j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, для которой, как отмечено выше, соответствующая последовательность движений $x^{(k_j)}(t) = x\,(t, t_*, x_*, \eta^{(k_j)})$ сходится равномерно на отрезке $[t_*, \vartheta]$ к движению $x^*(t) = x\,(t, t_*, x_*, \eta^*)$ (2.3), которое порождается допустимым управлением $\eta^* = \eta^*(dt, du, dv) \in \{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, \vartheta)\}_\Pi$, являющимся слабым пределом для последовательности $\eta^{(k_j)}(dt, du, dv)$. Но из (3.2) по определению $x^*(t)$ вытекает равенство

$$\rho\,(x^*(\vartheta), M) = \min_{\eta\in\{\eta\}_\Pi} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M) \tag{3.3}$$

которое и доказывает, что программное движение $x^*(t)$ является оптимальным программным движением, разрешающим задачу 3.1, а порождающее его допустимое программное управление η^* является оптимальным программным управлением $\eta^\circ (dt, du, dv \mid [t_*, \vartheta), x_*, \{\eta\}_\Pi)$ для этой задачи. Таким образом, проверено существование решения задачи 3.1.

Вторая вспомогательная задача будет задачей о программном оптимальном управлении η, которое доставляет максимин величине $\rho\,(x(\vartheta), M)$.

Задача 3.2. Заданы позиция $\{t_*, x_*\}$ и число $\vartheta > t_*$. Требуется найти оптимальное допустимое программное управление $\eta^\circ(dt, du, dv \mid [t_*, \vartheta), x_*)^\circ$, которое удовлетворяет условиям

$$\rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta^\circ), M) = \max_{\{\eta\}_\Pi} \min_{\eta\in\{\eta\}_\Pi} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M) \tag{3.4}$$

причем $\eta^\circ (dt, du, dv)^\circ \in \{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^\circ$, где $\{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^\circ$ — та программа, которая доставляет максимум в правой части равенства (3.4).

Программное движение $x\,(t) = x\,(t, t_*, x_*, \eta^\circ)$, порожденное оптимальным управлением $\eta^\circ = \eta^\circ\,(dt, du, dv \mid [t_*, \vartheta), x_*)^\circ$, будем называть оптимальным программным движением, разрешающим задачу 3.2, и будем обозначать его символом $x^\circ\,(t)^\circ = x^\circ\,(t, t_*, x_*, \eta^\circ \mid \vartheta)^\circ$.

Прежде всего надлежит проверить существование решения $\eta^\circ\,(dt, du, dv \mid [t_*, \vartheta), x_*)^\circ$ задачи 3.2. Для этого, согласно предыдущему, достаточно проверить существование программы $\{\eta\,(dt, du, dv), [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^\circ$, максимизирующей правую часть (3.4). Покажем, что такая допустимая программа $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^\circ$ существует при всяком выборе $\{t_*, x_*\}$ и $\vartheta > t_*$.

В самом деле, рассмотрим какую-либо максимизирующую последовательность программ $\{\eta, [t_*, \vartheta)\}_\Pi^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, которая удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} (\min_{\eta\in\{\eta\}_{\Pi}^{(k)}} \rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M)) = \\ = \sup_{\{\eta\}_{\Pi}} (\min_{\eta\in\{\eta\}_{\Pi}} \rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M)) \tag{3.5}$$

Рассмотрим всевозможные слабо сходящиеся подпоследовательности $\{\eta^{(k_j)}\}$ допустимых управлений $\eta^{(k_j)} \in \{\eta, [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}^{(k_j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Объединим слабые пределы η (dt, du, dv) всех таких подпоследовательностей в некоторое множество $\{\eta\ (dt, du, dv)\}^*$. Вследствие слабой компактности в себе множества $\{\eta\ (dt, du, dv)\}$ всех допустимых управлений $\eta\ (dt, du, dv)$. Каждый из рассматриваемых слабых пределов $\eta\ (dt, du, dv)$ будет снова допустимым программным управлением. Таким образом, получено некоторое множество $\{\eta\ (dt, du, dv)\}^*$ допустимых программных управлений. Нетрудно проверить, что это множество удовлетворяет требованиям, предъявляемым к программе на полуинтервале $[t_*, \vartheta)$. Таким образом, построена некоторая программа $\{\eta\ (dt, du, dv),\ [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}^*$.

Остается проверить, что эта программа является максимизирующей для (3.4). Предположим противное. Тогда среди допустимых программных управлений $\eta \in \{\eta, [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}^*$ найдется управление η^*, которое породит движение $x^*\ (t) = x\ (t,\ t_*,\ x_*,\ \eta^*)$, удовлетворяющее условию

$$\rho(x^*(\vartheta), M) < \lim_{k\to\infty} (\min_{\eta\in\{\eta\}_{\Pi}^{(k)}} \rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M)) \tag{3.6}$$

Но для меры $\eta^* = \eta^*\ (dt, du, dv)$ по построению программы $\{\eta\}_{\Pi}^{*}$ можно указать слабо сходящуюся к ней подпоследовательность допустимых управлений $\eta^{(k_j)} = \eta^{(k_j)}\ (dt, du, dv) \in \{\eta\}_{\Pi}^{(k_j)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. При этом порождаемая ею последовательность программных движений $x^{(k_j)}\ (t) = x\ (t,\ t_*,\ x_*,\ \eta^{(k_j)})$ (2.3) на отрезке $[t_*, \vartheta]$ будет сходиться равномерно к программному движению $x^*\ (t) = x\ (t,\ t_*,\ x_*,\ \eta^*)$ (2.3). Однако по построению $x^*\ (t)$ имеем теперь

$$\rho(x^*(\vartheta), M) = \lim_{j\to\infty} \rho(x^{(k_j)}(\vartheta), M) \tag{3.7}$$

Соотношения (3.6) и (3.7) противоречивы. Полученное противоречие и доказывает, что построенная программа $\{\eta,\ [t_*, \vartheta)\}_{\Pi}^{*}$ является искомой максимизирующей программой $\{\eta,\ [t_*, \vartheta),\ x_*\}_{\Pi}^{\circ}$, которая доставляет решение задачи 3.2. Таким образом, существование решения задачи 3.2 при всяком выборе позиции $\{t_*,\ x_*\}$ и числа $\vartheta > t_*$ проверено.

Вообще говоря, решение задачи 3.2 может доставляться не единственной максимизирующей программой $\{\eta,\ [t_*, \vartheta),\ x_*\}_{\Pi}^{\circ}$. Поэтому оказывается целесообразным ввести понятие максимальной максимизирующей программы $\{\eta\ (dt, du, dv),\ [t_*, \vartheta),\ x_*\}_{\Pi}^{\circ\circ}$ для задачи 3.2, как такой программы, которая содержит всякую другую максимизирующую программу $\{\eta\ (dt, du, dv),\ [t_*, \vartheta),\ x_*\}_{\Pi}^{\circ}$ для той же задачи. Такая программа существует, ибо в качестве ее достаточно выбрать слабо замкнутое объединение всех максимизирующих программ $\{\eta\ (dt, du, dv),\ [t_*, \vartheta),\ x_*\}_{\Pi}^{\circ}$. Для дальнейшего важно, что с изменением начальной точки x_* максимальная максимизирующая программа $\{\eta,\ [t_*, \vartheta),\ x_*\}_{\Pi}^{\circ\circ}$ изменяется слабо полунепрерывно сверху по включению. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $\{x^{(k)}\}$ и $\eta^{(k)} \in \{\eta, [t_*, \vartheta), x^{(k)}\}_\Pi^{\circ\circ}\}$ — последовательности начальных точек и допустимых управлений, причем $\lim x^{(k)} = x_*$ и меры $\eta^{(k)}$ (dt, du, dv) слабо сходятся к мере η^* (dt, du, dv) при $k \to \infty$. Тогда допустимое программное управление $\eta^* = \eta^*$ (dt, du, dv) содержится в максимальной максимизирующей программе $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^{\circ\circ}$.

Для доказательства образуем слабо замкнутое множество $\{\eta\}^*$, составленное из всех возможных слабых пределов η для всех возможных слабо сходящихся подпоследовательностей допустимых управлений $\eta \in \{\eta, [t_*, \vartheta), x^{(k_j)}\}_\Pi^{\circ\circ}$. Можно опять проверить, что множество $\{\eta\}^*$ образует допустимую программу. Более того, эта программа $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^*$ является максимизирующей программой $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^\circ$.

В самом деле, иначе нашлась бы слабо сходящаяся подпоследовательность $\eta_{(k_j)}$ $(dt, du, dv) \xrightarrow{\text{сл}} \eta_*(dt, du, dv)$, для которой последовательность программных движений $x^{(k_j)}(t) = x\ (t, t_*, x^{(k_j)}, \eta_{(k_j)})$ равномерно сходится к движению $x^*(t) = x\ (t, t_*, x_*, \eta_*)$ такому, что

$$\lim_{j\to\infty} \rho\,(x^{(k_j)}(\vartheta), M) = \rho\,(x^*(\vartheta), M) < \min_{\eta \in \{\eta\}_\Pi^{\circ\circ}} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M) \tag{3.8}$$

Но тогда, вследствие равномерной и равностепенной непрерывной зависимости решений $x\ (t)$ интегрального уравнения (2.3) от начальных данных получили бы, что при достаточно больших значениях j

$$\min_{\eta \in \{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^\circ} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x^{(k_j)}, \eta), M) >$$

$$> \min_{\eta \in \{\eta, [t_*, \vartheta), x^{(k_j)}\}_\Pi^\circ} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x^{(k_j)}, \eta), M) \tag{3.9}$$

Однако неравенство (3.9) противоречит предположению о том, что $\{\eta, [t_*, \vartheta), x^{(k_j)}\}_\Pi^\circ$ — максимизирующая программа для начальной позиции $\{t_*, x^{(k_j)}\}$. Полученное противоречие показывает, что $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^* = \{\eta, [t_*, \vartheta, x_*\}_\Pi^\circ$, т. е. $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^* \subset \{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^{\circ\circ}$ и, стало быть, слабый предел η^* (dt, du, dv) для всякой последовательности $\{\eta^{(k)}$ $(dt, du, dv)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ рассматриваемого вида, действительно, содержится в программе $\{\eta, [t_*, \vartheta), x_*\}_\Pi^{\circ\circ}$. Тем самым лемма 3.1 доказана.

4. Условия регулярности. Обозначим символом ε_0 (t_*, x_*, ϑ) величину, стоящую в правой части равенства (3.4), т. е.

$$\varepsilon_0\,(t_*, x_*, \vartheta) = \max_{\{\eta\}_\Pi} \min_{\eta \in \{\eta\}_\Pi} \rho\,(x\,(\vartheta, t_*, x_*, \eta), M) \tag{4.1}$$

Выберем некоторую позицию $\{t_*, x_*\}$, для которой

$$\varepsilon_0\,(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon > 0 \tag{4.2}$$

Пусть $t^* = t_* + \delta \leqslant \vartheta$. Зафиксируем какую-нибудь допустимую экстремальную программу $\{\eta$ (dt, du, dv), $[t_*, t^*)$, x_*, $s\}_\Pi$. Допустимые программные управления η $(dt, du, dv)(t_* \leqslant t < t^*)$ из выбранной экстремальной программы в соответствии с уравнением (2.3) породят некоторое множество программных движений $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$, конечные значения которых $x = x(t^*)$ составят некоторое множество $X(t^*, \{t_*, x_*\}, \{\eta\}_{\text{П}})$. Наряду с программными движениями $x(t)$, которые определяются уравнением (2.3), рассмотрим еще некоторые вспомогательные движения $x(t)^* = x(t, t_*, x_*, \eta)^*$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$, которые определяются равенствами

$$x(t)^* = x_* + \int\limits_{t_*}^{t}\int\limits_{P}\int\limits_{Q} f(\tau, x_*, u, v)\, \eta(d\tau, du, dv) \tag{4.3}$$

Конечные значения $x = x(t^*)^*$ этих движений составят некоторое множество $X^*(t^*, \{t_*, x_*\}, \{\eta\}_{\text{П}})$. Нетрудно проверить, что при одном и том же допустимом управлении $\eta = \eta(dt, du, dv)$ движения $x(t)$ и $x(t)^*$ удовлетворяют оценке

$$\| x(t^*)^* - x(t^*) \| \leqslant \varphi(\delta)\, \delta \tag{4.4}$$

где функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 0 \tag{4.5}$$

и, стало быть, образует бесконечно малую $o(\delta) = \varphi(\delta)\,\delta$ высшего порядка малости относительно $\delta > 0$.

При этом оценка (4.4) равномерна по η во всякой ограниченной замкнутой области G пространства $\{x\}$ при $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$. Таким образом, расстояние $\gamma(X^*, X)$ между множествами X^* и X, определенное как величина

$$\gamma(X^*, X) = \max\,[\max_{x \in X} \rho(x, X^*) \quad \max_{x^* \in X^*} \rho(x, X^*)] \tag{4.6}$$

удовлетворяет оценке

$$\gamma(X^*, X) \leqslant \varphi(\delta)\, \delta \tag{4.7}$$

Важно заметить, что по свойствам экстремальной программы $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_{\text{П}}$ множество X^* есть множество ограниченное, выпуклое и замкнутое.

Выберем теперь какую-нибудь точку $x^* \in X^*$. Позиции $\{t^*, \overset{\circ\circ}{x^*}\}$ отвечает максимальная максимизирующая программа $\{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\text{П}}^{\circ\circ}$. По выбору начальной позиции $\{t_*, x_*\}$ (4.2), по определению величины $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$ (4.1) и множества X заключаем, что найдутся управление $\eta(dt, du, dv) \in \{\eta\ [t^*, \vartheta), x^*\}_{\text{П}}^{\circ\circ}$ и точка $x \in X$ такие, что для соответствующего программного движения $x(t) = x(t, t^*, x, \eta)$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.3) выполнится условие

$$\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon \tag{4.8}$$

Отсюда вследствие (4.7) выводится, что во множестве X^* найдется точка $x = x^{**}$ и найдется управление $\eta(dt, du, dv) \in \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\text{П}}^{\circ\circ}$ такие, что для соответствующего программного движения $x(t) = x(t, t^*, x^{**},$

$\eta)$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.3) выполнится условие

$$\rho(x), \vartheta), M) \leqslant \varepsilon_* = \varepsilon + K\varphi(\delta)\,\delta \tag{4.9}$$

где постоянная $K = \exp\lambda(\vartheta - t_0)$, причем λ — постоянная Липшица для правой части f уравнения (1.1) в подходящей, достаточно большой ограниченной области G пространства $\{x\}$, в которой лежат все рассматриваемые движения.

Неравенство (4.9) выводится как следствие неравенства

$$\|x(t, t^*, x^*, \eta) - x(t, t^*, x, \eta)\| \leqslant \|x^* - x\| \exp\lambda(t - t^*) \tag{4.10}$$

которое связывает всякие два решения $x(t, t^*, x^*, \eta)$ и $x(t, t^*, x, \eta)$ уравнения (2.3) при одном и том же программном управлении η.

Таким образом, для всякой точки $x^* \in X^*$ можем построить некоторое непустое множество $Y(x^*)$, состоящее из всех точек $x^{**} \in X^*$, для каждой из которых найдется по крайней мере одно допустимое управление $\eta \in \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\text{п}^{\circ\circ}$, такое, что соответствующее программное движение $x(t) = x(t, t^*, x^{**}, \eta)$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.3) будет удовлетворять условию (4.9). Обозначим символом $Y^*(x^*)$ выпуклую замкнутую оболочку множества $Y(x^*)$. Теперь можно сформулировать одно из подходящих условий регулярности игры.

Условие 4.1. Скажем, что при некотором значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна, если для всякого достаточно малого значения $\beta > 0$ и всякой ограниченной замкнутой области G в пространстве $\{x\}$ можно указать функцию $\varphi^*(\delta)$, удовлетворяющую условию

$$\lim_{\delta\to 0} \varphi^*(\delta) = 0 \tag{4.11}$$

и такую, что для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, $x_* \in G$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $\varepsilon_0(t, x_*, \vartheta) = \varepsilon \in [\beta, \beta^\circ]$, всякой экстремальной программы $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_\text{п}$ и всякой точки $x^* \in X^*(t^*, \{t_*, x_*\}, \{\eta\}_\text{п})$ для каждой точки $x \in Y^*(x^*)$ найдется управление $\eta(dt, du, dv) \in \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*)_\text{п}^{\circ\circ}$, такое, что для соответствующего программного движения $x(t) = x(t, t^*, x, \eta)$ $(t^* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.3) выполнится условие

$$\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon^* = \varepsilon + \varphi^*(\delta)\,\delta \tag{4.12}$$

Здесь и ниже β° означает некоторое достаточно малое зафиксированное положительное число, $t^* = t_* + \delta$.

Заметим, что для выполнения условия 4.1 достаточно, очевидно, чтобы сами множества $Y(x^*)$ оказались множествами выпуклыми. Это условие оказывается естественным, когда уравнение (1.1) линейно, хотя бы по x, а целевое множество выпукло (см., например, работы [1, 6]). Кроме того, для выполнения условия 4.1 достаточно, чтобы для множеств $Y(x^*)$ и $Y^*(x^*)$ выполнялась оценка

$$\gamma(Y(x^*), Y^*(x^*)) \leqslant \varphi_*(\delta)\,\delta \tag{4.13}$$

где

$$\lim_{\delta\to 0} \varphi_*(\delta) = 0 \tag{4.14}$$

ибо тогда для выполнения условия (4.12) достаточно положить $\varphi^*(\delta) = K(\varphi(\delta) + \varphi_*(\delta))$.

Обозначим теперь символом $Y_{\min}(x^*)$ множество тех точек $x^\circ \in X^*(t^*, \{t_*, x_*\}, \{\eta\}_\Pi)$, для которых выполнено условие

$$\min_{\eta\in\{\eta\}_\pi^{\circ\circ}} \rho(x(\vartheta, t^*, x^\circ, \eta), M) = \min_{x\in X^*} \min_{\eta\in\{\eta\}_\pi^{\circ\circ}} \rho(x(\vartheta, t^*, x, \eta), M) \qquad (4.15)$$

где минимум берется по всем управлениям $\eta \in \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ}$. Символом $Y^*_{\min}$ обозначим выпуклую замкнутую оболочку множества $Y_{\min}$. Тогда другое подходящее условие регулярности можно сформулировать следующим образом.

Условие 4.2. Скажем, что при некотором значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна, если для всякого достаточно малого значения $\beta > 0$ и всякой ограниченной замкнутой области G в пространстве $\{x\}$ можно указать функцию $\varphi_*(\delta)$, удовлетворяющую условию (4.14) и такую, что

$$\gamma(Y_{\min}(x^*), Y^*{}_{\min}(x^*)) \leqslant \varphi_*(\delta)\,\delta \qquad (4.16)$$

для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, $x_* \in G$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon \in [\beta, \beta^\circ]$, всякой экстремальной программы $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_\Pi$ и всякой точки $x^* \in X^*(t^*, \{t_*, x_*\}, \{\eta\}_\Pi)$ и если при этом максимальные максимизирующие программы $\{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ}$ при $\varepsilon_0(t^*, x^*, \vartheta) \in (0, \beta^\circ]$ слабо непрерывны по x^*.

Для выполнения условия 4.2 достаточно, очевидно, чтобы наряду с условием слабой непрерывности программ $\{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ}$ по x^* выполнялось условие выпуклости самих множеств $Y_{\min}(x^*)$, в частности,— условие единственности точки $\mathring{x}_{\min} \in X^*(x^*)$, удовлетворяющей условию (4.15).

5. Множества программного поглощения. Зафиксируем некоторое значение $\vartheta > t_0$. Все полупространство $\{t, x\}$, $t \leqslant \vartheta$ разобьем на две части. К первой части отнесем область, где выполняется неравенство $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) > 0$. Ко второй части отнесем множество позиций $\{t, x\}$, для которых $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) = 0$. Величина $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ является непрерывной функцией от позиции $\{t, x\}$. Это утверждение выводится как следствие из непрерывной зависимости решений $x(t)$ уравнения (2.3) от начальных данных рассуждениями, подобными тем, какие были приведены в п. 3 при доказательстве слабой полунепрерывности сверху относительно включения максимальных максимизирующих программ по изменению начальной точки x_*. Это доказательство здесь опустим.

Но из непрерывности функции $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ по позиции $\{t, x\}$ вытекает, что область $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) > 0$, $t < \vartheta$ есть область, открытая в пространстве $\{t, x\}$. В то же время всякое множество позиций $\{t, x\}$, где $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ и $\varepsilon_0(t, x) \leqslant \varepsilon$ или $\varepsilon_0(t, x) \geqslant \varepsilon$ ($\varepsilon \leqslant 0$ — постоянная), есть множество замкнутое. В частности, особенно будем интересоваться замкнутым множеством W_0 позиций $\{t, x\}$, для которых $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) = 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Для этого множества, которое будем именовать множеством минимаксного программного поглощения, выполняется, очевидно, следующее условие. Какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\} \in W_0$ и какой бы ни оказалась программа $\{\eta, [t_*, \vartheta)\}_\Pi$ второго игрока, всегда найдется по крайней мере одно допустимое управление η из этой программы, такое, что для порождаемого им программного движения $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)$ выполнится условие $x(\vartheta) \in M$.

Обозначим далее символом W_ε ($\varepsilon \geqslant 0$) замкнутое множество позиций $\{t, x\}$, для которых выполнено условие $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) \leqslant \varepsilon$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условия 4.1 и выбрана ограниченная область G в пространстве $\{x\}$. Тогда, каково бы ни было значение $\varepsilon \in [\beta, \beta^\circ]$, какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\}$ ($t_* \leqslant \vartheta$), для которой $x_* \in G$ и $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$, и какова бы ни была экстремальная программа $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_\Pi$ ($t^* - t_* = \delta$, $t^* \leqslant \vartheta$), среди управлений $\eta = \eta(dt, du, dv)$, содержащихся в этой экстремальной программе, найдется по крайней мере одно управление $\eta^* = \eta^*(dt, du, dv)$, которое порождает вспомогательное движение $x(t)^* = x(t, t_*, x_*, \eta^*)^*$ ($t_* \leqslant t \leqslant t^*$) (4.3), удовлетворяющее условию

$$\{t^*, x(t^*)^*\} \in W_{\varepsilon^*} \tag{5.1}$$

где $\varepsilon^* = \varepsilon + \varphi^*(\delta)\delta$.

Докажем лемму. Предположим от противного, что лемма неверна. Тогда найдутся число $\varepsilon \in [\beta, \beta^\circ]$, позиция $\{t_*, x_*\}$, $x_* \in G$, $t_* < \vartheta$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x, \vartheta) = \varepsilon$, и экстремальная программа $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_\Pi$ ($t^* - t_* = \delta$, $t^* \leqslant \vartheta$), такая, что все вспомогательные движения $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta)^*$ ($t_* \leqslant t \leqslant t^*$, $\eta \in \{\eta\}_\Pi$) (4.3), будут удовлетворять условию

$$\{t^*, x(t^*)^*\} \notin W_{\varepsilon^*} \tag{5.2}$$

Рассмотрим отображение $x^* \to Y^*(x^*)$ элементов $x^* \in X^*$ на подмножества $Y^*(x^*) \subset X^*$. Это отображение приведет к противоречию. При сделанном предположении (5.2) никакой элемент $x^* \in X^*$ не может содержаться в своем образе $Y^*(x^*)$.

В самом деле, предположим от противного, что некоторый элемент x^* содержится в своем образе $Y^*(x^*)$. Тогда по условию регулярности 4.1 найдется управление $\eta \in \{\eta [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ}$, которое породит программное движение $x(t) = x(t, t^*, x^*, \eta)$ ($t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$) (2.3), удовлетворяющее условию

$$\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon + \varphi^*(\delta)\delta = \varepsilon^* \tag{5.3}$$

Иначе говоря, если $x^* \in Y^*(x^*)$, то это означает, что в максимальной максимизирующей программе $\{\eta, [t^*, \vartheta), x_1^*\}_\Pi^{\circ\circ}$ найдется управление η, которое породит программное движение $x(t) = x(t, t^*, x^*, \eta)$ ($t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$) (2.3), удовлетворяющее условию (5.3). Но по определению величины $\varepsilon_0(t^*, x^*, \vartheta)$ это означает выполнение неравенства

$$\varepsilon_0(t^*, x^*, \vartheta) \leqslant \varepsilon^* \tag{5.4}$$

которое, в свою очередь, по определению множества W_{ε^*} означает выполнение включения

$$\{t^* x^*\} \in W_{\varepsilon^*} \tag{5.5}$$

Но условия (5.2) и (5.5) противоречивы, откуда и следует, что никакой элемент $x^* \in X^*$ не может содержаться в своем образе $Y^*(x^*) \subset X^*$.

Однако отображение $x^* \to Y^*(x^*)$ есть отображение элементов x^* выпуклого, ограниченного и замкнутого множества X^* на ограниченные, выпуклые и замкнутые подмножества $Y^*(x^*) \subset X^*$. Множества $Y^*(x^*)$ оказываются полунепрерывными сверху относительно включения по изменению элемента x^*.

Покажем это. Выберем последовательность точек $x^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots$), сходящуюся к точке x^* при $k \to \infty$. Известно, что максимальные максимизирующие программы $\{\eta, [t^*, \vartheta), x\}_{\Pi}^{\circ\circ}$ слабо полунепрерывны сверху относительно включения по изменению точки x. Отсюда вытекает, что множества $Y(x^{(k)})$ при $k \to \infty$ будут сходиться полунепрерывно сверху по включению к множеству $Y(x^*)$.

В самом деле примем от противного, что некоторая сходящаяся подпоследовательность точек $x^{[j]} \in Y(x^{(k_j)})$ при $j \to \infty$ имеет пределом точку $x^{[*]}$, которая не содержится во множестве $Y(x^*)$. Но для каждой точки $x^{(k_j)}$ по определению множества $Y(x^{(k_j)})$ найдется управление $\eta^{(k_j)} \in \{\eta, [t^*, \vartheta), x^{(k_j)}\}_{\Pi}^{\circ\circ}$, которое породит программное движение $x(t) = x(t, t^*, x^{(k_j)}, \eta^{(k_j)})$ ($t^* \leqslant t \leqslant \vartheta$) (2.3), удовлетворяющее условию

$$\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon + K\varphi(\delta)\delta \tag{5.6}$$

Последовательность $\eta^{(k_j)}$ ($j = 1, 2, \ldots$) можно полагать слабо сходящейся. Слабый предел $\eta^{[*]}$ этой последовательности должен принадлежать максимальной максимизирующей программе $\{\eta, [t^*, \vartheta), x^{[*]}\}_{\Pi}^{\circ\circ}$. Но

$$\lim_{j\to\infty} x(t, t^*, x^{(k_j)}, \eta^{(k_j)}) = x(t, t^*, x^{[*]}, \eta^{[*]}) \tag{5.7}$$

поэтому и для предельного программного движения $x(t) = x(t, t^*, x^{[*]}, \eta^{[*]})$ будет выполнено условие (5.6). Но это и означает, что $x^{[*]} \in Y(x^*)$. Полученное противоречие доказывает полунепрерывность сверху относительно включения множеств $Y(x^*)$ по изменению x^*.

Тогда и выпуклые замкнутые оболочки $Y^*(x^*)$ множеств $Y(x^*)$ будут обладать этим свойством.

Отображение $x^* \to Y^*(x^*)$ удовлетворяет теперь всем условиям теоремы из работы [7]. Согласно этой теореме, построенное отображение имеет по крайней мере одну неподвижную точку x^*, т. е. существует элемент $x^* \in X^*$, который удовлетворяет условию $x^* \in Y^*(x^*)$. Но это вложение, как было отмечено в начале доказательства леммы 5.1, невозможно. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Аналогичными рассуждениями доказывается и лемма 5.2, аналогичная лемме 5.1, но исходящая уже не из условия регулярности 4.1, а из условия регулярности 4.2. Именно, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.2. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условия 4.2. Тогда, какова бы ни была ограниченная область G в пространстве $\{x\}$ и значение $\varepsilon \in [\beta, \beta^\circ]$, какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\}$, $x_* \in G$, $t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$ и какова бы ни была экстремальная программа $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_{\Pi}$ ($t^* - t_* = \delta$, $t^* \leqslant \vartheta$), среди управлений η, содержащихся в этой экстремальной программе, найдется по крайней мере одно управление η^*, которое порождает вспомогательное движение $x(t)^* = x(t, t_*, x_*, \eta^*)$ ($t_* \leqslant t \leqslant t^*$) (4.3), удовлетворяющее условию (5.1).

Доказательство леммы 5.2, подобное доказательству леммы 5.1 и отличающееся от него лишь в том пункте, где доказывается слабая полунепрерывность сверху по включению отображения $x^* \to Y(x^*)$, опустим.

6. Сильная стабильность множества W_ε. Опираясь на леммы 5.1 и 5.2 докажем важное для дальнейшего свойство минимаксной сильной u-стабильности множества W_ε при $\varepsilon \in (0, \beta^\circ)$. Это свойство формулируется следующим образом. Скажем, что некоторое множество W в полупространстве $\{t, x\}$, $t \leqslant \vartheta$ является минимаксно сильно u-стабильным, если какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\} \in W$ $(t_* \leqslant \vartheta)$, число $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и функция V, которая всякому вектору $u \in P$ ставит в соответствие множество $V(u) \subset Q$, среди решений $x(t) = x(t, t_*, x_*, V)$ уравнения в контингенциях

$$x^\cdot(t) \in F_V(t, x(t)) \tag{6.1}$$

найдется по крайней мере одно решение $x(t)$, удовлетворяющее условию $\{t^*, x(t^*)\} \in W$. Здесь символ $F_V(t, x)$ означает выпуклую замкнутую оболочку множества векторов $f = f(t, x, u, v)$, которое получается, когда вектор v пробегает $V(u)$ и вектор u пробегает все множество P.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.1. Пусть при выбранном значении ϑ игра регулярна в смысле условия 4.1 или 4.2. Тогда при всяком $\varepsilon \in (0, \beta^\circ)$ множества W_ε суть множества минимаксно сильно u-стабильные.

Для доказательства леммы 6.1 построим то движение $x(t) = x(t, t_*, x_*, V)$ (6.1), которое удовлетворяет условию, сформулированному в свойстве минимаксной сильной u-стабильности множества W_ε. Выберем какое-нибудь значение $\varepsilon \in (0, \beta^\circ)$. Пусть далее выбрана позиция $\{t_*, x_*\} \in W_\varepsilon$, момент $t^* \leqslant \vartheta$ и функция $V(u)$, фигурирующие в условиях стабильности. Построим множество $W_\varepsilon^{(\delta)}$ в пространстве $\{t, x\}$, которое складывается из множеств $W_{\varepsilon+\varphi^*(\delta)(t-t_*),t}$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$, являющихся сечениями множеств $W_{\varepsilon+\varphi^*(\delta)(t-t_*)}$ гиперплоскостями $t = \mathrm{const}$. Здесь $\varphi^*(\delta)$ — функция, фигурирующая в леммах 5.1 и 5.2.

Рассмотрим ломаную Эйлера $x_{\Delta(\delta)}[t] = x_{\Delta(\delta)}[t, t_*, x_*, U_\varepsilon^{(\delta)}, v[\cdot]]$ (1.4), где $v^*[t] = v_i^* \in V(u_i)$, $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ $(\tau_0 = t_*, \tau_{i+1} = \tau_i + \delta)$ и управление $u_i = u(\tau_i, x_{\Delta(\delta)}[\tau_i])$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$, определяется стратегией $U_\varepsilon^{(\delta)}$, экстремальной [2] к множеству $W_\varepsilon^{(\delta)}$. Эта стратегия определяет функцию $u(t, x)$ при $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ следующим образом. Если $\{t, x\} \in W_\varepsilon^{(\delta)}$, то в качестве $u(t, x)$ можно выбрать любой вектор $u \in P$. Если же $\{t, x\} \notin W_\varepsilon^{(\delta)}$, то в качестве $u(t, x)$ можно выбрать любой вектор $u_e \in P$, удовлетворяющий условию

$$\max_{v \in Q} s' f(t, x, u_e, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s' f(t, x, u, v) \tag{6.2}$$

Здесь s — вектор $x - x_w$, где x_w — точка из множества $W_{\varepsilon,t}^{(\delta)}$, ближайшая в евклидовой метрике к точке x.

Для рассматриваемой ломаной Эйлера $x_{\Delta(\delta)}[t]$ справедлива следующая оценка. Пусть в какой-то момент времени $t = \tau_i$ на этой ломаной $x_{\Delta(\delta)}[t]$

реализовалась некоторая позиция $\{\tau_i, x_{\Delta(\delta)}[\tau_i]\} \notin W_\varepsilon^{(\delta)}$. Тогда

$$\rho^2(x_{\Delta(\delta)}[\tau_{i+1}], W_{\varepsilon+\varphi^*(\delta)(\tau_{i+1}-t_*),\tau_{i+1}}) \leqslant \rho^2(x_{\Delta(\delta)}[\tau_i], W_{\varepsilon+\varphi^*(\delta)(\tau_i-t_*),\tau_i})(1+2\lambda\delta)+o(\delta) \tag{6.3}$$

где $o(\delta)$ означает бесконечно малую высшего порядка относительно δ, а λ — постоянная Липшица для правой части уравнения (1.1) в той области G, пространства $\{x\}$, где лежат все рассматриваемые движения. При этом оценка (6.3) равномерна для всех рассматриваемых значений τ_i вдоль всех интересующих нас ломаных Эйлера $x_{\Delta(\delta)}$ $[t]$.

Оценка (6.3) выводится путем сравнения интересующего отрезка ломаной Эйлера $x_{\Delta(\delta)}$ $[t]$ $(\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1})$ с некоторым программным движением $x(t)^* = x(t, \tau_i, x_w^{(i)}, \eta)^*$, $\eta \in \{\eta, [\tau_i, \tau_{i+1}), x[\tau_i], x[\tau_i] - x_w^{(i)}\}_\Pi$, где $x_w^{(i)}$— точка из $W^{(\delta)}_{\varepsilon,\tau_i}$, ближайшая к $x[\tau_i]$. При этом указанное движение $x(t)^*$ — это именно то программное движение, которое в соответствии с леммой 5.1 или леммой 5.2 удовлетворяет условию

$$\{\tau_{i+1}, x(\tau_{i+1})^*\} \in W^{(\delta)}_{\varepsilon,\tau_{i+1}} \tag{6.4}$$

Это сравнение, приводящее к оценке (6.4), здесь опустим, так как оно аналогично рассуждениям из работы [2], где следует лишь фигурирующее там условие седловой точки (см. условие (2.1) из [2]) заменить на фигурирующее здесь условие минимакса (6.2), учитывая при этом и условие (2.7), характеризующее экстремальную программу $\{\eta, [\tau_i, \tau_{i+1}), x[\tau_i], x[\tau_i] - x_w^{(i)}\}_\Pi$.

Из оценки (6.3) для всей рассматриваемой ломаной Эйлера $x_{\Delta(\delta)}$ $[t]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ также рассуждениями, аналогичными рассуждениям из работы [2], выводится оценка

$$\rho^2(x_{\Delta(\delta)}[t^*], W^{(\delta)}_{\varepsilon,t^*}) \leqslant O(\delta) \tag{6.5}$$

где $O(\delta)$ — величина, удовлетворяющая условию $\lim O(\delta) = 0$ при $\delta \to 0$.

Теперь остается выбрать последовательность чисел $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$ и рассмотреть последовательность соответствующих ломаных Эйлера $x^{(k)}[t] = x_\Delta(\delta^k)$ $[t]$. Из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая будет сходиться равномерно на отрезке $[t_*, t^*]$ к некоторой абсолютно непрерывной функции $x^*(t) = x^*(t, t_*, x_*)$. Из оценки (6.5) следует, что предельная функция $x^*(t)$ будет удовлетворять условию $\{t^*, x^*(t^*)\} \in W_\varepsilon$. С другой стороны, можно проверить (см. [8]), что построенная предельная функция $x^*(t)$ будет решением уравнения в контингенциях (6.1). Таким образом, действительно, построено решение $x^*(t) = x^*(t, t_*, x_*, V)$ уравнения в контингенциях (6.1), удовлетворяющее условию $\{t^*, x^*(t^*)\} \in W_\varepsilon$. Тем самым лемма 6.1 доказана.

7. Сильная стабильность множества поглощения W_0. Доказанная в п. 6 минимаксная сильная u-стабильность множеств W_ε при $\varepsilon \in (0, \beta^\circ)$ позволяет установить, что аналогичным свойством обладает и множество поглощения W_0. Покажем это.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.1. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условий 4.1 или 4.2. Тогда множество W_0 минимаксного поглощения есть множество минимаксно сильно u-стабильное.

В самом деле, предположим, что лемма 7.1 неверна. Тогда найдется функция $V(u)$, позиция $\{t_*, x_*\} \in W_0$ и момент $t^* \in (t_*, \vartheta]$ такие, что все решения $x(t) = x(t, t_*, x_*, V)$ уравнения (6.1) будут удовлетворять условию

$$\{t^*, x(t^*)\} \notin W_0 \tag{7.1}$$

Так как множество W_0 и множество всех точек $\{t^*, x(t^*)\}$ суть множества замкнутые, то из (7.1) следует неравенство

$$\rho(\{t^*, x(t^*)\}, W_0) \geqslant \nu > 0 \tag{7.2}$$

и, стало быть, вследствие непрерывности функции $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ по t и x имеем неравенство

$$\varepsilon_0(t^*, x(t^*), \vartheta) \geqslant \varepsilon_\nu > 0 \tag{7.3}$$

где ε_ν — некоторое положительное число. Следовательно, для всех рассматриваемых движений $x(t)$ справедливо соотношение

$$\{t^*, x(t^*)\} \notin W_{\varepsilon_\nu} \tag{7.4}$$

Но условие (7.4) противоречит свойству минимаксной сильной u-стабильности множества W_{ε_ν}, ибо $\{t_*, x_*\} \in W_0 \subset W_{\varepsilon_\nu}$. Полученное противоречие и доказывает лемму 7.1.

8. Основной результат. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.1. Пусть при некотором значении $\vartheta > t_0$ начальная позиция $\{t_0, x_0\} \in W_0$ и игра регулярна в смысле условий 4.1 или 4.2. Тогда стратегия $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, экстремальная к множеству W_0, разрешает задачу 1.1. При этом для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U^\circ]$ справедливо вложение

$$x[\vartheta] \in M \tag{8.1}$$

Напомним, что стратегия $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, экстремальная к множеству W_0, определяется следующими условиями. Если позиция $\{t, x\} \in W_0$, то в качестве $u^\circ(t, x)$ можно выбрать любой вектор $u \in P$. Если же позиция $\{t, x\} \notin W_0$, то строим вектор $s = x - x^\circ$, где x° — точка из сечения $W_{0,t}$ множества W_0 гиперплоскостью $t = \mathrm{const}$, ближайшая к точке x в евклидовой метрике. Теперь в качестве $u^\circ(t, x)$ можно выбрать любой вектор $u^\circ \in P$, который удовлетворяет условию

$$\max_{v \in Q} s' f(t, x, u^\circ, v) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} s' f(t, x, u, v) \tag{8.2}$$

Справедливость теоремы 8.1 выводится непосредственно из леммы 7.1 рассуждениями, аналогичными тем, какие приведены в работе [2].

Условия регулярности 4.1 и 4.2, которые в соответствии с теоремой 8.1 оказываются достаточными условиями для построения стратегии $U^\circ \div \div u^\circ(t, x)$, разрешающей задачу 1.1 и, стало быть, позволяющей первому игроку успешно завершить игру сближения, охватывают многие из известных достаточных условий успешного завершения той или иной частной игры сближения (см., например, работы [1, 6, 9]), прежде всего многие достаточные условия успешного завершения игр преследования в случаях, когда в правой части уравнения (1.1) управления u и v аддитивно разделены.

Одно достаточное условие для регулярности игры в смысле условия 4.1 будет дано в п. 9.

9. Регулярный случай. Приведем один случай, когда игра является регулярной в смысле условия 4.1. Будем предполагать, что функция $f(t, x, u, v)$ в правой части уравнения (1.1) имеет непрерывные частные производные $\partial f / \partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда полезно сформулировать следующее условие.

Условие 9.1. Скажем, что при некотором значении $\vartheta > t_0$ игра сильно регулярна, если функция $f(t, x, u, v)$ имеет непрерывные частные производные и для всякой начальной позиции $\{t_*, x_*\}$ $(t_* < \vartheta)$, удовлетворяющей условию $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) \in (0, 3\beta^\circ)$, задача 3.2 имеет единственное решение $\eta^\circ(dt, du, dv \mid [t_*, \vartheta), x_*)^\circ$ и при этом точка $x_M \in M$, ближайшая к точке $x = x^\circ(\vartheta)^\circ = x^\circ(\vartheta, t_*, x_*, \eta^\circ \mid \vartheta)^\circ$, единственна.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 9.1. Если при некотором значении $\vartheta > t_0$ выполнено условие 9.1, то при этом значении ϑ игра регулярна в смысле условия 4.1.

Докажем лемму 9.1. Зафиксируем некоторую позицию $\{t_*, x_*\}$ $(t_* < \vartheta)$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon \in [2\beta, \beta^\circ]$, $\beta > 0$, число $t^* = t_* + \delta \leqslant \vartheta$ и некоторую экстремальную программу $\{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_{\text{П}}$. Вследствие того, что область $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) > \beta \geqslant 0$ при $t < \vartheta$ является открытой, число $\delta > 0$ можем полагать настолько малым, что все точки $x = x(t^*, t_*, x_*, \eta)^*$ при $\eta \in \{\eta, [t_*, t^*), x_*, s\}_{\text{П}}$ будут оставаться в области $\varepsilon_0(t^*, x, \vartheta) \in (\beta, 2\beta^\circ)$.

Итак, множество X^* можем полагать лежащим в области $\varepsilon_0(t^*, x, \vartheta) \in (\beta, 2\beta^\circ)$. Но тогда для любой точки $x^* \in X^*$ будет выполняться условие $\varepsilon_0(t^*, x^*, \vartheta) \in (\beta, 2\beta^\circ)$, и, следовательно, для позиций $\{t^*, x^*\}$, где $x^* \in X^*$, в соответствии с условием 9.1 задача 3.2 будет иметь единственное решение $\eta^\circ(dt, du, dv \mid [t^*, \vartheta), x^*)^\circ$.

Выберем какую-нибудь точку $x^* \in X^*$. Пусть $x^\circ(t)^\circ = x^\circ(t, t^*, x^*, \eta^\circ \mid \vartheta)^\circ$ — соответствующее программное оптимальное движение и $x_M \in M$ — точка, ближайшая к точке $x = x^\circ(\vartheta)^\circ$. Обозначим символом $G(t^*, x, \vartheta, \{\eta\}_{\text{П}})$ область достижимости в момент $t = \vartheta$ из позиции $\{t^*, x\}$ для программных движений $x(t) = x(t, t^*, x, \eta)$ при $\eta \in \{\eta\}_{\text{П}}$. Иначе говоря, $G(t^*, x, \vartheta, \{\eta\}_{\text{П}})$ — множество точек x в пространстве $\{x\}$, которое пробегает точка $x(\vartheta) = x(\vartheta, t^*, x, \eta)$ при всех возможных допустимых программных управлениях $\eta \in \{\eta, [t^*, \vartheta)\}_{\text{П}}$.

Рассмотрим область $G(t^*, x^*, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\text{П}}^{\circ\circ})$. По условию 9.1 в этой области имеется единственная точка $x^\circ = x^\circ(\vartheta)^\circ$, ближайшая к множеству M, в котором, в свою очередь, есть единственная точка x_M, ближайшая к точке x°; при этом $\rho(x^\circ, M) = \varepsilon_0(t^*, x^*, \vartheta) \in (\beta, 2\beta^\circ)$. Будем теперь выбирать всевозможные точки x из множества X^*, сохраняя, однако, программу $\{\eta\}_{\text{П}} = \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\text{П}}^{\circ\circ}$ неизменной. Для проверки условия 4.1 надлежит оценить при этом множество $Y^*(x^*)$ — выпуклую оболочку множества $Y(x^*)$ тех точек $x^{**} \in X^*$, для которых область $G(t^*, x^{**},$

ϑ, $\{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\Pi}^{\circ\circ}$) пересекается с ε_*-окрестностью множества M, где $\varepsilon_* = \varepsilon + K\varphi(\delta)\delta$ (4.9), причем функция $\varphi(\delta)$ удовлетворяет условию (4.5.).

Наша задача — показать, что можно выбрать $\varepsilon^* = \varepsilon + \varphi^*(\delta)\delta$ (4.12) таким образом, что для всех точек $x^{**} \in Y^*(x^*)$ каждая из областей $G(t^*, x^{**}, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\Pi}^{\circ\circ})$ будет пересекаться с ε^*-окрестностью множества M.

Для того, чтобы сделать это, рассмотрим следующую геометрическую картину. Обозначим символом G_M замкнутую $(-M)$ — окрестность области достижимости G, т. е. множество точек $x - m$, где $x \in G$ и $m \in M$. Очевидно, область $G(t^*, x, \vartheta, \{\eta\}_{\Pi})$ пересекается с некоторой евклидовой ε-окрестностью множества M тогда и только тогда, когда соответствующая область G_M пересекается со сферой $\|x\| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, надлежит показать, что можно выбрать $\varepsilon^* = \varepsilon + \varphi^*(\delta)\delta$ так, что для всех точек $x^{**} \in Y^*(x^*)$ каждая из областей $G_M(t^*, x^{**}, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_{\Pi}^{\circ\circ})$ будет пересекаться с ε^*-сферой $\|x\| \leqslant \varepsilon^*$, причем функция $\varphi^*(\delta)$ будет удовлетворять условию (4.11).

Для этого сначала оценим множество $Y_*(x^*)$ тех точек $x_{**} \in X^*$ для, которых точка $x = x(\vartheta) = x(\vartheta, t^*, x_{**}, \eta^\circ(dt, du, dv \mid [t^*, \vartheta), x^*)^\circ) + s^\circ$ пересекается с некоторой подходящей сферой $\|x\| \leqslant \varepsilon^*$. Здесь $s^\circ = x_M - x^\circ(\vartheta)^\circ$. Поскольку правая часть $f(t, x, u, v)$ уравнения (1.1) есть функция дифференцируемая, изменение решения $x(t)$ уравнения (2.3) при изменении только начального условия $\Delta x(t^*) = x - x^*$ при неизменном программном управлении $\eta = \eta^\circ$ в линейном приближении и с точностью до членов высшего порядка малости относительно Δx, а, стало быть, по выбору $x \in X^*$, и с точностью до членов высшего порядка малости относительно δ, будет определяться решением интегрального уравнения в вариациях

$$\delta x(t) = \delta x(t^*) + \int_{t^*}^{t}\int_P\int_Q \Big[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i(\tau)\Big]\eta^\circ(d\tau, du, dv) \tag{9.1}$$

Таким образом, когда точка x опишет множество X^*, точка $x = x(\vartheta) + s^\circ$ с точностью до членов порядка $o(\delta)$ опишет некоторое множество X_ϑ^*, получающееся при помощи некоторого неособого линейного преобразования B множества X^*. Это множество $X_\vartheta^* = \{x^{(\vartheta)}\}$ описывается соотношением

$$x^{(\vartheta)} = x^\circ(\vartheta)^\circ + s^\circ + B\delta x(t^*) = x^\circ(\vartheta)^\circ + s^\circ + \delta x(\vartheta) \quad \text{при} \quad \delta x(t^*) = x - x^* \tag{9.2}$$

Таким образом, как и множество X^*, множество X_ϑ^* также оказывается ограниченным, выпуклым и замкнутым множеством. Но в таком случае и пересечение Z_ϑ^* множества X_ϑ^* с любой σ-сферой $\|x\| \leqslant \sigma$, является ограниченным, выпуклым и замкнутым множеством и его прообраз Z^* при преобразовании (9.2) также является ограниченным, выпуклым и замкнутым множеством.

Теперь, покажем, что при подходящем выборе $\sigma(\delta) = \varepsilon^* = \varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) + \varphi^*(\delta)\delta$ $(\varphi^*(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ интересующая замкнутая выпуклая оболочка $Y^*(x^*)$ множества $Y(x^*)$ будет содержаться во множестве Z^*. Тем самым лемма 9.1 будет доказана. Итак, докажем, что при подходящем выборе $\sigma = \varepsilon^*$ справедливо вложение $Y^*(x^*) \subset Z^*$. Выделим для этой цели вокруг точки $x = x^\circ(\vartheta)^\circ + s^\circ$ в области $G_M(t^*, x^*, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ})$ некоторую $O(\delta)$-окрестность $G_M^{(\delta)}$, которая и в самой этой области, и в деформированных за счет изменения начального условия x областях $G_M(t^*, x, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ})$ только и может пересекаться с ε_*-сферой $\|x\| \leqslant \varepsilon_*$. При этом при различных начальных точках x^* и x в областях $G_M(t^*, x^*, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ})$ и $G_M(t^*, x, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ})$ идентифицируем те точки, в которые в момент $t = \vartheta$ приходят соответствующие программные движения $x(t) = x(t, t^*, x^*, \eta) + s\,\delta(t - \vartheta)$ и $x(t) = x(t, t^*, x, \eta) + s\delta(t - \vartheta)$ при одном и том же управлении $\eta \in \{\eta\}_\Pi^{\circ\circ}$ и одинаковых $s = -m$, $m \in M$. Здесь $O(\delta)$ означает величину, которая удовлетворяет условию $\lim O(\delta) = 0$ при $\delta \to 0$ и $\delta(t)$ обозначает δ-функцию Дирака. Можно проверить, что при изменении начальных условий $\Delta x = x - x^*$ выделенный кусок $G_M^{(\delta)}$ области G_M перемещается и деформируется так, что с точностью до перемещения порядка $o(\delta)$, он перемещается поступательно вдоль вектора $B\Delta x$.

Пусть теперь некоторая точка $x^{**} \in Y(x^*)$. Это означает, что в области $G_M^{(\delta)}(t^*, x^{**}, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ})$ есть точка $x_\vartheta^{**} = x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^{**}) + s^{**}$, которая лежит в ε_*-сфере $\|x\| \leqslant \varepsilon_*$. Можно показать, что при этом условии некоторая точка $x_{**}^{(\vartheta)} \in X_\vartheta^*$, представляющая в линейном приближении (9.1) точку $x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^\circ) + s^\circ$, лежит в подходящей ε^*-сфере $\|x\| \leqslant \varepsilon^*$.

Покажем это. Пусть точка $x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^\circ) + s^\circ$ сдвинута относительно точки $x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^\circ) + s^\circ$ на некоторый вектор $\Delta x(\vartheta)$. Тогда с точностью до члена порядка $o(\delta)$ точка $x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^{**}) + s^{**}$ будет сдвинута относительно точки $x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^{**}) + s^{**}$ на тот же самый вектор $\Delta x(\vartheta)$. Далее, с точностью до членов порядка $o^*(\delta)$ изменение расстояния от точки $x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^\circ) + s^\circ$ до точки $x = 0$ при перемещении $\Delta x(\vartheta) = x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^\circ) - x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^\circ)$ изобразится скалярным произведением $[x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^\circ) + s^\circ]'\,\Delta x(\vartheta) \,/\, \|x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^\circ) + s^\circ\|$. Нетрудно убедиться, что с той же точностью это скалярное произведение изображает и изменение расстояния от точки $x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^{**}) + s^{**}$ до точки $x = 0$ при перемещении $\Delta x^{**}(\vartheta) = x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^{**}) - x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^{**})$. При этом оценки равномерны во всякой ограниченной замкнутой области G пространства $\{x\}$ при значениях $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon \in (2\beta, \beta^\circ)$. Так как величина $\|x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^\circ) + s^\circ\|$ по ее определению не больше величины $\|x(\vartheta, t^*, x^*, \eta^{**}) + s^{**}\|$, то заключаем, что, действительно, можно указать функцию $\varphi^*(\delta)$, удовлетворяющую условию $\lim \varphi^*(\delta) = 0$ при $\delta \to 0$ и такую, что точка $x = x(\vartheta, t^*, x^{**}, \eta^\circ) + s^\circ$ будет лежать в ε^*-окрестности точки $x = 0$, где $\varepsilon^* = \varepsilon + \varphi^*(\delta)\,\delta$, если только область $G_M(t^*, x^{**}, \vartheta, \{\eta, [t^*, \vartheta), x^*\}_\Pi^{\circ\circ})$ будет пересекаться с замкнутой ε_*-окрестностью точки $x = 0_*$.

Но это означает, что выпуклое замкнутое множество Z_* содержит множество $Y(x^*)$, а стало быть, множество Z содержит и выпуклую замкнутую оболочку $Y^*(x^*)$ множества $Y(x^*)$.

Однако тем самым показано, что для любой точки $x \in Y^*(x^*)$ найдется по крайней мере одно управление $\eta = \eta(du, dv, dt)$, именно, это будет управление $\eta = \eta^\circ(dt, du, dv \mid [t^*, \vartheta), x^*)^\circ$, которое породит движение

$x(t) = x(t, t^*, x, \eta^\circ)$, приходящее в момент $t = \vartheta$ в ε^*-окрестности множества M, причем $\varepsilon^* = \varepsilon + \varphi^*(\delta)\,\delta$. Но это и означает, что выполнено условие регулярности 4.1. Тем самым лемма 9.1 доказана.

Из леммы 9.1 и теоремы 8.1 получаем такой результат.

Теорема 9.1. Пусть функция $f(t, x, u, v)$ в правой части уравнения 1.1 имеет непрерывные частные производные df / dx_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ и при некотором значении $\vartheta > t_0$ выполнено следующее условие: если для данной позиции $\{t_*, x_*\}$ $(t_0 \leqslant t_* < \vartheta)$ справедливо неравенство $0 < \varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) < 3\beta^\circ$, то оптимальное управление $\eta^\circ(dt, du, dv \mid [t_*, \vartheta), x_*)^\circ$, разрешающее для этой позиции задачу 3.2, единственно и точка $x_M \in M$, ближайшая к точке $x^\circ(\vartheta)^\circ = x^\circ(\vartheta, t_*, x_*, \eta^\circ)$ единственна. Тогда при условии $\{t_0, x_0\} \in W_0$ стратегия $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, экстремальная к множеству поглощения W_0, разрешает задачу 1.1. При этом для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U^\circ]$ справедливо вложение

$$x[\vartheta] \in M \tag{9.3}$$

Поступила 1 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Минимаксное поглощение в игре сближения. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. Young L. C. Generalized curves and the existence of the attained absolute minimum in the calculus of variations. Compt. rend. Soc. sci. et lettres Varsovie, 1937, vol. 3, No. 30.
4. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
5. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. Красовский Н. Н. К теории дифференциальных игр. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
7. Kakutani S. A generalisation of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J., 1941, vol. 8.
8. Филиппов А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., физ., хим., 1959, № 2.
9. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.